

武陵高中 114 學年度上學期 高一第一次段考

範圍：數與式（實數、絕對值、指數、常用對數） · 單選題 2 題（8 分）、多選題 3 題（24 分，每題 8 分，全對 8 分、錯一個選項 5 分、錯兩個 2 分、錯三個以上 0 分）、填充題 9 題（54 分）、計算題 2 題（14 分）。卷首給參考數值 $\sqrt{2} \approx 1.41$ 、 $\sqrt{3} \approx 1.73$ 、 $\sqrt{6} \approx 2.45$ 、 $\log 2 \approx 0.3010$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$ 、 $\log 7 \approx 0.8451$ 。



御藍教育

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/wlsh-114a-g10-1

一、單選題（占 8 分）說明：第 1 題至第 2 題，每題 4 分。

- 1 聲音大小（單位為分貝）取決於聲波通過介質時，所產生的壓力變化（簡稱聲壓，單位為 N/m^2 ）。已知聲壓 x ($x > 0$) 與聲音大小 y 的關係式為 $y = 20 \times \log \frac{x}{2 \times 10^{-5}}$ ，若某工廠運作時測得的聲音為 80 分貝，則該工廠的聲壓為多少 N/m^2 ？

- (1) 0.2
- (2) 2
- (3) 20
- (4) 0.5
- (5) 5

- 2 實驗室近期發現一種繁殖迅速的細菌，每天的數量都以 40% 的增加幅度成長、而且不會死亡。已知研究人員於 8 月 1 日放入 1000 隻的細菌到培養皿內培養，持續觀察細菌的數量直到 8 月 31 日（30 日後），設最後培養皿內的細菌總數量為 x 隻，請問 x 的範圍為何？

- (1) $10^4 < x < 10^5$
- (2) $10^5 < x < 10^6$
- (3) $10^6 < x < 10^7$
- (4) $10^7 < x < 10^8$
- (5) $10^8 < x < 10^9$

二、多選題（占 24 分）說明：第 3 題至第 5 題，每題 8 分。（8—5—2—0）

- 3 試問下列關於實數的敘述那些是正確的？

- (1) $\frac{377}{104}$ 不可以化成有限小數
- (2) $0.\overline{7} + 0.\overline{3} = 0.\overline{6} + 0.\overline{4}$
- (3) $\frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{5} > \frac{6\sqrt{3} + 5\sqrt{6}}{11}$
- (4) 若 a, b 為正實數，且 $a + b$ 為有理數， $a - b$ 為無理數，則 $a^2 - b^2$ 必為無理數
- (5) 若 a, b 為實數且滿足 $a < b$ ，則 $a < \frac{\sqrt{2}a + \sqrt{3}b}{\sqrt{6}} < b$



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/wlsh-114a-g10-1

4 試問下列敘述那些是正確的？

(1) $(2^{-3})^5 \times 3^5 \times (-8)^5 = 243$

(2) $10^{2 \log \sqrt{3}} = 3^{2 \log \sqrt{10}}$

(3) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{4}} < \frac{1}{16}$

(4) $10^{-5.53}$ 的近似值約為 0.0000003

(5) $0 < x < 1$ ，已知 $x + x^{-1} = 4$ ，則 $x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} = 5\sqrt{2}$

5 已知 $\log a = \sqrt{9 + 6\sqrt{2}}$ ，試問下列敘述那些是正確的？

(1) $\log a$ 的整數部分為 4

(2) $\log a$ 的小數部分為 0.182

(3) $\log(10a) = \sqrt{6} + \sqrt{3} + 1$

(4) $\log(a^2) = 9 + 6\sqrt{2}$

(5) a^2 的整數部分為 9 位數

三、填充題 (占 54 分) 說明：第 6 題至第 14 題，每題 6 分。

6 化簡根式 $\frac{(2 - \sqrt{2})^3 + 2\sqrt{2}}{(3 + \sqrt{3})^2(1 - \sqrt{3})^2}$ 為最簡根式 _____。

7 $\left(\frac{1}{1600}\right)^{-0.25} \times (0.81)^{-0.25} \times \sqrt[5]{25\sqrt{5}} \times (81)^{\frac{1}{6}} \times (24)^{\frac{1}{3}} = \text{_____}。$

