

武陵高中 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數（弧度量、三角函數的圖形、和差角與倍半角公式、正餘弦的疊合） · 單選題 3 題（15 分）、多選題 3 題（24 分，每題 8 分，計分 8—5—2—0）、填充題 8 題（48 分，第 7~10 題每題 8 分、第 11~14 題每題 4 分）、混合題 1 題組 3 小題（卷面標示占 13 分，三個小題題末各標 4 分）。

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/wlsh-114a-g11a-1

第壹部分：選擇（填）題（占 87 分） 一、單選題（占 15 分）說明：第 1 題至第 3 題，每題 5 分。

1 將函數 $y = f(x) = 2 \cos x$ 的圖形左移 $\frac{\pi}{3}$ 後所得的圖形為 $y = g(x)$ ，則函數 $y = f(x) + g(x)$ 的最小值為下列何者？

- (1) -1
- (2) -2
- (3) $-2\sqrt{2}$
- (4) $-2\sqrt{3}$
- (5) -4

2 滿足 $0 \leq x \leq 3\pi$ 且 $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的整數 x 共有幾個？

- (1) 6
- (2) 7
- (3) 8
- (4) 9
- (5) 10

御藍教育

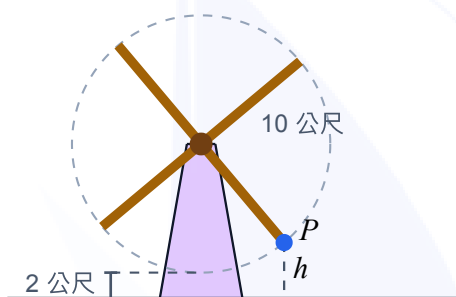
ROYAL BLUE · EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練
網頁版：royalblue-education.com/school-exams/wlsh-114a-g11a-1

- 3 如圖，有一個作等速率圓周運動的大風車，其半徑為 10 公尺，逆時針方向旋轉一圈需時 30 分鐘，最低點離地面 2 公尺。令風車翼片的一個端點 P 從離地面最近的點開始旋轉，若 P 點從離地面最近的距離 h (公尺) 與時間 t (分) 之間的函數關係式 $h(t) = a \sin(bt + c) + d$ ，其中 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $-\pi < c < \pi$ 。則 $h(t)$ 應為下列一個選項？

- (1) $10 \sin(30t) + 2$
- (2) $10 \sin\left(30t - \frac{\pi}{2}\right) + 12$
- (3) $10 \sin\left(\frac{\pi}{15}t + \frac{\pi}{2}\right) + 12$
- (4) $10 \sin\left(\frac{\pi}{15}t\right) + 12$
- (5) $10 \sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 12$



二、多選題 (占 24 分) 說明：第 4 題至第 6 題，每題 8 分。(8-5-2-0)

- 4 下列選項中的式子，哪些的值大於 $\frac{1}{4}$ ？

- (1) $\frac{1}{2} - \cos^2 110^\circ$
- (2) $8 \cos^3 110^\circ - 6 \cos 110^\circ - 1$
- (3) $\sqrt{\frac{1 + \cos 350^\circ}{2}}$
- (4) $\sin 80^\circ \cos 80^\circ$
- (5) $\sin 40^\circ \cos 50^\circ - \sin 310^\circ \sin 230^\circ$

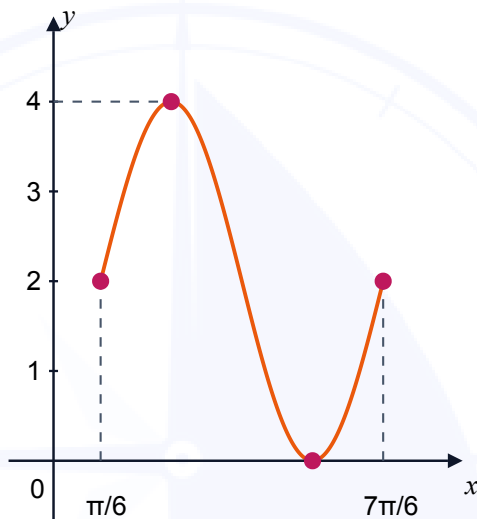
- 5 有關函數 $y = f(x) = 2 \sin 2x - 3 \cos 2x + 5$ 之圖形，下列敘述何者正確？

