

臺南二中 114 學年度上學期 高三第一次段考



御藍教育

範圍：極限與函數（數列的極限、 Σ 的性質、無窮等比級數與循環小數、函數的定義域與合成、函數的極限與連續、二次方程式根的位置） · 單選題 3 題（12 分）、多選題 3 題（18 分）、填充題 12 格（60 分）、素養題 1 題 2 小題（10 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/tnssh-114a-g12yi-1

一、單選題（每題 4 分，共 12 分）

1 選出下列何者正確

(A) $\sum_{k=1}^n (a_k)^3 = \sum_{k=1}^n (a_k) \cdot \sum_{k=1}^n (a_k) \cdot \sum_{k=1}^n (a_k)$

(B) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n (a_k)}$

(C) $1 - \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n (1 - a_k)$

(D) $\sum_{k=1}^n (k \cdot a_n) = n \cdot \sum_{k=1}^n (a_n)$

(E) $\sum_{k=1}^n |a_k - 1| = \left| \sum_{k=1}^n a_k - n \right|$

2 無窮等比級數 $2025 - 2025 + 2025 - 2025 + 2025 - \dots$ 的和為何？

- (A) 2025
- (B) -2025
- (C) 0
- (D) 4050
- (E) 發散

3 試問下列有關極限 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|4 + 3x - x^2| - 6}{x - 5}$ 的敘述何者正確？

- (A) 極限為 0
- (B) 極限為 1
- (C) 極限為 5
- (D) 極限為 7
- (E) 極限不存在



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tnssh-114a-g12yi-1

二、多選題（每題 6 分，共 18 分；錯一項得 4 分，錯兩項得 2 分，錯三個（含）以上不給分）

（原卷多選第 1~3 題，本頁編為第 4~6 題）

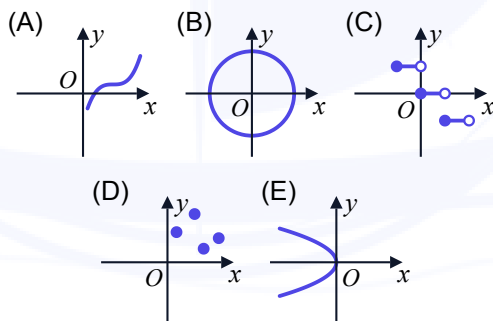
4 下列關於極限之敘述，試選出正確選項？

- (A) 若 $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列，則 $\langle a_n^2 \rangle$ 亦為收斂數列
- (B) 若 $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列，則 $\left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle$ 亦為收斂數列
- (C) 若 $\langle a_n \rangle$ 為發散數列，則 $\langle |a_n| \rangle$ 亦為發散數列
- (D) 若 $\langle a_n \rangle$ 、 $\left\langle \frac{a_n}{b_n} \right\rangle$ 均為收斂數列，則 $\langle b_n \rangle$ 亦為收斂數列
- (E) 若 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle a_n - 9b_n \rangle$ 均為收斂數列，則 $\langle b_n \rangle$ 亦為收斂數列

5 關於函數極限，試選出正確選項

- (A) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x} = \frac{1}{5}$
- (B) $\lim_{x \rightarrow 5} |x| = 5$
- (C) $\lim_{x \rightarrow -5} [x] = -5$ ，其中 $[x]$ 是高斯符號
- (D) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5}{x-5} = 1$
- (E) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x-5|}{x-5} = 1$

6 下列的圖形，何者符合 y 是 x 的函數圖形？



三、填充題（每格 5 分，共 60 分）若答案為分數，請化為最簡分數，否則斟酌扣分。（原卷填充第 1~12 題，本頁編為第 7~18 題）

7 將循環小數 $9 + 0.\bar{9} + 0.0\bar{9} + 0.00\bar{9}$ ，化簡成最簡分數 = ____。

8 設 $\langle a_n \rangle$ 為一等差數列。已知 $a_2 + a_4 + a_6 = 177$ ， $a_3 + a_7 = 138$ 。令 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ，則極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



9 函數 $f(x) = \sqrt{-3x^2 + x + 2}$ 的定義域為 _____。

10 此符號 $[\]$ 為高斯符號，試求 $[\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{4}] + \cdots + [\sqrt{51}] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11 設 $f(x) = x^2 + x$ ， $g(x) = 2x + 1$ ，則 $(f \circ g)(x)$ 有最小值 = _____。

