

臺南二中 114 學年度上學期 高三第一次段考



御藍教育

範圍：極限與函數（數列的極限、無窮等比級數、合成函數與反函數、函數的極限、連續函數） · 多重選擇題 4 題（24 分）、填充題 12 題共 16 格（76 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/tnssh-114a-g12jia-1

一、多重選擇題：每題 6 分，共 24 分。說明：每題至少有 1 個選項是正確的，每題答對得 6 分，答錯不倒扣，未作答者不給分；只錯 1 個選項者得 4 分，錯 2 個選項者得 2 分，錯 3 個或 3 個以上者不給分。

1 下列與函數有關的敘述哪些是正確的？

- (1) 函數 $f_1(x) = x$ 、 $f_2(x) = \log_3 3^x$ 、 $g_1(x) = \log x^2$ 、 $g_2(x) = 2 \log x$ ，則 $f_1(x) = f_2(x)$ 且 $g_1(x) = g_2(x)$
- (2) 若 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x))$ 及 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 皆存在，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 必存在
- (3) 若 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 為有理函數，已知 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$
- (4) 若 $f(a)$ 有意義且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在，則 $f(x)$ 在 $x = a$ 處連續
- (5) 已知函數 $f(1) = 2$ ， $f(3) = 7$ ，則至少有一實數 p 滿足 $1 < p < 3$ 且 $f(p) = 4$

2 下列哪些敘述是正確的？

- (1) 若 $\langle a_n \rangle$ 為無窮數列，且對所有自然數 n 都有 $a_{n+1} \geq a_n \geq 0$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在
- (2) 若 $\langle a_n \rangle$ 與 $\langle b_n \rangle$ 皆為發散數列，則數列 $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ 可能為收斂數列
- (3) 若對所有自然數 n ，恆有 $a_n \leq b_n \leq c_n$ ，且 $\langle a_n \rangle$ 與 $\langle c_n \rangle$ 皆為收斂數列，則 $\langle b_n \rangle$ 也是收斂數列
- (4) 若兩數列 $\langle a_n + b_n \rangle$ 與 $\langle a_n - b_n \rangle$ 均為收斂數列，則 $\langle a_n \rangle$ 與 $\langle b_n \rangle$ 皆為收斂數列
- (5) 若無窮等比數列 $\langle x(x-2)^n \rangle$ 為收斂數列，則 $1 < x \leq 3$

3 下列哪些選項是正確的？其中 $[]$ 為高斯符號

- (1) 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & \text{若 } x > 1 \\ 3x, & \text{若 } x \leq 1 \end{cases}$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|}{x - 1} = 1$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 2} [x - 1] = 1$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 1} x[x] = 1$
- (5) $\lim_{x \rightarrow 3} [x - [x]] = 0$



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tnssh-114a-g12jia-1

4 下列哪些敘述是正確的？

- (1) 已知兩函數 $f(x) = 5 + x - x^2$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, 若函數 $(g \circ f)(x)$ 的定義域為集合 A , 則 $\frac{\pi}{3} \in A$
且 $\log_2 \frac{1}{7} \in A$
- (2) $\lim_{n \rightarrow 0} (1+n)^{\frac{1}{n}} = e$, 且 e 為無理數, 滿足 $2 < e < 3$
- (3) $f(x) = x^4 - x^2 + 5$, $g(x) = 3^x + \frac{1}{3^x}$, $h(x) = |\sin x + \cos x|$, 以上三個函數皆為偶函數
- (4) 已知函數 $f(x) = \frac{x^3}{|x|}$, $g(x) = x \tan x$, 則函數 $(f \circ g)(x)$ 的圖形對稱於原點
- (5) 兩函數 $f(x) = 2x - \frac{1}{3}$, $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{6}$ 互為反函數, 且兩圖形對稱於直線 $y = x$

二、填充題：共 76 分。(依答對格數給分：答對 1~7 格每格 6 分，第 8~14 格每格 4 分，第 15、16 格每格 3 分，16 格全對 76 分。本頁第 5~9 題為原卷填充第 1 題的 (1)~(5)，第 10~20 題依序為原卷填充第 2~12 題)

填充第 1 題 求下列各極限值，若極限不存在，請寫「不存在」。

5 (1) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 3} - \frac{5}{x - 3} \right) = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$

6 (2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|6 - 2x - x^2| - 9}{x - 3} = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$