- (1) 週期 $= \pi$
- (2) 振幅 $= 5$
- (3) 與 x 軸之交點有無限多個
- (4) $y = f(x)$ 的圖形對稱於點 $\left(\frac{\theta}{2}, 5\right)$ ，其中 $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ ， $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$
- (5) $y = f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$ ，其中 $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ ， $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$



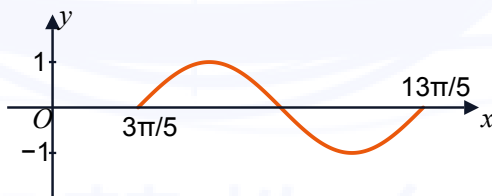
- 6 坐標平面上，若函數 $y = f(x) = a \sin(bx - c) + d$ 的部分圖形如圖，其中 a, b, c, d 均為正數，且 $0 < c < \pi$ 。下列敘述何者正確？

- (1) a, b, d 皆為偶數
- (2) $c = \frac{\pi}{6}$
- (3) $y = f(x)$ 的圖形通過 $(0, 1)$
- (4) 在區間 $[0, \pi)$ 中滿足方程式 $f(x) = \frac{3}{2}$ 的所有實數 x 之和為 $\frac{5\pi}{6}$
- (5) $y = f(x)$ 的圖形可由 $y = 2 \cos^2 x$ 的圖形經適當（上下、左右）平移得到



三、填充題（占 48 分）說明：第 7 題至第 10 題，每題 8 分；第 11 題至第 14 題，每題 4 分。

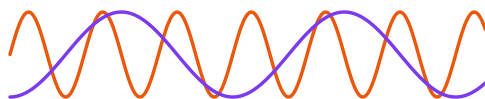
- 7 已知圖為函數 $y = \sin(x + h)$ 一個週期的圖形，其中 $0 < h < 2\pi$ ，求 $h = \underline{\hspace{1cm}} \pi$ 。



- 8 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 9$ ， $\overline{AC} = 5$ ， $\angle ACB = 2\theta$ ， $\angle ABC = \theta$ ，求 $\cos \frac{\theta}{2}$ 的值 = $\underline{\hspace{1cm}}$ 。（化為最簡根式）



- 9 圖為 $y = \sin 3x$ 與 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的部分圖形，則 $y = \sin 3x$ 與 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的圖形在 $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 的範圍中有 ____ 交點。



- 10 設 $x \geq 0$ ，方程式 $3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{6}$ 的解從小到大依序為 $x = \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \dots$ ，則 $\theta_4 =$ ____ π 。

- 11 將 $y = \cos x$ 的圖形先以 y 軸為基準線，水平伸縮為原來的 $\frac{5}{2}$ 倍，再往左平移 $\frac{1}{2}$ 單位，之後再往上平移 $\frac{5}{6}$ 單位，最後再以 x 軸為基準線，鉛直伸縮為原來的 $\frac{3}{2}$ 倍可得新圖形 $y = a \cos(bx + c) + d$ ，其中 $a > 0, b > 0, 0 < c < 1$ ，則數對 $(b, c, d) =$ ____。

- 12 已知 $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ ，若 $f(x) = \cos 2x - \sin x$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M + m =$ ____。

- 13 坐標平面上，已知圓 C 的圓心落在直線 $L: x - 3y - 6 = 0$ ，且過直線 L 上、圓 C 外一點 P 可作出兩條切線 L_1 與 L_2 ，已知切線 L_1 的斜率為 3，則切線 L_2 的斜率為 ____。

- 14 已知 $\triangle ABC$ 三邊的長為 $\overline{AB} = 5, \overline{BC} = 6, \overline{AC} = 7$ 。若 P 點與 Q 點分別在 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$ 上，則 $\overline{AP} + \overline{PQ}$ 的最小值為 ____。(化為最簡根式)