8 設 a 為有理數且 $a < 0$ ，若 $\frac{16a - \sqrt{3}}{9 + \sqrt{3}a^2}$ 也是有理數，則 $a = \text{_____}。$

9 為了準備本校 11 月 8 日的園遊會活動，某班自信推出一款黃金比例的特調飲料～梅子可樂，梅子可樂是由 pH 值為 2 的梅子汁和 pH 值為 3 的可樂以 2 : 7 的比例調製而成。請問此款梅子可樂的 pH 值為 _____。(答案請四捨五入到小數點後第二位) (pH 值 $= -\log[H^+]$ ，其中 $[H^+]$ 為氫離子的濃度 (莫耳/升))



10 設 x 為實數，若 $|x-1| + 2|x+2| + 3x = 6$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11 設 x 為實數，已知方程式 $6(4^x + 4^{-x}) - 23(2^x + 2^{-x}) + 32 = 0$ ，試問 $2^x + 2^{-x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12 a, b 為實數，已知不等式 $1 \leq |ax+6| \leq b$ 的解為 $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$ 或 $\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{11}{3}$ ，則 $a+b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13 有兩個正實數 a, b ，已知 $a^3b^4 = 10^7$ 、 $a^2b = 10^2$ ，則 $\log(ab) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14 解不等式 $|10-x| < |x+30| < 2|x-15|$ ： $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(以區間符號表示)

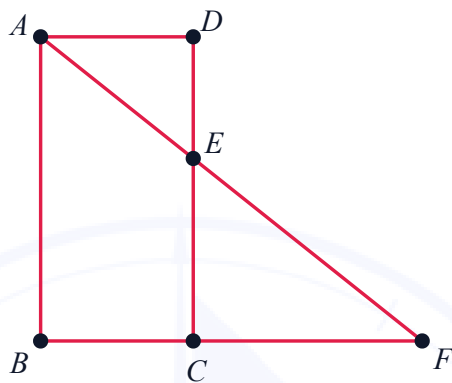
四、計算題（占 14 分）說明：第 15 題，每題 6 分；第 16 題，每題 8 分。

15 請用反證法與乘法公式證明：已知 a, b, c 為實數且 $a+b+c=1$ 、 $a^2+b^2+c^2>1$ ，則 a, b, c 中至少有一個是負數。(6 分)



16

給定一個長方形 $ABCD$ ， $\overline{AB} = 20$ 、 $\overline{BC} = 10$ ，在 $\overline{CD}$ 邊上取一點 E ，連接 A 、 E ，做直線 $\overleftrightarrow{AE}$ 交直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 F 點（如右圖所示），會得到兩個三角形： $\triangle ADE$ 與 $\triangle FCE$ 。試求當 $\overline{DE} = \underline{\hspace{1cm}}$ 時， $\triangle ADE$ 與 $\triangle FCE$ 面積總和會有最小值為何？（8 分）



御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/wlsh-114a-g10-1

答案一覽

- 第 1 題 (1)
第 2 題 (4)
第 3 題 (2)(4)
第 4 題 (2)
第 5 題 (1)(3)(5)
第 6 題 $\frac{5}{3} - \sqrt{2}$
第 7 題 $40\sqrt{5}$
第 8 題 $-\frac{3}{4}$
第 9 題 2.52
第 10 題 $\frac{1}{4}$
第 11 題 $\frac{5}{2}$
第 12 題 2
第 13 題 $\frac{9}{5}$
第 14 題 $(-10, 0)$ 或 $(60, \infty)$
第 15 題 見詳解（反證法）
第 16 題 $\overline{DE} = 10\sqrt{2}$ ；最小值 $200\sqrt{2} - 200$

單選題：對數的兩個應用

- 1 答案 (1)。代 $y = 80$ ： $20 \log \frac{x}{2 \times 10^{-5}} = 80$ ，得 $\log \frac{x}{2 \times 10^{-5}} = 4$ ，即 $\frac{x}{2 \times 10^{-5}} = 10^4$ ，所以 $x = 2 \times 10^{-5} \times 10^4 = 0.2$ 。
- 2 答案 (4)。每天變成前一天的 1.4 倍，30 天後 $x = 1000 \times 1.4^{30}$ 。 $\log 1.4 = \log \frac{14}{10} = \log 2 + \log 7 - 1 = 0.3010 + 0.8451 - 1 = 0.1461$ ，所以 $\log x = 3 + 30 \times 0.1461 = 7.383$ ，介於 7 和 8 之間，故 $10^7 < x < 10^8$ 。
- 「增加 40%」是乘上 1.4，不是乘上 0.4。