7 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 3^{n+1} - 6 \cdot 4^{n+1}}{3^{n-1} + 2 \cdot 4^{n-1}} = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$

8 (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n + 2} - \sqrt{n^2 - 3n + 1}) = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$

9 (5) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+3)^{50} - 1}{x+4} = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$



10 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + n + 1}{n - 1} - an - b \right) = -3$ ，則實數數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11 設 $x \in \mathbb{R}$ ，且無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3x}{2x-1} \right)^n$ 的和為 $\frac{3-18x}{4}$ ，則 x 為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

12 已知 $f(x)$ 為三次多項式函數，且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 + 3x - 4} = -1$ ， $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 - 4} = 2$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13 設函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3}, & \text{若 } x \neq 3 \\ 2, & \text{若 } x = 3 \end{cases}$ 在 $x = 3$ 處連續，則實數數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 7 \cdot 2^{n-1}}{5^n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15 若 $(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 - 3n^3 + 2n < a_n < (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + 6n^2$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^4 + n^3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

16 函數 $f(x) = \sqrt{24 - 2x - x^2}$ 的值域為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(需以集合表示)

17 設無窮等比級數 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$ 的和為 S ，前 n 項的和為 S_n ，則滿足 $|S - S_n| < \frac{1}{10000}$ 的最小自然數 n 為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$)



- 18 某乘車費率規定：前 1.5 公里內（含 1.5 公里），基本收費 85 元，以後每 250 公尺加收 5 元，但沒有達到 250 公尺，則以 250 公尺計算。若行程 x （公里）、計費 $f(x)$ （元）可用函數 $f(x) = \begin{cases} 85, & \text{當 } 0 < x \leq 1.5 \\ 85 - 5 \times \left[\frac{a - 10x}{2.5} \right], & \text{當 } x > 1.5 \end{cases}$ 表示，其中 $[]$ 為高斯符號。若以 500 元搭車，最多可搭乘 b 公里，則實數數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 19 甲、乙兩人輪流從一副 52 張公正撲克牌中一次抽兩張，抽後放回，約定如下：若某人抽出的兩張點數不同，則改由另一人抽，直到有人抽出的兩張點數相同時，即停止抽牌且稱之為成功。已知由甲先抽，則甲成功的機率為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 20 有一機器人的前進路徑被如此設定：一開始由坐標平面的原點 O 沿 y 軸向上直走至點 $A_1(0, 6)$ ，接著右轉 90° 後直走至點 $A_2(4, 6)$ ，再右轉 90° 直走至點 $A_3\left(4, \frac{10}{3}\right)$ ， $\dots$ ，保持每回行走距離為前次的 $\frac{2}{3}$ 後就右轉 90° 接著直線前進。若當 $n \rightarrow \infty$ 時得 $A_n \rightarrow A$ ，則點 A 的坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/tnssh-114a-g12jia-1

答案一覽

第 1 題 (3)

第 2 題 (2)(4)

第 3 題 (1)(5)

第 4 題 (2)(5)

第 5 題 $\frac{7}{2}$

第 6 題 8

第 7 題 -48

第 8 題 4

第 9 題 -50

第 10 題 (2, 6)

第 11 題 $-\frac{1}{2}$

第 12 題 22

第 13 題 (-4, 3)

第 14 題 $\frac{5}{3}$

第 15 題 $\frac{1}{4}$

第 16 題 $\{y \in R \mid 0 \leq y \leq 5\}$

第 17 題 13

第 18 題 (15, 22.25)

第 19 題 $\frac{17}{33}$

第 20 題 $\left(\frac{36}{13}, \frac{54}{13}\right)$

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。（不用註冊）
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit（可以先把姓名、座號遮掉）



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tnssh-114a-g12jia-1

多選 1~4：函數與極限的基本性質、左右極限、合成函數與奇偶性

- 1 答案 (3)。(1) $f_2(x) = \log_3 3^x = x$ ，定義域是全體實數，與 f_1 相同，所以 $f_1 = f_2$ ；但 $g_1(x) = \log x^2$ 的定義域是 $x \neq 0$ ， $g_2(x) = 2 \log x$ 的定義域是 $x > 0$ ，定義域不同， $g_1 \neq g_2$ ，錯。(2) 取 $g(x) = x - a$ ， $f(x) = \frac{1}{x - a}$ ： $f(x)g(x) = 1$ 的極限是 1， $g(x)$ 的極限是 0，但 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 不存在，錯。(3) 設 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ ，則 $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) \rightarrow L \cdot 0 = 0$ ，對。(4) 連續還要求 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ；例如 $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 有定義、極限存在（為 0），但不等於 $f(0) = 1$ ，不連續，錯。(5) 題目沒有說 f 連續；例如 $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 3 \\ 7, & x \geq 3 \end{cases}$ 滿足 $f(1) = 2$ 、 $f(3) = 7$ ，但函數值只有 2 與 7，不會等於 4，錯。