12 設 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & \text{當 } x \leq 2 \\ ax + b, & \text{當 } 2 < x \leq 3 \\ 3x + 5, & \text{當 } x > 3 \end{cases}$ ，且 $f(x)$ 在實數上為連續函數，求數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13 已知三次多項式 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 3x + 2} = 2$ ， $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 - 3x + 2} = 3$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14 設 $a = \frac{\sqrt{13}}{2}$ ， $b = \frac{\sqrt{13}}{3}$ ， $c = \frac{\sqrt{13}}{4}$ 且 $x_n = \frac{5a^n}{1+a^n} + \frac{6b^n}{1+b^n} + \frac{7c^n}{1+c^n}$ ，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的值為 _____。

15 試求出此極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x}{\pi x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

16 設 $f(x) = ax^2 - (a-1)x - 6$ ，(其中 $a \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 0$)，若方程式 $f(x) = 0$ 有一根在 1 與 2 之間，另一根在 -1 與 -2 之間，試求 a 的範圍 = _____。



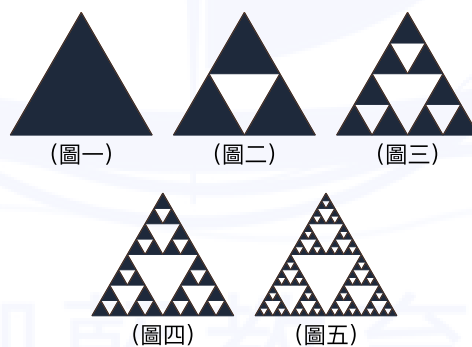
- 17 袋中有編號 1 到 10 號的球各 1 顆，甲、乙、丙三人輪流取球，按甲、乙、丙、甲、乙、丙、甲、……的順序依次取 1 球，取出放回且每球被取到的機會相等，規定先取到質數號碼者獲勝，求乙獲勝的機率_____。

- 18 設 $n \in \mathbb{N}$ ，坐標平面上有一等腰三角形，它的三個頂點分別是 $(0, 3)$ 、 $(\frac{3}{n}, 0)$ 、 $(-\frac{3}{n}, 0)$ ，若此三角形的外接圓半徑長等於 R_n ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、素養題（1 小題，共 10 分）答案請填在答案卷，否則不計分（原卷此大題編號也印作「三」；兩小題本頁編為第 19、20 題）

素養題 謝爾賓斯基三角形（Sierpinski triangle）是一個碎形，在二十世紀初以波蘭數學家瓦茨瓦夫·謝爾賓斯基命名，且這類圖案曾廣泛地出現十三世紀科斯馬蒂式的石雕裝飾上。謝爾賓斯基三角形所指的是取一個正三角形（如圖一，並假設其邊長為 4）的各邊中點後，從中挖去一個邊長為 2 的正三角形（如圖二），接著將剩下的三個小正三角形仿照前一個動作，再各挖一個邊長為 1 的正三角形（如圖三），以此動作持續進行數次，即可得多個謝爾賓斯基三角形。

- 19 試著求出（圖三）的黑色三角形面積？（共 3 分，填充題）



- 20 在無限重複此動作之後得到 n 個圖，求從（圖一）到（圖 n ）之所有黑色三角形面積的總和為何？（共 7 分，非選擇題）





御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/tnssh-114a-g12yi-1

答案一覽

第 1 題 (C)

第 2 題 (E)

第 3 題 (D)

第 4 題 (A)(E)

第 5 題 (A)(B)

第 6 題 (A)(C)(D)

第 7 題 $\frac{1011}{100}$

第 8 題 5

第 9 題 $\left\{ x \mid -\frac{2}{3} \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R} \right\}$

第 10 題 223

第 11 題 $-\frac{1}{4}$

第 12 題 (7, -7)