多選題：實數、指數與對數的判斷

- 3 答案 (2)(4)。(1) 錯： $377 = 13 \times 29$ 、 $104 = 13 \times 8$ ，約分得 $\frac{29}{8} = 3.625$ ，分母只剩質因數 2，可以化成有限小數。(2) 對：左邊 $\frac{7}{9} + \frac{3}{9} = \frac{10}{9}$ ，右邊 $\frac{6}{9} + \frac{4}{9} = \frac{10}{9}$ 。(3) 錯：兩邊同乘 55 比較 $11(3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}) = 33\sqrt{3} + 22\sqrt{6}$ 與 $5(6\sqrt{3} + 5\sqrt{6}) = 30\sqrt{3} + 25\sqrt{6}$ ，相減得 $3\sqrt{3} - 3\sqrt{6} < 0$ ，所以左邊比較小。(4) 對： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ， $a+b$ 是不為 0 的有理數 (a, b 為正)，若乘積是有理數，則 $a-b = \frac{a^2 - b^2}{a+b}$ 也是有理數，矛盾。(5) 錯： $\frac{\sqrt{2}a + \sqrt{3}b}{\sqrt{6}} = \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{2}}$ ，兩個係數相加 $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1$ ，不是 a, b 的加權平均；例如 $a = 10, b = 11$ ，算出約 $20.6 > b$ 。

(5) 要落在 a, b 之間，係數必須都是正數而且相加等於 1。

- 4 答案 (2)。(1) 錯： $(2^{-3})^5 \times 3^5 \times (-8)^5 = (\frac{1}{8} \times 3 \times (-8))^5 = (-3)^5 = -243$ 。(2) 對： $10^{2\log \sqrt{3}} = 10^{\log 3} = 3$ ； $3^{2\log \sqrt{10}} = 3^{\log 10} = 3^1 = 3$ 。(3) 錯： $(\frac{1}{8})^{\frac{5}{4}} = 2^{-\frac{15}{4}}$ ， $\frac{1}{16} = 2^{-4}$ ， $-\frac{15}{4} > -4$ ，所以左邊比較大。(4) 錯： $10^{-5.53} = 10^{0.47} \times 10^{-6}$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ，所以 $10^{0.47} \approx 3$ ，得約 $3 \times 10^{-6} = 0.000003$ ，題目的 0.0000003 是 3×10^{-7} ，少了一位。(5) 錯：令 $t = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$ ，因 $0 < x < 1$ 所以 $t < 0$ ； $t^2 = x + x^{-1} - 2 = 2$ ， $t = -\sqrt{2}$ 。 $x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} = t(x + 1 + x^{-1}) = -\sqrt{2} \times 5 = -5\sqrt{2}$ 。

(5) 的陷阱是正負號： $x < 1$ 時 $x^{\frac{1}{2}} < x^{-\frac{1}{2}}$ 。

- 5 答案 (1)(3)(5)。 $\sqrt{9+6\sqrt{2}} = \sqrt{9+2\sqrt{18}} = \sqrt{6} + \sqrt{3}$ ($6+3=9$ 、 $6 \times 3=18$)，約為 $2.449 + 1.732 = 4.181$ 。(1) 對：整數部分是 4。(2) 錯：小數部分是 $\sqrt{6} + \sqrt{3} - 4$ ，這是無理數 (約 0.1815)，不等於 0.182。(3) 對： $\log(10a) = 1 + \log a = \sqrt{6} + \sqrt{3} + 1$ 。(4) 錯： $\log(a^2) = 2\log a = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$ ； $9 + 6\sqrt{2}$ 是 $(\log a)^2$ ，不是 $\log(a^2)$ 。(5) 對： $\log(a^2) \approx 8.36$ ，首數是 8，所以 a^2 的整數部分是 9 位數。