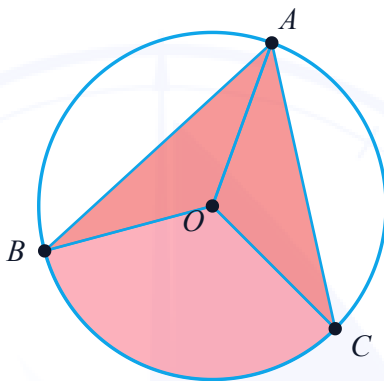
第貳部分：混合題（占 13 分）說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿



使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

15—17 題組 已知圓 O 的半徑是 10，圓上任取三點 A 、 B 、 C ，如圖所示，且 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ 。試回答下列問題。

15 在陰影區域中的扇形 OBC 面積 = ____。（填充題，4 分）



16 若 $\angle AOB = \theta$ 且 $\frac{\pi}{6} < \theta < \pi$ ，則 $\triangle AOB$ 面積 + $\triangle AOC$ 面積為何？（以 $a \sin(\theta + b)$ 表示，其中 $a > 0$ ， $-\pi < b < \pi$ ）（非選擇題，4 分）

17 陰影區域的最大面積是多少？又此時 θ 是多少徑？（非選擇題，4 分）





御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/wlsh-114a-g11a-1

答案一覽

第 1 題 (4)

第 2 題 (3)

第 3 題 (5)

第 4 題 (1)(2)(3)

第 5 題 (1)(4)(5)

第 6 題 (1)(4)

第 7 題 $\frac{7}{5}\pi$

第 8 題 $\frac{\sqrt{95}}{10}$

第 9 題 5

第 10 題 $\frac{35}{12}\pi$

第 11 題 $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{4}\right)$

第 12 題 $-\frac{7}{8}$

第 13 題 $-\frac{13}{20\sqrt{6}}$

第 14 題 $\frac{100\pi}{3}$

第 15 題 $50\sqrt{3}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

第 16 題 最大面積 $50\sqrt{3} + \frac{100\pi}{3}$ ，此時 $\theta = \frac{2\pi}{3}$

單選 1~3：疊合求最小值、餘弦不等式、風車的高度函數

1 答案 (4)。左移 $\frac{\pi}{3}$ 是把 x 換成 $x + \frac{\pi}{3}$ ： $g(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$ 。所以 $f(x) + g(x) = 3\cos x - \sqrt{3}\sin x$ ，疊合後振幅為 $\sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$ ，即 $f(x) + g(x) = 2\sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，最小值為 $-2\sqrt{3}$ 。

兩個振幅 2 的函數相加，最小值不是 -4：兩者不會同時到最低點。



- 2 答案 (3)。 $3\pi \approx 9.42$ ，整數 x 可取 $0, 1, 2, \dots, 9$ 共 10 個。 $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 發生在 x 與 $2k\pi$ 的距離小於 $\frac{\pi}{6} \approx 0.52$ 的地方：在 $0 \leq x \leq 3\pi$ 內是 $0 \leq x < 0.52$ 與 $5.76 < x < 6.81$ ($2\pi \approx 6.28$)。落在裡面的整數是 0 和 6，其餘 8 個整數都滿足 $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

x 是弧度； $x = 6$ 很接近 2π ， $\cos 6 \approx 0.96$ ，要扣掉。

- 3 答案 (5)。半徑 10，所以振幅 $a = 10$ ；輪心離地 $2 + 10 = 12$ 公尺，所以 $d = 12$ ；轉一圈 30 分鐘，週期 $\frac{2\pi}{b} = 30$ ， $b = \frac{\pi}{15}$ 。 $t = 0$ 時 P 在最低點， $h(0) = 2$ ，即 $\sin c = -1$ ，在 $-\pi < c < \pi$ 內 $c = -\frac{\pi}{2}$ 。故 $h(t) = 10 \sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 12$ 。