第 13 題 8

第 14 題 11

第 15 題 0

第 16 題 $2 < a < \frac{7}{2}$

第 17 題 $\frac{15}{49}$

第 18 題 $\frac{2}{3}$

第 19 題 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

第 20 題 $16\sqrt{3}$

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tnssh-114a-g12yi-1

單選題 (第 1~3 題) : Σ 的性質、發散的等比級數、含絕對值的極限

- 1 答案 (C)。 $\sum_{k=1}^n (1 - a_k) = n - \sum_{k=1}^n a_k$ ，而 $n \geq 1$ ，所以 $1 - \sum_{k=1}^n a_k \leq n - \sum_{k=1}^n a_k$ 恆成立，(C) 正確。其餘各舉一個反例：(A) 取 $n = 2$ 、 $a_1 = a_2 = 1$ ，左邊 = 2，右邊 = $2 \times 2 \times 2 = 8$ 。(B) 同樣取 $a_1 = a_2 = 1$ ，左邊 = 2，右邊 = $\frac{1}{2}$ 。(D) a_n 與 k 無關，是常數，左邊 = $a_n(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{n(n+1)}{2}a_n$ ，右邊 = $n \times n a_n = n^2 a_n$ ；取 $n = 2$ 、 $a_2 = 1$ ，左邊 = 3，右邊 = 4。(E) 取 $n = 2$ 、 $a_1 = 0$ 、 $a_2 = 2$ ，左邊 = $1 + 1 = 2$ ，右邊 = $|2 - 2| = 0$ 。

Σ 只對「相加、相減、乘以常數」可以拆開；乘積、倒數、絕對值都不能直接拆。(D) 裡的下標是 n 不是 k ， a_n 在求和時是固定的數。

- 2 答案 (E)。首項 2025，公比 $r = -1$ 。無窮等比級數要 $|r| < 1$ 才收斂，這裡 $|r| = 1$ 。實際看部分和： $S_1 = 2025$ 、 $S_2 = 0$ 、 $S_3 = 2025$ 、 $S_4 = 0$ 、...，在 2025 與 0 之間來回，不會趨近同一個數，所以級數發散。

把各項兩兩括起來會得到 0，從第二項起兩兩括起來會得到 2025；無窮級數的和要看部分和數列的極限，不能任意加括號。

- 3 答案 (D)。 $x = 5$ 時 $4 + 3x - x^2 = 4 + 15 - 25 = -6$ ，所以 x 在 5 附近時 $4 + 3x - x^2 < 0$ ， $|4 + 3x - x^2| = x^2 - 3x - 4$ 。分子 = $x^2 - 3x - 4 - 6 = x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$ 。 $x \rightarrow 5$ 時 $x \neq 5$ ，約去 $x - 5$ ，極限為 $\lim_{x \rightarrow 5} (x + 2) = 7$ 。

$4 + 3x - x^2 = -(x - 4)(x + 1)$ ，只在 $x = -1$ 與 $x = 4$ 變號；5 的左右兩邊都是負的，所以絕對值在 5 附近只有一種拆法，左右極限相同。

多選題 (第 4~6 題) : 數列的收斂性質、函數極限的存在、函數圖形

- 4 答案 (A)(E)。(A) 設 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ，由極限的乘法性質， $a_n^2 = a_n \cdot a_n \rightarrow \alpha^2$ ，正確。(B) 取 $a_n = \frac{1}{n}$ ，收斂到 0，但 $\frac{1}{a_n} = n$ 發散，錯誤。(C) 取 $a_n = (-1)^n$ ，發散，但 $|a_n| = 1$ 收斂，錯誤。(D) 取 $a_n = \frac{1}{n}$ 、 $b_n = n$ ，則 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n^2}$ 收斂， b_n 卻發散，錯誤。(E) $b_n = \frac{1}{9} [a_n - (a_n - 9b_n)]$ ，是兩個收斂數列相減再乘以常數，仍收斂，正確。

(B)(D) 的反例都用到「極限是 0 的數列」：除法的極限性質要求分母的極限不為 0。

- 5 答案 (A)(B)。(A) $\frac{1}{x}$ 在 $x = 5$ 附近分母不為 0，直接代入得 $\frac{1}{5}$ ，正確。(B) $x \rightarrow 5$ 時 $|x| = x \rightarrow 5$ ，正確。(C) x 從左邊接近 -5 (例如 -5.01) 時 $[x] = -6$ ，從右邊接近 (例如 -4.99) 時 $[x] = -5$ ，左右極限不相等，極限不存在，錯誤。(D) $x \rightarrow 5$ 時分母趨近 0、分子是 5，函數值的絕對值愈來愈大，極限不存在，錯誤。(E) $x > 5$ 時 $\frac{|x - 5|}{x - 5} = 1$ ， $x < 5$ 時為 -1，左右極限不相等，極限不存在，錯誤。

(C) 的函數值 $[-5] = -5$ 確實是 -5，但極限看的是 -5 附近而不是 -5 這一點；高斯符號在整數點左右兩邊的值差 1。



- 6 答案 (A)(C)(D)。y 是 x 的函數，表示每個 x 至多對應一個 y，也就是任何一條鉛直線與圖形至多交於一點。(A) 曲線由左往右一直前進，每條鉛直線至多交一點，是。(B) 圓：y 軸就與圓交於上下兩點，不是。(C) 三段水平線段的 x 範圍依序相接而不重疊，接點處上一段是空心、下一段是實心，每個 x 仍只對應一個 y，是。(D) 四個點的 x 坐標都不同，是（定義域只有四個數的函數）。(E) 開口向左的拋物線：y 軸左邊的鉛直線與它交於上下兩點，不是。

