

大同高中 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數（弧度量、三角函數的圖形、和差角與倍角半角公式、正餘弦的疊合） · 單選題 3 題（18 分）、多選題 3 題（24 分）、填充題 7 題（49 分）、混合題 1 題組 2 小題（9 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/ttsh-114a-g11a-1

第壹部分：選擇（填）題（占 91 分） 一、單選題（占 18 分）說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1 試比較 $\sin 1$ ， $\sin 2$ ， $\sin 3$ 及 $\cos 1$ ， $\cos 2$ ， $\cos 3$ 的大小並選出正確的選項。

- (1) $\sin 1 < \sin 2 < \sin 3$ 且 $\cos 3 < \cos 2 < \cos 1$
- (2) $\sin 3 < \sin 2 < \sin 1$ 且 $\cos 3 < \cos 2 < \cos 1$
- (3) $\sin 3 < \sin 2 < \sin 1$ 且 $\cos 2 < \cos 3 < \cos 1$
- (4) $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$ 且 $\cos 2 < \cos 3 < \cos 1$
- (5) $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$ 且 $\cos 3 < \cos 2 < \cos 1$

2 試問在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的範圍中，多少個實數 x 滿足 $x - \tan 2x + 1 = 0$ ？

- (1) 1 個
- (2) 2 個
- (3) 3 個
- (4) 4 個
- (5) 5 個（含）以上

3 若直線 L 與 x 軸有一條斜率為 $\frac{1}{3}$ 的角平分線，且 L 的斜率為正，則 L 的斜率為何？

- (1) $\frac{1}{2}$
- (2) $\frac{2}{3}$
- (3) $\frac{3}{4}$
- (4) 1
- (5) $\frac{4}{3}$



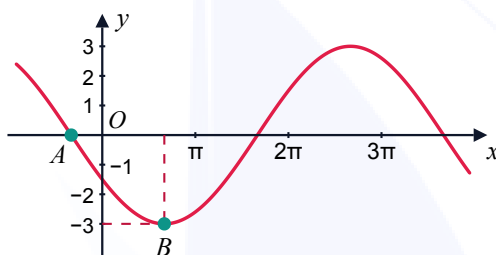
勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/ttsh-114a-g11a-1

二、多選題 (占 24 分) 說明：第 4 題至第 6 題，每題 8 分。(8-5-3-0)

- 4 若函數 $f(x) = 3 \sin\left(\frac{1}{2}x + \theta\right)$ 的部分圖形如圖所示，圖形上有點 $A\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ ，點 $B\left(\frac{2\pi}{3}, -3\right)$ ，其中 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ，試選出正確的選項。

- (1) $\theta = \frac{\pi}{6}$
- (2) $y = f(x)$ 的圖形對稱於點 A
- (3) 將 $y = 3 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 單位後的圖形與 $y = f(x)$ 的圖形重合
- (4) 將 $y = 3 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ 向左平移 $\frac{7\pi}{3}$ 單位後的圖形與 $y = f(x)$ 的圖形重合
- (5) 將 $y = 3 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ 向右平移 $\frac{5\pi}{3}$ 單位後的圖形與 $y = f(x)$ 的圖形重合



- 5 試求下列選項之值，並選出其值為整數的選項。

- (1) $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \cos 30^\circ$
- (2) $1 - 2 \sin^2 15^\circ$
- (3) $(1 + \tan 70^\circ)(1 - \tan 25^\circ)$
- (4) $\sin 169^\circ \cdot \sin 71^\circ + \sin 79^\circ \cdot \sin 19^\circ$
- (5) $\cos 169^\circ \cdot \cos 71^\circ + \sin 79^\circ \cdot \sin 19^\circ$

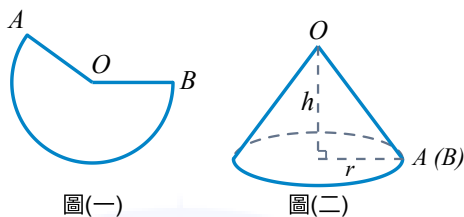
- 6 令 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ ，試選出正確的選項。