兩個函數相等，除了對應的式子化簡後相同，定義域也要相同。(5) 要加上「 f 在 $[1, 3]$ 連續」的條件，才能用中間值定理。

- 2 答案 (2)(4)。(1) 取 $a_n = 1$ （每一項都是 1），滿足 $a_{n+1} \geq a_n \geq 0$ ，極限是 1，錯。(2) 取 $a_n = b_n = (-1)^n$ ，兩個都發散，但 $a_n b_n = 1$ 收斂，對。(3) 取 $a_n = -1$ 、 $c_n = 1$ 、 $b_n = (-1)^n$ ，滿足 $a_n \leq b_n \leq c_n$ ， $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle c_n \rangle$ 都收斂，但 $\langle b_n \rangle$ 發散，錯。(4) $a_n = \frac{(a_n + b_n) + (a_n - b_n)}{2}$ 、 $b_n = \frac{(a_n + b_n) - (a_n - b_n)}{2}$ ，兩個收斂數列相加、相減再乘以常數仍收斂，對。(5) 當 $x = 0$ 時每一項都是 0，數列收斂； $x \neq 0$ 時要公比滿足 $-1 < x - 2 \leq 1$ ，即 $1 < x \leq 3$ 。所以收斂的條件是 $x = 0$ 或 $1 < x \leq 3$ ，不能只推得 $1 < x \leq 3$ ，錯。

(3) 夾擠定理要求兩邊的數列收斂到同一個值；兩邊極限不同時，中間的數列不一定收斂。(5) 形如 $\langle ar^n \rangle$ 的數列，除了看 r 的範圍，還要另外考慮 $a = 0$ 的情形。

- 3 答案 (1)(5)。(1) $x > 1$ 時 $\frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$ ，右極限為 3； $x \leq 1$ 時 $3x$ 的左極限為 3。左右極限相等，極限為 3，對。(2) $x > 1$ 時 $\frac{|x - 1|}{x - 1} = 1$ ， $x < 1$ 時為 -1 ，右極限 1、左極限 -1 ，極限不存在，錯。(3) $1 < x < 2$ 時 $0 < x - 1 < 1$ ， $[x - 1] = 0$ ； $2 < x < 3$ 時 $[x - 1] = 1$ 。左極限 0、右極限 1，極限不存在，錯。(4) $0 < x < 1$ 時 $[x] = 0$ ， $x[x] = 0$ ； $1 < x < 2$ 時 $[x] = 1$ ， $x[x] = x \rightarrow 1$ 。左極限 0、右極限 1，極限不存在，錯。(5) 對任何實數 x 都有 $0 \leq x - [x] < 1$ ，所以 $[x - [x]] = 0$ 恆成立，極限為 0，對。

(5) 的 $x - [x]$ 是 x 的小數部分，在 $x = 3$ 的左邊接近 1、右邊接近 0，本身的極限不存在；但外面再取一次高斯符號後恆為 0，極限就存在了。



- 4 答案 (2)(5)。(1) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)+1}}$ 要有意義，需 $f(x)+1 > 0$ ，即 $6+x-x^2 > 0$ ， $(x-3)(x+2) < 0$ ， $A = \{x \mid -2 < x < 3\}$ 。 $\frac{\pi}{3} \approx 1.05 \in A$ ； $\log_2 \frac{1}{7} = -\log_2 7$ ，而 $2 < \log_2 7 < 3$ ，所以 $\log_2 \frac{1}{7} < -2$ ，不在 A 內，錯。(2) 這是 e 的定義式的另一種寫法（把 $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ 中的 $\frac{1}{m}$ 換成趨近 0 的 n ）， $e \approx 2.718$ 為無理數， $2 < e < 3$ ，對。(3) $f(-x) = x^4 - x^2 + 5 = f(x)$ ， $g(-x) = 3^{-x} + 3^x = g(x)$ ，都是偶函數；但 $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ 、 $h\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left|-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right| = 0$ ， h 不是偶函數，錯。(4) $g(-x) = (-x)\tan(-x) = x\tan x = g(x)$ ， g 是偶函數，所以 $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ ， $f \circ g$ 是偶函數，圖形對稱於 y 軸；例如 $x = \pm\frac{\pi}{4}$ 時函數值都是 $\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \neq 0$ ，不對稱於原點，錯。(5) 由 $y = 2x - \frac{1}{3}$ 解出 $x = \frac{y}{2} + \frac{1}{6}$ ，所以 f 的反函數是 $\frac{x}{2} + \frac{1}{6} = g(x)$ ；互為反函數的兩圖形對稱於直線 $y = x$ ，對。
- (4) 的 $f(x) = \frac{x^3}{|x|}$ 本身是奇函數，但合成時裡面的 g 是偶函數， $-x$ 與 x 先被 g 送到同一個值，合成後就是偶函數。