選項 (3) 的 $c = \frac{\pi}{2}$ 是從最高點出發，選項 (4) 是從與輪心等高的位置出發。

多選 4~6：倍半角求值、疊合後的圖形、由圖形求函數式

- 4 答案 (1)(2)(3)。(1) $\frac{1}{2} - \cos^2 110^\circ = -\frac{1}{2}(2\cos^2 110^\circ - 1) = -\frac{1}{2}\cos 220^\circ = \frac{1}{2}\cos 40^\circ$ ，而 $\cos 40^\circ > \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ，所以大於 $\frac{1}{4}$ 。(2) 由三倍角公式 $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$ ，原式 $= 2\cos 330^\circ - 1 = \sqrt{3} - 1 \approx 0.73$ ，大於 $\frac{1}{4}$ 。(3) 由半角公式，原式 $= |\cos 175^\circ| = \cos 5^\circ$ ，接近 1，大於 $\frac{1}{4}$ 。(4) 原式 $= \frac{1}{2}\sin 160^\circ = \frac{1}{2}\sin 20^\circ < \frac{1}{2}\sin 30^\circ = \frac{1}{4}$ ，不合。(5) $\cos 50^\circ = \sin 40^\circ$ ， $\sin 310^\circ = \sin 230^\circ = -\sin 50^\circ$ ，原式 $= \sin^2 40^\circ - \sin^2 50^\circ = \sin^2 40^\circ - \cos^2 40^\circ = -\cos 80^\circ < 0$ ，不合。

(4) 不用查表： $\sin 20^\circ$ 與 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 比就夠了。

- 5 答案 (1)(4)(5)。疊合： $2\sin 2x - 3\cos 2x = \sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\sin 2x - \frac{3}{\sqrt{13}}\cos 2x\right) = \sqrt{13}\sin(2x - \theta)$ ，其中 $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$ 、 $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ ，所以 $f(x) = \sqrt{13}\sin(2x - \theta) + 5$ 。(1) 對：週期 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 。(2) 錯：振幅是 $\sqrt{13}$ 。(3) 錯：最小值 $5 - \sqrt{13} > 0$ ，圖形都在 x 軸上方，沒有交點。(4) 對：對稱中心是圖形與中線 $y = 5$ 的交點， $\sin(2x - \theta) = 0$ 得 $x = \frac{\theta}{2} + \frac{k\pi}{2}$ ，取 $k = 0$ 即 $\left(\frac{\theta}{2}, 5\right)$ 。(5) 對：對稱軸通過最高點或最低點， $2x - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 得 $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} + \frac{k\pi}{2}$ ，取 $k = 1$ 即 $x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$ 。

振幅看的是疊合後的 $\sqrt{2^2 + 3^2}$ ，不是常數項 5；5 是中線的位置。

- 6 答案 (1)(4)。最高 4、最低 0，所以 $a = \frac{4-0}{2} = 2$ ， $d = \frac{4+0}{2} = 2$ 。圖形從 $\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$ （中線上，往上走）經最高點、最低點再回到 $\left(\frac{7\pi}{6}, 2\right)$ ，恰為一個週期，週期 π ， $b = 2$ 。在 $x = \frac{\pi}{6}$ 處位於中線且上升，所以 $2 \cdot \frac{\pi}{6} - c = 2k\pi$ ，配合 $0 < c < \pi$ 得 $c = \frac{\pi}{3}$ 。故 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$ 。(1) 對： $a = b = d = 2$ 。(2) 錯： $c = \frac{\pi}{3}$ 。(3) 錯： $f(0) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2 = 2 - \sqrt{3}$ 。(4) 對： $f(x) = \frac{3}{2}$ 即 $\sin u = -\frac{1}{4}$ ，其中 $u = 2x - \frac{\pi}{3}$ ， $x \in [0, \pi)$ 時 $u \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ ，恰為一個週期的長度。因為 $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4} < 0$ ，一個解 u_1 在 $-\frac{\pi}{6}$ 與 0 之間，另一個解 $u_2 = \pi - u_1$ ，兩者都在範圍內， $u_1 + u_2 = \pi$ 。於是 $2(x_1 + x_2) - \frac{2\pi}{3} = \pi$ ， $x_1 + x_2 = \frac{5\pi}{6}$ 。(5) 錯： $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ 的振幅是 1，平移不會改變振幅，得不到振幅 2 的圖形。