- (1) 週期為 π
- (2) 若鉛直線 $x = a$ 和 $x = b$ 均為 $y = f(x)$ 的對稱軸，則 $f(a) = f(b)$
- (3) $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 時有最大值
- (4) 在區間 $[0, \pi)$ 中有兩個實數 x 滿足 $f(x) = \sqrt{3}$
- (5) 在區間 $[0, \pi)$ 中滿足 $f(x) = \sqrt{3}$ 的所有實數 x 之和超過 π



三、填充題（占 49 分）說明：第 7 題至第 13 題，每題 7 分。

- 7 如圖(一)為一扇形紙張，其半徑 $\overline{OA} = 15$ ，面積為 135π 。將 $\overline{OA}$ 與 $\overline{OB}$ 黏合成為一個正圓錐體（沒有底），如圖(二)，若此正圓錐體的高為 h 公分，底面圓半徑為 r 公分，則 $r = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

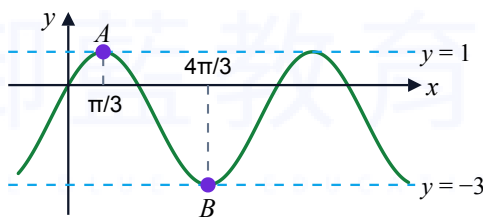


- 8 已知 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ ，則不等式 $\sqrt{3} \cos x \geq \sin x$ 解的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 9 已知 $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ，且 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ，則 $\sin(\theta + 60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 10 已知 $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ 且 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ ，則 $\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 11 設 a 、 b 、 c 是常數，圖是函數 $y = f(x) = a \sin x + b \cos x + c$ 圖形的一部分， $f(x)$ 的週期為 T ，則 $abc + T = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 12 在 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 的範圍內，函數 $y = 4 \sin x + 3 \cos x$ 的最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 13 若 $y = 4 \sin x + 3 \cos x$ 的最小值發生在 $x = \alpha$ ，則此時 $\cos \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

第貳部分：混合題（占 9 分）說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。（14–15 題組）

- 14 將函數 $y = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 2 \cos x$ 疊合成餘弦曲線的形式，即 $r \cdot \cos(x + \theta)$ ，其中 $r > 0$ ， $-\pi < \theta < \pi$ ，則 $r = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（填充題，2 分，2 分）

- 15 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的範圍內，解不等式 $2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 2 \cos x - 3 \geq 0$ 。（非選擇題，5 分）

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/ttsh-114a-g11a-1

答案一覽

第 1 題 (5)

第 2 題 (4)

第 3 題 (3)

第 4 題 (2)(4)(5)

第 5 題 (3)(5)

第 6 題 (1)(4)

第 7 題 9

第 8 題 $\frac{4\pi}{3} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

第 9 題 $\frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$

第 10 題 $-\frac{\sqrt{10}}{5}$

第 11 題 $2\pi - \sqrt{3}$

第 12 題 $\frac{7\sqrt{2}}{3}$

第 13 題 $-\frac{3}{5}$

第 14 題 $r = 2\sqrt{3}, \theta = \frac{\pi}{6}$

第 15 題 $x = 0$ 或 $\frac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)



單選題 (第 1~3 題)：弧度角比大小、正切圖形數交點、角平分線

- 1 答案 (5)。這裡的 1、2、3 是弧度， $\pi \approx 3.14$ ，所以 $0 < 1 < \frac{\pi}{2} < 2 < 3 < \pi$ 。餘弦在 0 到 π 之間遞減，所以 $\cos 3 < \cos 2 < \cos 1$ 。正弦用 $\sin 2 = \sin(\pi - 2)$ 、 $\sin 3 = \sin(\pi - 3)$ 換到第一象限： $\pi - 3 \approx 0.14$ 、 1 、 $\pi - 2 \approx 1.14$ 都在 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間，而正弦在這段遞增， $0.14 < 1 < 1.14$ ，所以 $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$ 。

換成度來看：1 弧度約 57.3° ，2 弧度約 114.6° ，3 弧度約 171.9° ； 114.6° 的正弦等於 65.4° 的正弦，比 57.3° 的大。