$\log(a^2) = 2\log a$ ，和 $(\log a)^2$ 不一樣。

多選題每個選項都要獨立判斷：能算就直接算，說「一定」的敘述找一個反例就能推翻。

填充 6~9：根式、指數律與 pH 值

- 6 分子： $(2 - \sqrt{2})^3 = 8 - 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot 2 - 2\sqrt{2} = 20 - 14\sqrt{2}$ ，加 $2\sqrt{2}$ 得 $20 - 12\sqrt{2}$ 。分母： $(3 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = 3 - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} - 3 = -2\sqrt{3}$ ，平方得 12。所以原式 = $\frac{20 - 12\sqrt{2}}{12} = \frac{5}{3} - \sqrt{2}$ 。

分母先把兩個括號乘起來再平方，比各自平方再相乘快。

- 7 逐項寫成質因數的指數： $(\frac{1}{1600})^{-\frac{1}{4}} = 1600^{\frac{1}{4}} = (2^6 \cdot 5^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$ ； $(0.81)^{-\frac{1}{4}} = (\frac{100}{81})^{\frac{1}{4}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{3}$ ； $\sqrt[5]{25\sqrt{5}} = (5^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{1}{2}}$ ； $81^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{3}}$ ； $24^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}$ 。底數 2 的指數 $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 3$ ；底數 3 的指數 $-1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 0$ ；底數 5 的指數 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 。答案 $2^3 \cdot 5^{\frac{3}{2}} = 8 \cdot 5\sqrt{5} = 40\sqrt{5}$ 。

- 8 因為 $a < 0$ ， $\sqrt{3a^2} = \sqrt{3}|a| = -\sqrt{3}a$ 。設 $\frac{16a - \sqrt{3}}{9 - \sqrt{3}a} = r$ (r 為有理數)，則 $16a - \sqrt{3} = 9r - \sqrt{3}ar$ ，整理成 $(ar - 1)\sqrt{3} = 9r - 16a$ 。右邊是有理數，若 $ar - 1 \neq 0$ 則 $\sqrt{3}$ 為有理數，矛盾；所以 $ar = 1$ 且 $9r = 16a$ 。代 $r = \frac{1}{a}$ ： $\frac{9}{a} = 16a$ ， $a^2 = \frac{9}{16}$ ，又 $a < 0$ ，得 $a = -\frac{3}{4}$ 。

$\sqrt{3a^2}$ 開出來是 $\sqrt{3}|a|$ ， $a < 0$ 時要變號。



- 9 梅子汁 $[H^+] = 10^{-2}$ 、可樂 $[H^+] = 10^{-3}$ 。以體積 2:7 混合，混合後濃度 $= \frac{2 \times 10^{-2} + 7 \times 10^{-3}}{9} = \frac{0.027}{9} = 3 \times 10^{-3}$ 。 $pH = -\log(3 \times 10^{-3}) = 3 - \log 3 = 3 - 0.4771 = 2.5229$ ，四捨五入得 2.52。

混合的是濃度（要按比例平均），不能把兩個 pH 值直接平均。

填充 10~14：絕對值、指數方程式與對數

- 10 以 $x = 1$ 、 $x = -2$ 分段。 $x \geq 1$ ： $(x-1) + 2(x+2) + 3x = 6x + 3 = 6$ ， $x = \frac{1}{2}$ ，不在範圍內。 $-2 \leq x < 1$ ： $(1-x) + 2(x+2) + 3x = 4x + 5 = 6$ ， $x = \frac{1}{4}$ ，在範圍內。 $x < -2$ ： $(1-x) - 2(x+2) + 3x = -3 \neq 6$ ，無解。答案 $x = \frac{1}{4}$ 。

每一段解出來都要檢查是否落在該段範圍內。

- 11 令 $t = 2^x + 2^{-x}$ ，由算幾不等式 $t \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$ 。又 $4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$ ，代入得 $6(t^2 - 2) - 23t + 32 = 0$ ，即 $6t^2 - 23t + 20 = 0$ ， $(2t-5)(3t-4) = 0$ ， $t = \frac{5}{2}$ 或 $\frac{4}{3}$ 。因 $t \geq 2$ ，捨去 $\frac{4}{3}$ ，答案 $\frac{5}{2}$ 。