(4) 不必解出 x ： $\sin u$ 相等的兩個解對稱於 $u = \frac{\pi}{2}$ ，直接用「和為 π 」。



填充 7~10：平移量、半角求值、交點個數、疊合解方程式

- 7 圖形在 $x = \frac{3\pi}{5}$ 處的值為 0 且接著上升，對應 $\sin$ 的角度為 $2k\pi$ ： $\frac{3\pi}{5} + h = 2k\pi$ 。配合 $0 < h < 2\pi$ ，取 $k = 1$ ， $h = 2\pi - \frac{3\pi}{5} = \frac{7\pi}{5}$ 。
若寫成 $\frac{3\pi}{5} + h = \pi$ 得 $h = \frac{2\pi}{5}$ ，那是「值為 0 且接著下降」的位置，與圖不合。
- 8 由正弦定理 $\frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{\overline{AC}}{\sin B}$ ： $\frac{9}{\sin 2\theta} = \frac{5}{\sin \theta}$ 。 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ ，約去 $\sin \theta$ 得 $9 = 10 \cos \theta$ ， $\cos \theta = \frac{9}{10}$ 。 θ 是三角形的內角， $\frac{\theta}{2}$ 為銳角，由半角公式 $\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{19}{20}} = \frac{\sqrt{95}}{10}$ 。
- 9 交點的 x 坐標滿足 $\sin 3x = \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，兩角相等或互補（差 $2k\pi$ ）。① $3x = x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ， $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ，在 $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 內有 $\frac{\pi}{12}$ 、 $\frac{13\pi}{12}$ 。② $3x = \pi - \left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$ ， $x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$ ，範圍內有 $\frac{5\pi}{24}$ 、 $\frac{17\pi}{24}$ 、 $\frac{29\pi}{24}$ （下一個 $\frac{41\pi}{24} > \frac{3\pi}{2}$ ）。五個值都不相同，共 5 個交點。
附圖沒有標坐標軸，直接數圖上的交點會數到範圍外的，要用方程式算。
- 10 疊合： $3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x\right) = 2\sqrt{3} \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 。方程式化為
 $\sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。 $x \geq 0$ 時 $x - \frac{\pi}{6} \geq -\frac{\pi}{6}$ ，由小到大 $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$ ， $\frac{3\pi}{4}$ ， $\frac{9\pi}{4}$ ， $\frac{11\pi}{4}$ ， $\dots$ 。第四個解 $\theta_4 = \frac{11\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{35\pi}{12}$ 。

填充 11~14：伸縮平移、二次函數求極值、切線斜率、最短路徑

- 11 依序做：水平伸縮為 $\frac{5}{2}$ 倍，把 x 換成 $\frac{2}{5}x$ ，得 $y = \cos \frac{2}{5}x$ ；往左平移 $\frac{1}{2}$ ，把 x 換成 $x + \frac{1}{2}$ ，得 $y = \cos \left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}\right)$ ；往上平移 $\frac{5}{6}$ ，得 $y = \cos \left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}\right) + \frac{5}{6}$ ；鉛直伸縮為 $\frac{3}{2}$ 倍，整個式子乘以 $\frac{3}{2}$ ，得 $y = \frac{3}{2} \cos \left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}\right) + \frac{5}{4}$ 。所以 $(b, c, d) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{4}\right)$ 。
先伸縮再平移， $c = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$ 而不是 $\frac{1}{2}$ ；先上移再鉛直伸縮， $\frac{5}{6}$ 也要乘 $\frac{3}{2}$ 。
- 12 $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ ，令 $s = \sin x$ ， $f = -2s^2 - s + 1 = -2 \left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$ 。 $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ 時 s 的範圍是 $-\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ 。 $s = -\frac{1}{4}$ 在範圍內，最大值 $M = \frac{9}{8}$ ；離 $-\frac{1}{4}$ 最遠的端點是 $s = 1$ ，最小值 $m = -2 - 1 + 1 = -2$ 。 $M + m = -\frac{7}{8}$ 。
 x 的範圍跨過 $\frac{\pi}{2}$ ，所以 $\sin x$ 的最大值是 1，不是端點 $\frac{5\pi}{6}$ 的 $\frac{1}{2}$ 。
- 13 P 與圓心都在 L 上，而兩條切線對稱於「 P 與圓心的連線」，所以 L_1 、 L_2 對稱於 L 。設 L 、 L_1 、 L_2 的斜角分別為 α 、 β 、 γ ，則 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ 、 $\tan \beta = 3$ ，且對稱表示 $\gamma - \alpha = \alpha - \beta$ ，即 $\gamma = 2\alpha - \beta$ 。
 $\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$ ，所以 L_2 的斜率 $\tan \gamma = \tan(2\alpha - \beta) = \frac{\frac{3}{4} - 3}{1 + \frac{3}{4} \cdot 3} = \frac{-\frac{9}{4}}{\frac{13}{4}} = -\frac{9}{13}$ 。
流傳版本的題幹只寫「過圓 C 外一點 P 」，沒有說 P 的位置，這樣 L_2 的斜率無法確定；依答案格的形式（分子、分母各兩格），應為 P 在直線 L 上，本頁題幹已補上這個條件。流傳版本的參考答案此題空白。