- 2 答案 (4)。改寫成 $\tan 2x = x + 1$ ，數 $y = \tan 2x$ 與直線 $y = x + 1$ 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的交點。 $y = \tan 2x$ 的週期是 $\frac{\pi}{2}$ ，鉛直漸近線在 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ ，把範圍切成五段。直線在這個範圍內的高度由 1 上升到 $2\pi + 1$ ，一直是正的。第一段 $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ ： $\tan 2x$ 由 0 上升到無限大，起點在直線下方，之後超過直線，交 1 點。中間三段 $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 、 $(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ 、 $(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ ： $\tan 2x$ 各由負無限大上升到正無限大，各交 1 點。最後一段 $\frac{7\pi}{4} < x \leq 2\pi$ ： $\tan 2x$ 由負無限大上升到 0，都不是正的，與直線沒有交點。共 $1 + 3 + 0 = 4$ 個。

頭尾兩段都只有半支圖形：第一段是 x 軸上方的那一半，有交點；最後一段是 x 軸下方的那一半，沒有交點。四個解約為 $x \approx 0.49、2.20、3.82、5.42$ 。

- 3 答案 (3)。 L 與 x 軸對稱於它們的角平分線。設這條角平分線的斜角為 α ， $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ 。 x 軸的斜角是 0，對這條角平分線作對稱後斜角變成 2α ，所以 L 的斜率是 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{8} = \frac{3}{4}$ ，是正的，符合條件。

兩條角平分線互相垂直，另一條的斜率是 -3 ；用它算也一樣： $\frac{2 \times (-3)}{1 - (-3)^2} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$ 。

多選題 (第 4~6 題)：由圖決定相位、公式求值、疊合後的性質

- 4 答案 (2)(4)(5)。 B 是最低點： $\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} + \theta\right) = -1$ ，所以 $\frac{\pi}{3} + \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ (k 為整數)， $\theta = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ；在 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 內只有 $\theta = \frac{7\pi}{6}$ 。代 A 檢查： $\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{7\pi}{6} = \pi$ ， $\sin \pi = 0$ ，符合。(1) 錯。(2) 對： A 是圖形與中心線 $y = 0$ 的交點，正弦曲線對這種點都成點對稱。(3) 錯：向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 得 $y = 3 \sin \frac{1}{2} \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \sin \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，與 $f(x)$ 的角差 π ，是 $-f(x)$ 。(4) 對：向左平移 $\frac{7\pi}{3}$ 得 $3 \sin \frac{1}{2} \left(x + \frac{7\pi}{3}\right) = 3 \sin \left(\frac{1}{2}x + \frac{7\pi}{6}\right)$ 。(5) 對：向右平移 $\frac{5\pi}{3}$ 得 $3 \sin \frac{1}{2} \left(x - \frac{5\pi}{3}\right) = 3 \sin \left(\frac{1}{2}x - \frac{5\pi}{6}\right)$ ，而 $-\frac{5\pi}{6}$ 與 $\frac{7\pi}{6}$ 相差 2π ，是同一個函數。

只用 A 會得到 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{7\pi}{6}$ 兩個候選； $\theta = \frac{\pi}{6}$ 時 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3 \sin \frac{\pi}{2} = 3$ ，是最高點，與圖不合。平移量要乘上 x 的係數 $\frac{1}{2}$ 才是角的變化量； $f(x)$ 的週期是 4π ，(4) 與 (5) 的平移剛好差一個週期。



- 5 答案 (3)(5)。(1) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ$ ，再乘 $\cos 30^\circ$ 得 $\frac{1}{2} \sin 30^\circ \cos 30^\circ = \frac{1}{4} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$ ，不是整數。(2) $1 - 2 \sin^2 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，不是整數。(3) $70^\circ - 25^\circ = 45^\circ$ ， $\tan 45^\circ = \frac{\tan 70^\circ - \tan 25^\circ}{1 + \tan 70^\circ \tan 25^\circ} = 1$ ，所以 $\tan 70^\circ - \tan 25^\circ = 1 + \tan 70^\circ \tan 25^\circ$ 。展開 $(1 + \tan 70^\circ)(1 - \tan 25^\circ) = 1 + (\tan 70^\circ - \tan 25^\circ) - \tan 70^\circ \tan 25^\circ = 1 + 1 = 2$ ，是整數。(4) $\sin 169^\circ = \sin 11^\circ$ ， $\sin 71^\circ = \cos 19^\circ$ ， $\sin 79^\circ = \cos 11^\circ$ ，原式 $= \sin 11^\circ \cos 19^\circ + \cos 11^\circ \sin 19^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ，不是整數。(5) $\cos 169^\circ = -\cos 11^\circ$ ， $\cos 71^\circ = \sin 19^\circ$ ，原式 $= -\cos 11^\circ \sin 19^\circ + \cos 11^\circ \sin 19^\circ = 0$ ，是整數。

