

新化高中 114 學年度上學期 高一第一次段考



御藍教育

範圍：數與式（實數與根式、絕對值與數線、指數與算幾不等式、常用對數） · 單選題 7 題、多重選擇題 5 題、填充題 12 題共 13 格；流傳版本未印各題配分

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/tnhhsh-114a-g10-1

一、單選題

- 1 設數線上有三點 $A(-2)$ 、 $B(8)$ 、 $P(x)$ ，其中 $P(x)$ 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 3$ ，求 P 點坐標 $x =$?

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

- 2 計算 $\log 1 + \log 100 + 10^{\log 3} = ?$

- (A) 5
- (B) 6
- (C) 7
- (D) 8
- (E) 9

- 3 選出「正確」者：

- (A) $0.\overline{39} \neq \frac{13}{33}$
- (B) $0.3\overline{9} \neq 0.4$
- (C) $\frac{0.\overline{5}}{0.\overline{2}} \neq \frac{5}{2}$
- (D) $0.\overline{7} + 0.\overline{3} \neq 1$
- (E) $0.\overline{7} \times 0.\overline{3} \neq \frac{7}{27}$



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tnhhsh-114a-g10-1

4 求絕對值不等式 $1 \leq |2x + 3| < 11$ 之「整數解」有幾個？

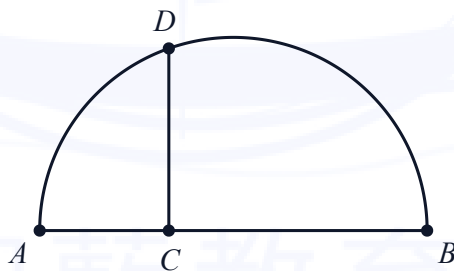
- (A) 8
- (B) 9
- (C) 10
- (D) 11
- (E) 12

5 已知不等式 $|ax + 2| \leq b$ 的解落在區間 $[-3, 7]$ ，求 $a + b = ?$

- (A) 2
- (B) 4
- (C) 6
- (D) 8
- (E) 10

6 如右圖（僅供參考，不代表實際大小）， $\overline{AC} = 2$ 、 $\overline{BC} = 4$ ，以 $\overline{AB}$ 為直徑作一半圓，過 C 作 $\overline{AB}$ 垂直線交半圓於 D ，若 $\overline{CD}$ 的長度範圍為： $\frac{k}{9} < \overline{CD} < \frac{k+1}{9}$ ， k 為正整數，求 $k = ?$ ($\sqrt{2} \approx 1.414$)

- (A) 21
- (B) 22
- (C) 23
- (D) 24
- (E) 25



7 設 a 、 b 為實數，且滿足 $100^a \times 27^b = 5$ ， $1000^a \times 9^b = 10$ ，求 a 的值最接近下列何者？($\log 2 \approx 0.301$)

- (A) 0.32
- (B) 0.42
- (C) 0.52
- (D) 0.62
- (E) 0.72



二、多重選擇題（錯一個選項得題分的一半）（本頁第 8~12 題依序為原卷多重選擇題第 1~5 題）

8 選出正確者：

- (A) $(2x + y)^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$
(B) $\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} = x + y$
(C) $(x + 2y - z)^2 = x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 4yz - 2xz$
(D) $0.\overline{12345}$ 的小數點後第 47 位數字為 2
(E) 若 $a + 2b$ 與 $b + 2a$ 皆為有理數，則 a 、 b 必皆為有理數

9 選出正確者：

- (A) $(3 - \sqrt{5})^{\frac{1}{2}} (3 + \sqrt{5})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
(B) 設 x 、 y 皆正實數，當 $\frac{3x + 4y}{2} = \sqrt{12xy}$ 時，則 $\frac{x}{y} > 1$
(C) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{7}}{3} < \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{7}}{5}$
(D) $\sqrt{3} - \sqrt{2} < \sqrt{6} - \sqrt{5}$
(E) $\sqrt{5} + \sqrt{11} < \sqrt{6} + \sqrt{10}$

10 已知 x 、 y 均為實數，且 $-3 \leq x \leq 2$ ， $3 \leq y \leq 5$ ，請選出正確者：

- (A) $0 \leq x + y \leq 7$
(B) $-9 \leq x - 2y \leq -8$
(C) $-9 \leq xy \leq 10$
(D) $4 \leq x^2 \leq 9$
(E) $-1 \leq \frac{x}{y} \leq \frac{2}{3}$