判斷敘述的真偽：對的用定義或運算性質說明，錯的舉一個反例；極限存在要左右極限相等，連續還要再等於函數值。

填充 5~9（原卷填充 1 的 (1)~(5)）：五個極限的計算

- 5 $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ ，通分： $\frac{2x^2 - 8 - 5(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{2x^2 - 5x - 3}{(x-1)(x-3)} = \frac{(2x+1)(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \frac{2x+1}{x-1}$ ($x \neq 3$)。 $x \rightarrow 3$ 時趨近 $\frac{7}{2}$ 。
兩項在 $x \rightarrow 3$ 時各自的極限都不存在，不能分開算；要先通分合併，約去 $x-3$ 。
- 6 $x = 3$ 時 $6 - 2x - x^2 = -9 < 0$ ，所以 x 在 3 附近時 $|6 - 2x - x^2| = x^2 + 2x - 6$ 。分子 $= x^2 + 2x - 15 = (x+5)(x-3)$ ，原式 $= \lim_{x \rightarrow 3} (x+5) = 8$ 。
去絕對值前先把 $x = 3$ 代進絕對值裡面看正負；裡面是負的，去掉絕對值要變號。
- 7 分子分母同除以 4^{n-1} ：分子 $= 5 \cdot 9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 6 \cdot 16 \rightarrow -96$ ，分母 $= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 2 \rightarrow 2$ 。極限 $= \frac{-96}{2} = -48$ 。
 $4^{n+1} = 16 \cdot 4^{n-1}$ 、 $3^{n+1} = 9 \cdot 3^{n-1}$ ，指數差 2 是差 16 倍與 9 倍。
- 8 分子分母同乘以 $\sqrt{n^2 + 5n + 2} + \sqrt{n^2 - 3n + 1}$ ：原式 $= \frac{(n^2 + 5n + 2) - (n^2 - 3n + 1)}{\sqrt{n^2 + 5n + 2} + \sqrt{n^2 - 3n + 1}} = \frac{8n + 1}{8 + \frac{1}{n}}$ 。分子分母同除以 n ： $\frac{8 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}} \rightarrow \frac{8}{1 + 1} = 4$ 。



- 9 令 $t = x + 3$, $x \rightarrow -4$ 時 $t \rightarrow -1$, 原式 $= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^{50} - 1}{t + 1} \circ t^{50} - 1 = (t^2)^{25} - 1 = (t^2 - 1)(t^{48} + t^{46} + \cdots + t^2 + 1) = (t + 1)(t - 1)(t^{48} + t^{46} + \cdots + t^2 + 1)$ 。約去 $t + 1$ 後代入 $t = -1$: $(-2) \times 25 = -50$ (括號內共 25 項, 每項都是 1)。
- 也可以用二項式定理: 令 $u = x + 4$, $(x + 3)^{50} = (u - 1)^{50} = 1 - 50u + \cdots$, 分子 $= -50u +$ (含 u^2 以上的項), 除以 u 後只剩 -50 。