- 14 作 A 對直線 BC 的對稱點 A' ，則 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ ， $\overline{AP} + \overline{PQ} = \overline{A'P} + \overline{PQ} \geq \overline{A'Q}$ ，而 $\overline{A'Q}$ 最小是 A' 到直線 AC 的距離。由餘弦定理 $\cos C = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{5}{7}$ ， $\sin C = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ 。 A 到 BC 的高為 $7 \sin C = 2\sqrt{6}$ ，所以 $\overline{AA'} = 4\sqrt{6}$ 。 $\overline{AA'} \perp \overline{BC}$ ，故 $\angle A'AC = 90^\circ - C$ ， A' 到直線 AC 的距離 = $\overline{AA'} \sin(90^\circ - C) = 4\sqrt{6} \cdot \frac{5}{7} = \frac{20\sqrt{6}}{7}$ 。

要確認取得到：垂足 Q 滿足 $\overline{AQ} = 4\sqrt{6} \sin C = \frac{48}{7} < 7$ ，在 $\overline{AC}$ 上； $\overline{A'Q}$ 與 BC 的交點 P 離 B 為 5.8，也在 $\overline{BC}$ 上。

圖形變換一律「對 x 做代換」逐步寫；極值題先看變數的範圍再配方。

混合題 15~17：扇形面積、面積和的疊合與最大值

- 15 圓心角是同弧所對圓周角的兩倍， $\angle BOC = 2\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$ 。扇形 OBC 面積 = $\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{100\pi}{3}$ 。

- 16 A 在優弧 BC 上， $\angle AOB + \angle AOC = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ ，所以 $\angle AOC = \frac{4\pi}{3} - \theta$ 。面積和 = $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \sin \left(\frac{4\pi}{3} - \theta \right) = 50 \left[\sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \right] = 50 \left(\frac{3}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right)$ 。疊合： $= 50\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \right) = 50\sqrt{3} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)$ ，即 $a = 50\sqrt{3}$ 、 $b = -\frac{\pi}{6}$ 。

這個式子用到 $\angle AOC = \frac{4\pi}{3} - \theta$ 是三角形的內角（小於 π ），也就是 $\theta > \frac{\pi}{3}$ ，如附圖的情形；題幹的範圍寫到 $\frac{\pi}{6}$ ，若 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$ ，面積和會是 $50 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$ ，但不影響第 17 題的最大值。

- 17 陰影區域 = $\triangle AOB + \triangle AOC +$ 扇形 OBC ，面積為 $50\sqrt{3} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{100\pi}{3}$ 。 $\frac{\pi}{6} < \theta < \pi$ 時 $0 < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$ ，當 $\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ，即 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 時 $\sin$ 值為 1，最大面積為 $50\sqrt{3} + \frac{100\pi}{3}$ 。此時 $\angle AOB = \angle AOC = \frac{2\pi}{3}$ ， $\triangle ABC$ 是正三角形。

流傳版本的參考答案寫最大面積 $50\sqrt{3}$ ，那是兩個三角形面積和的最大值；陰影區域還包含第 15 題的扇形 OBC ，所以要再加 $\frac{100\pi}{3}$ 。 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 兩邊一致。

面積用 $\frac{1}{2}ab \sin C$ 寫成 θ 的式子，再疊合成單一個 $\sin$ ，最大值與發生的角度一次看出來。

看完詳解之後



1. 把錯的題號圈起來，掃左邊的 QR code 在網頁上勾，馬上看到錯在哪幾章。（不用註冊）
2. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
3. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit（可以先把姓名、座號遮掉）



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自武陵高中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/wlsh-114a-g11a-1