11 已知 $t = \log 6$ ，則下列何者正確：

- (A) $10^{2t} = 60$
(B) $100^{-t} = \frac{1}{36}$
(C) $\log 10^t = 6$
(D) 若 $10^{0.301} \approx 2$ ， $10^{0.4771} \approx 3$ ，則 $t \approx 0.7781$
(E) $\frac{1}{t} = \left(\frac{1}{10}\right)^{\log t}$



12 設 $a = 2^{0.4}$ ， $b = 2^{0.02}$ ， $10^{0.301} \approx 2$ ，請選出正確選項：

(A) $a^5 = 20$

(B) $a = b^{20}$

(C) $ab^5 = \sqrt{2}$

(D) a^{100} 為 12 位數

(E) $\log a < 0.1$

三、填充題 (本頁第 13~25 題依序為原卷填充題第 1、2、3、4、5(1)、5(2)、6、7、8、9、10、11、12 題)

13 計算 $(4 \times 10^6) - (6 \times 10^5) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(答案以科學記號表示)

14 若 $\log a = -0.5$ ，且 $b = \sqrt{10}a$ ，求 $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15 設 x 是實數且滿足 $|-2x + 3| = 11$ ，則 x 的值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(兩解)

16 $(0.01)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^6}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

填充題第 5 題 設 $x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ ，試求：

17 (1) $x + \frac{1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

18 (2) $x^3 + \frac{1}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 19 小君想要用鐵絲網沿著筆直的河岸圍出一個矩形菜園（如右圖），希望圍出的矩形面積恰為 800 平方公尺，且只圍三邊（河岸那一邊不圍），試問最少需要 _____ 公尺的鐵絲網才能達成。



- 20 已知 $9^x = 10$ ，試求 $\log 27^x =$ _____。

- 21 做實驗時，發現某種細菌的數量，每過 3 日後會增加為原來的 a 倍，已知實驗一開始放入若干量的細菌後，在經過 4 日後細菌數已變為原來的 9 倍，求 $a =$ _____。

- 22 設 x 、 y 是不為 0 的實數，若 $117^x = 9$ ， $13^y = 3$ ，求 $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} =$ _____。

- 23 已知數線上有三點，其坐標分別為 $P(x)$ 、 $A\left(\frac{-3}{2}\right)$ 、 $B(2)$ ，若 A 、 P 兩點距離的兩倍再加上 B 、 P 兩點的距離後恰為 10（單位），請問點 P 的坐標為 _____。（兩解）

- 24 設 a 為 $\sqrt{48}$ 的小數部分，且 m 、 n 為非零之有理數，若 $(13 + a)^{\frac{1}{2}} = m + n\sqrt{3}$ ，求數對 $(m, n) =$ _____。

- 25 設 a 為正實數， $a + a^{-1} = 3$ ，求 $\frac{a^3 + a^{-3}}{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}} =$ _____。





御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/tnhhsh-114a-g10-1

答案一覽

- 第 1 題 (B)
第 2 題 (A)
第 3 題 (D)
第 4 題 (C)
第 5 題 (B)
第 6 題 (E)
第 7 題 (A)
第 8 題 (A)(C)(D)(E)
第 9 題 (B)(C)(E)
第 10 題 (A)(E)
第 11 題 (B)(D)(E)
第 12 題 (B)(C)
第 13 題 3.4×10^6
第 14 題 1
第 15 題 -4 或 7
第 16 題 $10\sqrt{3}$
第 17 題 10
第 18 題 970
第 19 題 80
第 20 題 $\frac{3}{2}$
第 21 題 $3\sqrt{3}$
第 22 題 2
第 23 題 $-\frac{11}{3}$ 或 3
第 24 題 (2, -1)
第 25 題 $\frac{18\sqrt{5}}{5}$



對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)