0 也是整數。(4) 與 (5) 只差第一項，都先把角度換成 11° 與 19° 再看能不能湊成公式。

- 6 答案 (1)(4)。疊合： $f(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \right) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$ 。(1) 對：週期 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 。(2) 錯：對稱軸通過最高點或最低點，兩條對稱軸上的函數值可能一個是 2、一個是 -2；例如 $x = \frac{\pi}{12}$ 與 $x = \frac{7\pi}{12}$ 都是對稱軸， $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2$ ， $f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -2$ 。(3) 錯： $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2} = 1$ ，不是最大值 2。(4) 對： $f(x) = \sqrt{3}$ 即 $\sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ； $0 \leq x < \pi$ 時 $\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3}$ ，這個範圍內只有 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ ，即 $x = 0$ 或 $x = \frac{\pi}{6}$ ，共兩個。(5) 錯：兩個解的和是 $\frac{\pi}{6}$ ，小於 π 。
(4) 的角度範圍右端 $\frac{7\pi}{3}$ 不含在內 ($x = \pi$ 不在區間裡)，所以不會多出第三個解。

填充題 (第 7~10 題)：扇形與圓錐、三角不等式、和角公式、半角公式

- 7 設扇形的圓心角為 θ 弧度。面積 $\frac{1}{2} \times 15^2 \times \theta = 135\pi$ ， $\theta = \frac{270\pi}{225} = \frac{6\pi}{5}$ 。弧長 $= 15 \times \frac{6\pi}{5} = 18\pi$ 。黏合後，扇形的弧變成圓錐底面的圓周，所以 $2\pi r = 18\pi$ ， $r = 9$ 。

也可以用扇形面積 $= \frac{1}{2} \times \text{半徑} \times \text{弧長}$ 直接得弧長 $= \frac{2 \times 135\pi}{15} = 18\pi$ 。扇形的半徑 15 變成圓錐的斜高，所以 $h = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ 。

- 8 移項： $\sin x - \sqrt{3} \cos x \leq 0$ 。疊合： $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$ ，不等式變成 $\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \leq 0$ 。 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 時 $\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{6}$ ；這個範圍內正弦值不大於 0 的是 $\pi \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{6}$ 。各加 $\frac{\pi}{3}$ ： $\frac{4\pi}{3} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 。

不要直接兩邊同除以 $\cos x$ ：在這個範圍內 $\cos x \leq 0$ ，除了不等號要反向， $\cos x = 0$ 的端點還要另外討論。驗算端點： $x = \frac{3\pi}{2}$ 時左邊 0、右邊 -1，成立； $x = \frac{4\pi}{3}$ 時兩邊都是 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，等號成立。

- 9 θ 在第二象限，餘弦是負的： $\cos \theta = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$ 。由和角公式 $\sin(\theta + 60^\circ) = \sin \theta \cos 60^\circ + \cos \theta \sin 60^\circ = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$ 。
 $3\sqrt{3} \approx 5.2$ 比 4 大，答案是負的；這與 $\theta \approx 126.9^\circ$ 、 $\theta + 60^\circ \approx 186.9^\circ$ 落在第三象限一致。



- 10 $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ 且 $\cos \theta > 0$ ，所以 θ 在第四象限， $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ，於是 $\frac{3\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \pi$ ， $\frac{\theta}{2}$ 在第二象限：正弦為正、餘弦為負。由半角公式 $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ， $\cos \frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ 。相加得 $\frac{1 - 3}{\sqrt{10}} = -\frac{2}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$ 。
- 另一個做法： $\left(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}\right)^2 = 1 + \sin \theta = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ ，再判斷正負。 $\frac{\theta}{2}$ 介於 $\frac{3\pi}{4}$ 與 π 之間，餘弦的絕對值比正弦大，所以和是負的，取 $-\sqrt{\frac{2}{5}} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$ 。