(C) 要看端點的空心、實心：如果接點處兩段都是實心，同一個 x 就會對應兩個 y，那就不是函數圖形。函數圖形不一定要連成一條線，(D) 這種只有幾個點的圖形也可以是。

填充 1、11（第 7、17 題）：循環小數與機率中的無窮等比級數

- 7 $0.\bar{9} = 0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots$ 是首項 0.9、公比 0.1 的無窮等比級數，和為 $\frac{0.9}{1-0.1} = 1$ 。同理 $0.0\bar{9} = \frac{0.09}{1-0.1} = 0.1$ ， $0.00\bar{9} = \frac{0.009}{1-0.1} = 0.01$ 。所以原式 $= 9 + 1 + 0.1 + 0.01 = 10.11 = \frac{1011}{100}$ 。 $1011 = 3 \times 337$ ，與 100 沒有公因數，已是最簡分數。
- 17 1 到 10 的質數有 2, 3, 5, 7 共 4 個，每次取到質數的機率是 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ ，取不到的機率是 $\frac{3}{5}$ 。乙在第一輪獲勝：甲沒取到、乙取到，機率 $\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$ 。乙在第二輪獲勝：第一輪三人都沒取到（機率 $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$ ），再來一次「甲沒取到、乙取到」，機率 $\frac{27}{125} \times \frac{6}{25}$ 。依此類推，乙獲勝的機率是首項 $\frac{6}{25}$ 、公比 $\frac{27}{125}$ 的無窮等比級數： $\frac{\frac{6}{25}}{1 - \frac{27}{125}} = \frac{6}{25} \times \frac{125}{98} = \frac{15}{49}$ 。
- 同樣的算法，甲獲勝的機率是 $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{98}{125}} = \frac{25}{49}$ ，丙是 $\frac{9}{49}$ ；三人相加 $\frac{25 + 15 + 9}{49} = 1$ ，可以用來檢查。

無窮等比級數先確認公比的絕對值小於 1，再用「首項除以（1 減公比）」；循環小數與「一輪一輪重複」的機率都是這個公式。

填充 2、8、12（第 8、14、18 題）：數列的極限

- 8 等差數列中 $a_2 + a_6 = 2a_4$ ，所以 $a_2 + a_4 + a_6 = 3a_4 = 177$ ， $a_4 = 59$ ； $a_3 + a_7 = 2a_5 = 138$ ， $a_5 = 69$ 。
 公差 $d = 69 - 59 = 10$ ，首項 $a_1 = 59 - 3 \times 10 = 29$ 。 $S_n = \frac{n[2 \times 29 + (n-1) \times 10]}{2} = 5n^2 + 24n$ 。
 所以 $\frac{S_n}{n^2} = 5 + \frac{24}{n}$ ， $n \rightarrow \infty$ 時極限為 5。
 等差數列的 S_n 是 n 的二次式， n^2 的係數是 $\frac{d}{2}$ ，所以這個極限就是公差的一半。
- 14 先比較三個數與 1 的大小： $\sqrt{13}$ 介於 3 與 4 之間，所以 $a = \frac{\sqrt{13}}{2} > 1$ ， $b = \frac{\sqrt{13}}{3} > 1$ ， $c = \frac{\sqrt{13}}{4} < 1$ 。
 而 $a > 1$ 時把分子分母同除以 a^n ： $\frac{5a^n}{1+a^n} = \frac{5}{\left(\frac{1}{a}\right)^n + 1}$ ，因為 $0 < \frac{1}{a} < 1$ ， $\left(\frac{1}{a}\right)^n \rightarrow 0$ ，這一項趨近 5。
 同理第二項趨近 6。而 $0 < c < 1$ 時 $c^n \rightarrow 0$ ，第三項趨近 $\frac{7 \times 0}{1+0} = 0$ 。所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 5 + 6 + 0 = 11$ 。
 底數大於 1 時 a^n 沒有極限，不能直接代；要先同除以 a^n ，改成底數小於 1 的等比數列再取極限。