單選 1~4：分點、log 的意義、循環小數、絕對值不等式

- 1 答案 (B)。 $\overline{AB} = 8 - (-2) = 10$ ， P 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 3$ ，所以 $\overline{AP} = 10 \times \frac{2}{5} = 4$ ， $x = -2 + 4 = 2$ 。用分點公式也一樣： $x = \frac{3 \times (-2) + 2 \times 8}{2 + 3} = \frac{10}{5} = 2$ 。
分點公式的係數是交叉乘：離 A 的份數 2 乘在 B 的坐標上。
- 2 答案 (A)。 $1 = 10^0$ ，所以 $\log 1 = 0$ ； $100 = 10^2$ ，所以 $\log 100 = 2$ ； $\log 3$ 是「10 的幾次方等於 3」的那個指數，所以 $10^{\log 3} = 3$ 。相加得 $0 + 2 + 3 = 5$ 。
- 3 答案 (D)。把循環小數化成分數再判斷。(A) $0.\overline{39} = \frac{39}{99} = \frac{13}{33}$ ，兩邊相等，寫 $\neq$ 不正確。(B) $0.\overline{39} = 0.3 + 0.0\overline{9} = 0.3 + 0.1 = 0.4$ ，相等，不正確。(C) $\frac{0.5}{0.2} = \frac{5/9}{2/9} = \frac{5}{2}$ ，相等，不正確。(D) $0.\overline{7} + 0.\overline{3} = \frac{7}{9} + \frac{3}{9} = \frac{10}{9} \neq 1$ ，正確。(E) $\frac{7}{9} \times \frac{3}{9} = \frac{21}{81} = \frac{7}{27}$ ，相等，不正確。
五個選項都寫「 $\neq$ 」，所以要選的是「兩邊真的不相等」的那一個。 $0.\overline{9} = 1$ ，所以 $0.0\overline{9} = 0.1$ 。
- 4 答案 (C)。先看右半 $|2x + 3| < 11$ ： $-11 < 2x + 3 < 11$ ， $-7 < x < 4$ ，整數有 $-6, -5, \dots, 3$ 共 10 個。再看左半 $|2x + 3| \geq 1$ ： $2x + 3 \geq 1$ 或 $2x + 3 \leq -1$ ，即 $x \geq -1$ 或 $x \leq -2$ ，被排除的只有 $-2 < x < -1$ ，這段裡沒有整數。所以整數解是 -6 到 3 ，共 10 個。
 x 是整數時 $2x + 3$ 一定是奇數， $|2x + 3|$ 最小就是 1，所以左半的條件不會再刪掉任何整數。

單選 5~7：由解回推係數、半圓上的垂線、指數聯立

- 5 答案 (B)。解是 $-3 \leq x \leq 7$ ，中點是 2，中點到端點的距離是 5，所以解可以寫成 $|x - 2| \leq 5$ ，也就是 $|-x + 2| \leq 5$ 。和 $|ax + 2| \leq b$ 對照 (常數項要是 +2)，得 $a = -1$ 、 $b = 5$ ， $a + b = 4$ 。驗算： $|-x + 2| \leq 5$ 即 $-5 \leq -x + 2 \leq 5$ ， $-3 \leq x \leq 7$ 。
這裡把「解落在區間 $[-3, 7]$ 」讀成「解就是 $-3 \leq x \leq 7$ 」。 $|x - 2|$ 和 $|-x + 2|$ 相等，要配合題目的「+2」選後者，所以 a 是負的。
- 6 答案 (E)。 $\overline{AB} = 2 + 4 = 6$ ，半圓的圓心 O 是 $\overline{AB}$ 的中點，半徑 3。 $\overline{AO} = 3$ 、 $\overline{AC} = 2$ ，所以 $\overline{OC} = 1$ 。 D 在半圓上， $\overline{OD} = 3$ ，直角三角形 OCD 中 $\overline{CD} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.828$ 。 $9 \times 2.828 = 25.452$ ，所以 $\frac{25}{9} < \overline{CD} < \frac{26}{9}$ ， $k = 25$ 。
也可以用國中學過的結論：直徑所對的圓周角是直角， $\triangle ACD$ 與 $\triangle DCB$ 相似， $\overline{CD}^2 = \overline{AC} \times \overline{BC} = 8$ 。不用小數也能確認： $\left(\frac{25}{9}\right)^2 = \frac{625}{81} < 8 < \frac{676}{81} = \left(\frac{26}{9}\right)^2$ 。