- 12 解集由兩段組成，對稱於 $\frac{\frac{5}{3} + \frac{7}{3}}{2} = 2$ ，所以 $ax + 6 = 0$ 的根是 $x = 2$ ，得 $a = -3$ 。此時 $|-3x + 6| = 3|x - 2|$ ，不等式變成 $\frac{1}{3} \leq |x - 2| \leq \frac{b}{3}$ ，解為 $2 - \frac{b}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$ 或 $\frac{7}{3} \leq x \leq 2 + \frac{b}{3}$ 。對照 $2 + \frac{b}{3} = \frac{11}{3}$ ，得 $b = 5$ 。 $a + b = -3 + 5 = 2$ 。

- 13 兩式取 $\log$ ，令 $u = \log a$ 、 $v = \log b$ ： $3u + 4v = 7$ 、 $2u + v = 2$ 。由第二式 $v = 2 - 2u$ ，代入第一式 $3u + 8 - 8u = 7$ ， $u = \frac{1}{5}$ ， $v = \frac{8}{5}$ 。 $\log(ab) = u + v = \frac{9}{5}$ 。

- 14 分成兩個不等式各自解再取交集。① $|x - 10| < |x + 30|$ ： x 到 10 的距離小於到 -30 的距離，兩點的中點是 -10，所以 $x > -10$ 。② $|x + 30| < 2|x - 15|$ ：兩邊都不是負數，平方得 $x^2 + 60x + 900 < 4x^2 - 120x + 900$ ，即 $3x^2 - 180x > 0$ ， $x(x - 60) > 0$ ， $x < 0$ 或 $x > 60$ 。交集： $(-10, 0)$ 或 $(60, \infty)$ 。

兩邊都不是負數時才可以直接平方；最後記得取交集。

計算題 15~16：反證法與算幾不等式

- 15 用反證法。假設 a, b, c 都不是負數，即 $a, b, c \geq 0$ ，則 $ab + bc + ca \geq 0$ 。由乘法公式 $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ ，得 $a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2(ab + bc + ca) \leq 1$ ，與 $a^2 + b^2 + c^2 > 1$ 矛盾。故 a, b, c 中至少有一個是負數。

參考答案此題寫「略」，本頁補上完整證明。「至少有一個是負數」的否定是「三個都 ≥ 0 」。

- 16 設 $\overline{DE} = t$ ($0 < t < 20$)，則 $\overline{EC} = 20 - t$ 。 $\triangle ADE$ 在 D 為直角，面積 $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t = 5t$ 。 $\triangle FCE \sim \triangle ADE$ ($AD \parallel CF$)， $\frac{\overline{CF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{DE}}$ ，所以 $\overline{CF} = \frac{10(20-t)}{t}$ ，面積 $\frac{1}{2}(20-t) \cdot \frac{10(20-t)}{t} = \frac{5(20-t)^2}{t} = \frac{2000}{t} - 200 + 5t$ 。兩者相加 $S = 10t + \frac{2000}{t} - 200$ 。由算幾不等式 $10t + \frac{2000}{t} \geq 2\sqrt{10t \cdot \frac{2000}{t}} = 2\sqrt{20000} = 200\sqrt{2}$ ，所以 $S \geq 200\sqrt{2} - 200$ 。等號在 $10t = \frac{2000}{t}$ ，即 $t^2 = 200$ 、 $t = 10\sqrt{2}$ 時成立 ($10\sqrt{2} < 20$ ， E 確實在邊上)。答案： $\overline{DE} = 10\sqrt{2}$ 時，最小值為 $200\sqrt{2} - 200$ 。

用算幾不等式要確認兩件事：兩項乘積是定值，而且等號取得到。



面積和這類題先用一個變數把每塊面積寫出來，化成「 $kt + \frac{m}{t} + \text{常數}$ 」再用算幾不等式。

你們學校的段考卷也想要詳解？考完把題目頁拍照或掃描上傳，我們收到後會盡快做好放上來，一樣免費下載。
上傳：royalblue-education.com/school-exams/submit（上傳前可以先把姓名、座號遮掉）

本卷題目取自武陵高中 114 學年度上學期高一第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

御藍教育

ROYAL BLUE • EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/wlsh-114a-g10-1