- 18 三角形對稱於 y 軸，外接圓的圓心在 y 軸上，設為 $(0, k)$ 。圓心到 $(0, 3)$ 與到 $(\frac{3}{n}, 0)$ 的距離相等：
 $(3 - k)^2 = \frac{9}{n^2} + k^2$ ，展開得 $9 - 6k = \frac{9}{n^2}$ ， $k = \frac{3}{2} - \frac{3}{2n^2}$ 。半徑 $R_n = 3 - k = \frac{3}{2} + \frac{3}{2n^2}$ ， $n \rightarrow \infty$ 時 $\frac{3}{2n^2} \rightarrow 0$ ，所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{3}{2}$ 。
 n 愈大，底邊的兩個頂點愈靠近原點，三角形愈接近 $(0, 3)$ 到 $(0, 0)$ 這條線段，外接圓愈接近以這條線段為直徑的圓，半徑是 $\frac{3}{2}$ 。

數列的極限先把一般項寫成 n 的式子，再看哪些部分趨近 0：分式同除以最高次，等比的部分看底數的絕對值是否小於 1。

填充 3、4、5 (第 9~11 題)：定義域、高斯符號、合成函數

- 9 根號內不能是負數： $-3x^2 + x + 2 \geq 0$ ，兩邊同乘 -1 得 $3x^2 - x - 2 \leq 0$ ，即 $(3x + 2)(x - 1) \leq 0$ ，所以 $-\frac{2}{3} \leq x \leq 1$ 。定義域為 $\left\{x \mid -\frac{2}{3} \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R}\right\}$ 。
同乘負數時不等號要反向；根號內可以等於 0，所以兩個端點都包含在內。
- 10 $[\sqrt{k}] = m$ 表示 $m \leq \sqrt{k} < m + 1$ ，即 $m^2 \leq k < (m + 1)^2$ 。把 $k = 2$ 到 51 依此分組： $k = 2, 3$ 時值為 1 (2 個)； $k = 4 \sim 8$ 值為 2 (5 個)； $k = 9 \sim 15$ 值為 3 (7 個)； $k = 16 \sim 24$ 值為 4 (9 個)； $k = 25 \sim 35$ 值為 5 (11 個)； $k = 36 \sim 48$ 值為 6 (13 個)； $k = 49, 50, 51$ 值為 7 (3 個)。總和 = $1 \times 2 + 2 \times 5 + 3 \times 7 + 4 \times 9 + 5 \times 11 + 6 \times 13 + 7 \times 3 = 2 + 10 + 21 + 36 + 55 + 78 + 21 = 223$ 。
這個和從 $[\sqrt{2}]$ 開始，沒有 $[\sqrt{1}]$ ，所以值為 1 的只有 2 個；最後一組只到 51，不是到 63。項數檢查： $2 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 3 = 50$ ，正好是 2 到 51 的個數。
- 11 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2 + (2x + 1)$ 。令 $t = 2x + 1$ ， x 是任意實數時 t 也可以是任意實數， $t^2 + t = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ ，在 $t = -\frac{1}{2}$ (即 $x = -\frac{3}{4}$) 時有最小值 $-\frac{1}{4}$ 。
展開也可以： $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 6x + 2 = 4\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}$ 。 g 的值域是全體實數，所以合成後的最小值與 f 本身的最小值相同。

填充 6、7、9、10 (第 12、13、15、16 題)：連續、函數的極限、根的位置

- 12 三段各自都是多項式，只要在兩個接點連續即可。在 $x = 2$ ：左邊 $2^2 + 2 + 1 = 7$ ，右邊 $2a + b$ ，所以 $2a + b = 7$ 。在 $x = 3$ ：左邊 $3a + b$ ，右邊 $3 \times 3 + 5 = 14$ ，所以 $3a + b = 14$ 。兩式相減得 $a = 7$ ，代回 $b = 7 - 14 = -7$ 。 $(a, b) = (7, -7)$ 。
檢查：中間那段是 $7x - 7$ ， $x = 2$ 時為 7、 $x = 3$ 時為 14，與兩側接上。
- 13 $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ 。 $x \rightarrow 1$ 時分母趨近 0 而極限存在，分子也必須趨近 0，即 $f(1) = 0$ ；同理 $f(2) = 0$ 。由因式定理，三次多項式 $f(x) = (x - 1)(x - 2)(px + q)$ 。約去分母後， $\lim_{x \rightarrow 1} (px + q) = p + q = 2$ ， $\lim_{x \rightarrow 2} (px + q) = 2p + q = 3$ ，解得 $p = 1$ 、 $q = 1$ 。所以 $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 1)$ ，多項式函數的極限直接代入： $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 2 \times 1 \times 4 = 8$ 。