分式遇到分母趨近 0, 先分解約去公因式; 指數型同除以底數最大的項; 根式相減先有理化。

填充 10~15 (原卷填充 2~7): 由極限求係數、無窮等比級數、連續與夾擠定理

- 10 用長除法: $2n^2 + n + 1 = (n - 1)(2n + 3) + 4$, 所以 $\frac{2n^2 + n + 1}{n - 1} = 2n + 3 + \frac{4}{n - 1}$ 。括號內 $= (2 - a)n + (3 - b) + \frac{4}{n - 1}$ 。若 $a \neq 2$, $(2 - a)n$ 的絕對值會愈來愈大, 極限不存在; 所以 $a = 2$, 此時極限 $= 3 - b = -3$, $b = 6$ 。 $(a, b) = (2, 6)$ 。
- 11 這是首項與公比都是 $r = \frac{3x}{2x - 1}$ 的無窮等比級數, $|r| < 1$ 時和為 $\frac{r}{1 - r} = \frac{3x}{(2x - 1) - 3x} = \frac{-3x}{x + 1}$ 。令 $\frac{-3x}{x + 1} = \frac{3 - 18x}{4}$: $-12x = (3 - 18x)(x + 1) = -18x^2 - 15x + 3$, 整理得 $6x^2 + x - 1 = 0$, $(3x - 1)(2x + 1) = 0$, $x = \frac{1}{3}$ 或 $x = -\frac{1}{2}$ 。檢查公比: $x = \frac{1}{3}$ 時 $r = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3$, 級數發散, 不合; $x = -\frac{1}{2}$ 時 $r = \frac{-\frac{3}{2}}{-2} = \frac{3}{4}$, 收斂, 和為 $\frac{3 + 9}{4} = 3$, 與 $\frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 3$ 相符。所以 $x = -\frac{1}{2}$ 。
- 求和公式只在 $|r| < 1$ 時成立, 解出 x 之後一定要代回去檢查公比。
- 12 $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$ 在 $x \rightarrow 1$ 時趨近 0, 極限存在, 所以 $f(1) = 0$; $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ 在 $x \rightarrow 2$ 時趨近 0, 所以 $f(2) = 0$ 。 f 為三次, 設 $f(x) = (x - 1)(x - 2)(ax + b)$ 。第一式: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 2)(ax + b)}{x + 4} = \frac{-(a + b)}{5} = -1$, $a + b = 5$ 。第二式: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)(ax + b)}{x + 2} = \frac{2a + b}{4} = 2$, $2a + b = 8$ 。解得 $a = 3$, $b = 2$, $f(x) = (x - 1)(x - 2)(3x + 2)$ 。多項式函數連續, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 2 \cdot 1 \cdot 11 = 22$ 。
- 13 在 $x = 3$ 連續的條件是 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 2$ 。 $x \rightarrow 3$ 時分母趨近 0, 極限要存在, 分子在 $x = 3$ 必須為 0, 所以 $x^2 + ax + b = (x - 3)(x + c)$, 極限 $= \lim_{x \rightarrow 3} (x + c) = 3 + c = 2$, $c = -1$ 。 $x^2 + ax + b = (x - 3)(x - 1) = x^2 - 4x + 3$, $(a, b) = (-4, 3)$ 。
- 14 一般項 $\frac{4^n - 7 \cdot 2^{n-1}}{5^n} = \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{7}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ 。兩個無窮等比級數的公比 $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{5}$ 絕對值都小於 1, 都收斂, 可以分開求和: $\frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}} - \frac{7}{2} \cdot \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = 4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3} = 4 - \frac{7}{3} = \frac{5}{3}$ 。
- $7 \cdot 2^{n-1} = \frac{7}{2} \cdot 2^n$, 先把指數統一成 n 再拆。



15 $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$ 。所以

$$\frac{n^4 - 10n^3 + n^2 + 8n}{4} < a_n < \frac{n^4 + 2n^3 + 25n^2}{4}$$

。各除以 $n^4 + n^3 > 0$ ：左邊 $\frac{n^4 - 10n^3 + n^2 + 8n}{4(n^4 + n^3)} \rightarrow \frac{1}{4}$ ，右邊 $\frac{n^4 + 2n^3 + 25n^2}{4(n^4 + n^3)} \rightarrow \frac{1}{4}$ （分子分母同除以 n^4 ）。由夾擠定理， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^4 + n^3} = \frac{1}{4}$ 。

不等式兩邊的最高次項都是 $\frac{n^4}{4}$ ，低次的 $-3n^3 + 2n$ 與 $6n^2$ 除以 n^4 後都趨近 0，不影響極限。

分母趨近 0 而極限存在，分子一定有同一個因式；無窮等比級數求和前後都要確認公比的絕對值小於 1。

填充 16~20（原卷填充 8~12）：值域、高斯符號與無窮等比級數的應用

16 配方： $24 - 2x - x^2 = 25 - (x+1)^2$ 。根號內要大於或等於 0，且最大為 25（ $x = -1$ 時），所以 $0 \leq 24 - 2x - x^2 \leq 25$ ，並且 0 到 25 之間的每個值都取得到（ x 從 -1 到 4 時， $25 - (x+1)^2$ 由 25 連續變到 0）。開根號得 $0 \leq f(x) \leq 5$ ，值域為 $\{y \in R \mid 0 \leq y \leq 5\}$ 。