填充題（第 11~13 題）：由圖形反推係數、範圍內的極值、最小值發生的位置

- 11 $a \sin x + b \cos x$ 疊合後是 $r \sin(x + \varphi)$ ($r = \sqrt{a^2 + b^2}$)，所以 $f(x) = r \sin(x + \varphi) + c$ ，週期 $T = 2\pi$ (圖上最高點 A 到相鄰最低點 B 相隔 $\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi$ ，正好是半個週期)。最大值 $r + c = 1$ ，最小值 $-r + c = -3$ ，解得 $c = -1$ 、 $r = 2$ 。在 $x = \frac{\pi}{3}$ 取最大值，所以 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2}$ ， $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 。展開： $f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x\right) - 1 = \sqrt{3} \sin x + \cos x - 1$ 。所以 $a = \sqrt{3}$ ， $b = 1$ ， $c = -1$ ， $abc + T = -\sqrt{3} + 2\pi = 2\pi - \sqrt{3}$ 。
- 檢查： $f(0) = b + c = 0$ ，圖形通過原點，與圖相符； $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -3$ 。
- 12 疊合： $y = 5\left(\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x\right) = 5 \sin(x + \varphi)$ ，其中 $\cos \varphi = \frac{4}{5}$ 、 $\sin \varphi = \frac{3}{5}$ ， φ 是銳角。因為 $\tan \varphi = \frac{3}{4} < 1$ ，所以 $\varphi < \frac{\pi}{4}$ 。 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 時 $\varphi \leq x + \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \varphi < \frac{\pi}{2}$ ，整個角都在第一象限，正弦遞增，所以最大值發生在 $x = \frac{\pi}{4}$ ： $y = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ 。
- 振幅 5 在這個範圍內取不到 (要 $x + \varphi = \frac{\pi}{2}$ ，即 $x \approx 53.1^\circ$ ，超過 45°)。 $\frac{7\sqrt{2}}{2} \approx 4.95$ ，比 5 小一點。
- 13 同第 12 題， $y = 5 \sin(x + \varphi)$ ， $\cos \varphi = \frac{4}{5}$ 、 $\sin \varphi = \frac{3}{5}$ 。最小值 -5 發生在 $\alpha + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ (k 為整數)，即 $\alpha = \frac{3\pi}{2} - \varphi + 2k\pi$ 。所以 $\cos \alpha = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) = -\sin \varphi = -\frac{3}{5}$ 。
- 同理 $\sin \alpha = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) = -\cos \varphi = -\frac{4}{5}$ 。驗算： $4 \times \left(-\frac{4}{5}\right) + 3 \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -5$ 。

混合題（第 14~15 題）：疊合成餘弦、解三角不等式

- 14 先用和角公式展開： $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos x \cdot \frac{1}{2} - \sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$ ，所以 $y = 3 \cos x - \sqrt{3} \sin x$ 。 $\sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ，提出來： $y = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 。 $r = 2\sqrt{3}$ ， $\theta = \frac{\pi}{6}$ 。
- 兩項的角不同 ($x + \frac{\pi}{6}$ 與 x)，要先展開成同一個角。題目要餘弦的形式，所以配成 $\cos x \cos \theta - \sin x \sin \theta$ 。檢查 $x = 0$ ：原式 $2 \times \frac{1}{2} + 2 = 3$ ， $2\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} = 3$ 。



15 由第 14 題，不等式是 $2\sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geq 3$ ，即 $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。 $0 \leq x \leq 2\pi$ 時 $\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{13\pi}{6}$ 。餘弦值不小於 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的角，是與 0 、 2π 這些角相差不超過 $\frac{\pi}{6}$ 的角。在這個範圍內有兩部分：左端點 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ （餘弦剛好等於 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，之後就變小），以及 $\frac{11\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{13\pi}{6}$ 。各減 $\frac{\pi}{6}$ ： $x = 0$ 或 $\frac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$ 。

$x = 0$ 是單獨一個點：代入得 $2\cos\frac{\pi}{3} + 2\cos 0 - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$ ，等號成立。另一段的兩個端點 $x = \frac{5\pi}{3}$ 與 $x = 2\pi$ 代入也都是 0 ，中間例如 $x = \frac{11\pi}{6}$ 得 $2\sqrt{3} - 3 > 0$ 。

看到 $a\sin x + b\cos x$ 先疊合成單一正弦或餘弦，再把 x 的範圍換成整個角的範圍，方程式、不等式、極值都在那個範圍裡找；範圍的端點要記得代回去檢查。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自大同高中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/ttsh-114a-g11a-1