- 15 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 。 $x \rightarrow \infty$ 時 $x > 0$ ，各項同除以 πx ： $-\frac{1}{\pi x} \leq \frac{\sin x}{\pi x} \leq \frac{1}{\pi x}$ 。 $x \rightarrow \infty$ 時 $-\frac{1}{\pi x}$ 與 $\frac{1}{\pi x}$ 都趨近 0，由夾擠定理， $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{\pi x} = 0$ 。

這裡是 $x \rightarrow \infty$ ，不是 $x \rightarrow 0$ 。 $\sin x$ 本身在 $x \rightarrow \infty$ 時沒有極限，但它的值一直在 -1 與 1 之間，除以愈來愈大的 πx 之後就被夾到 0。

- 16 設兩根為 r_1, r_2 ， $-2 < r_1 < -1, 1 < r_2 < 2$ ，則 $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ 。 $f(1)f(2) = a^2(1 - r_1)(2 - r_1)(1 - r_2)(2 - r_2)$ ，其中只有 $1 - r_2 < 0$ ，所以 $f(1)f(2) < 0$ ；同理 $f(-1)f(-2) < 0$ 。計算： $f(1) = a - (a - 1) - 6 = -5$ ， $f(2) = 4a - 2(a - 1) - 6 = 2a - 4$ ， $f(-1) = a + (a - 1) - 6 = 2a - 7$ ， $f(-2) = 4a + 2(a - 1) - 6 = 6a - 8$ 。由 $f(1)f(2) < 0$ 得 $-5(2a - 4) < 0$ ， $a > 2$ 。由 $f(-1)f(-2) < 0$ 得 $(2a - 7)(6a - 8) < 0$ ， $\frac{4}{3} < a < \frac{7}{2}$ 。取共同範圍： $2 < a < \frac{7}{2}$ 。

反過來， a 在這個範圍時 $f(1)f(2) < 0$ 、 $f(-1)f(-2) < 0$ ，拋物線是連續不斷的曲線，兩端函數值一正一負，中間一定穿過 x 軸，所以兩個區間內各有一根；而二次方程式只有兩根，正好符合題意。檢查： $a = 3$ 時 $3x^2 - 2x - 6 = 0$ 的兩根約為 1.79 與 -1.12。

分母趨近 0 而極限存在時，分子也要趨近 0；函數值有界、分母愈來愈大時用夾擠定理；根落在某個區間內，就看區間兩端函數值的正負。

素養題（第 19、20 題）：謝爾賓斯基三角形的黑色面積

- 19 圖一是邊長 4 的正三角形，面積 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$ 。連接三邊中點把正三角形分成 4 個全等的小正三角形，挖去中間那一個，黑色剩下 $\frac{3}{4}$ ；圖二的黑色面積是 $4\sqrt{3} \times \frac{3}{4} = 3\sqrt{3}$ 。圖三對每個黑色小三角形再做一次，又剩 $\frac{3}{4}$ ： $3\sqrt{3} \times \frac{3}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ 。

直接數也可以：圖三有 9 個邊長 1 的黑色正三角形，每個面積 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，共 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ 。

- 20 每做一次動作，黑色面積變成前一個圖的 $\frac{3}{4}$ ，所以圖 k 的黑色面積是 $4\sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$ ，是首項 $4\sqrt{3}$ 、公比 $\frac{3}{4}$ 的等比數列。從圖一加到圖 n ： $S_n = \frac{4\sqrt{3} \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]}{1 - \frac{3}{4}} = 16\sqrt{3} \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$ 。動作無限重複下去時 $n \rightarrow \infty$ ， $\left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 0$ ，所以所有圖的黑色面積總和為 $\frac{4\sqrt{3}}{1 - \frac{3}{4}} = 16\sqrt{3}$ 。

原卷參考答案為 $16\sqrt{3}$ ，是動作無限重複時無窮等比級數的和；如果只加到圖 n 為止，總和是 $16\sqrt{3} \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$ 。

另外，單看一個圖的黑色面積 $4\sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$ 會趨近 0，但各圖面積加起來的總和趨近 $16\sqrt{3}$ ，這是兩個不同的極限。

每次都乘以同一個比例的圖形問題，先找出首項與公比，再判斷題目要的是第幾項、前 n 項的和，還是無窮等比級數的和。



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自臺南二中 114 學年度上學期高三第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tnssh-114a-g12yi-1