17 首項 1、公比 $-\frac{1}{2}$ ： $S = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ ， $S_n = \frac{1 - (-\frac{1}{2})^n}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ 。 $|S - S_n| = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{10000}$ ，即 $2^n > \frac{20000}{3}$ 。取常用對數： $n \log 2 > \log 20000 - \log 3 = (4 + 0.3010) - 0.4771 = 3.8239$ ， $n > \frac{3.8239}{0.3010} \approx 12.7$ 。最小自然數 $n = 13$ 。

直接檢查： $\frac{20000}{3} \approx 6666.7$ ， $2^{12} = 4096$ 不夠， $2^{13} = 8192$ 夠。

18 超過 1.5 公里的部分是 $x - 1.5$ 公里，每 0.25 公里一段、不足一段以一段計，段數是「大於或等於 $\frac{x - 1.5}{0.25}$ 的最小整數」，也就是 $-\left[\frac{1.5 - x}{0.25}\right] = -\left[\frac{15 - 10x}{2.5}\right]$ 。所以 $f(x) = 85 + 5 \times \left(-\left[\frac{15 - 10x}{2.5}\right]\right) = 85 - 5 \times \left[\frac{15 - 10x}{2.5}\right]$ ， $a = 15$ 。 $f(x) = 500$ 時 $\left[\frac{15 - 10x}{2.5}\right] = -83$ ，即 $-\frac{15 - 10x}{2.5} < -82$ ， $-207.5 \leq 15 - 10x < -205$ ， $22 < x \leq 22.25$ 。最多可搭乘 $b = 22.25$ 公里。
 $(a, b) = (15, 22.25)$ 。

用題意檢查：500 - 85 = 415 元是 83 段，每段 0.25 公里共 20.75 公里， $1.5 + 20.75 = 22.25$ 。「無條件進位」用高斯符號寫是 $-\lceil -t \rceil$ ，所以式子裡是減號配上 $a - 10x$ 。

19 一次抽兩張，點數相同的機率：13 種點數各有 $C_2^4 = 6$ 種取法， $p = \frac{13 \times 6}{C_2^{52}} = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$ ；點數不同的機率 $q = \frac{16}{17}$ 。每次抽後放回，各次獨立。甲在第 1, 3, 5, ... 次抽牌時成功： $p + q^2p + q^4p + \cdots$ ，這是首項 $\frac{1}{17}$ 、公比 $q^2 = \frac{256}{289}$ 的無窮等比級數，和為 $\frac{\frac{1}{17}}{1 - \frac{256}{289}} = \frac{1}{17} \cdot \frac{289}{33} = \frac{17}{33}$ 。

也可以設甲成功的機率為 P ：甲第一次就成功（ $\frac{1}{17}$ ），或甲、乙都沒成功後回到原狀， $P = \frac{1}{17} + \left(\frac{16}{17}\right)^2 P$ ，解得 $P = \frac{17}{33}$ 。



20 每次右轉 90° ，方向依序為上、右、下、左、上、...，距離依序為 $6, 4, \frac{8}{3}, \frac{16}{9}, \frac{32}{27}, \dots$ （每次乘以 $\frac{2}{3}$ ）。 x 坐標只在向右、向左時改變： $4 - \frac{16}{9} + \frac{64}{81} - \dots$ ，首項 4 、公比 $-\frac{4}{9}$ ，和為 $\frac{4}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{36}{13}$ 。 y 坐標只在向上、向下時改變： $6 - \frac{8}{3} + \frac{32}{27} - \dots$ ，首項 6 、公比 $-\frac{4}{9}$ ，和為 $\frac{6}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{54}{13}$ 。所以 $A\left(\frac{36}{13}, \frac{54}{13}\right)$ 。

同一個坐標方向上，相鄰兩次移動中間隔了一次別的方向，所以距離是乘以 $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ ，而且方向相反，公比是 $-\frac{4}{9}$ 。

情境題先把規律寫成等比級數：找出首項與公比，確認公比的絕對值小於 1 再求和。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自臺南二中 114 學年度上學期高三第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tnssh-114a-g12jia-1