- 7 答案 (A)。兩式寫成 $10^{2a} \times 3^{3b} = 5$ 、 $10^{3a} \times 3^{2b} = 10$ 。為了消去 3 的次方，第一式平方、第二式立方： $10^{4a} \times 3^{6b} = 25$ ， $10^{9a} \times 3^{6b} = 1000$ 。兩式相除得 $10^{5a} = \frac{1000}{25} = 40$ 。由 $\log 2 \approx 0.301$ 知 $2 \approx 10^{0.301}$ ，所以 $40 = 2^2 \times 10 \approx 10^{0.602} \times 10 = 10^{1.602}$ ， $5a \approx 1.602$ ， $a \approx 0.3204$ ，最接近 0.32。

兩個未知數都在指數上時，把兩式各自乘方，讓其中一個底數的次方相同再相除，就能消掉一個。

絕對值不等式 $|x - c| \leq r$ 的解是以 c 為中心、 r 為半徑的區間；反過來，看到解的區間就先找中點和半徑。

多重選擇 1~3 (第 8~10 題)：乘法公式、根式比較、不等式的範圍

- 8 答案 (A)(C)(D)(E)。(A) 對： $(2x + y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2y + 3(2x)y^2 + y^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$ 。
 (B) 錯： $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ ，中間是 $-xy$ ；取 $x = y = 1$ ，左邊是 $\frac{2}{3}$ ，右邊是 2。(C) 對： $(x + 2y - z)^2 = x^2 + 4y^2 + z^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + 2 \cdot 2y \cdot (-z) + 2 \cdot x \cdot (-z)$ ，就是右式。(D) 對：循環節 12345 有 5 位， $47 = 5 \times 9 + 2$ ，第 47 位是循環節的第 2 個數字 2。(E) 對：設 $a + 2b = p$ 、 $b + 2a = q$ 都是有理數，兩式相加得 $a + b = \frac{p+q}{3}$ ，所以 $a = q - (a + b) = \frac{2q-p}{3}$ 、 $b = p - (a + b) = \frac{2p-q}{3}$ 都是有理數。

(B) 的分母若是 $x^2 - xy + y^2$ 才會約成 $x + y$ 。(E) 能成立是因為由這兩個式子可以把 a 、 b 各自解出來。

- 9 答案 (B)(C)(E)。(A) 錯： $[(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})]^{\frac{1}{2}} = (9 - 5)^{\frac{1}{2}} = 2$ ，不是 $\sqrt{2}$ 。(B) 對：由算幾不等式 $\frac{3x+4y}{2} \geq \sqrt{3x \cdot 4y} = \sqrt{12xy}$ ，等號成立時 $3x = 4y$ ，所以 $\frac{x}{y} = \frac{4}{3} > 1$ 。(C) 對：兩邊同乘 15，比較 $10\sqrt{3} + 5\sqrt{7}$ 與 $9\sqrt{3} + 6\sqrt{7}$ ，後者減前者是 $\sqrt{7} - \sqrt{3} > 0$ 。(D) 錯： $\sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ ， $\sqrt{6} - \sqrt{5} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$ ；分母 $\sqrt{3} + \sqrt{2} < \sqrt{6} + \sqrt{5}$ ，所以 $\sqrt{3} - \sqrt{2} > \sqrt{6} - \sqrt{5}$ 。(E) 對：兩邊都是正數，平方後左邊 $16 + 2\sqrt{55}$ 、右邊 $16 + 2\sqrt{60}$ ，左邊較小。

(C) 的兩個數都是數線上 $\sqrt{3}$ 與 $\sqrt{7}$ 之間的分點， $\sqrt{7}$ 的比重分別是 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{5}$ ，比重大的比較靠近 $\sqrt{7}$ 。(D) 兩個相鄰根號的差，數越大差越小。

- 10 答案 (A)(E)。(A) 對： $-3 + 3 \leq x + y \leq 2 + 5$ ，即 $0 \leq x + y \leq 7$ 。(B) 錯： $-10 \leq -2y \leq -6$ ，所以 $-13 \leq x - 2y \leq -4$ ；例如 $x = 2$ 、 $y = 3$ 時 $x - 2y = -4$ 。(C) 錯： y 是正的， $x = -3$ 、 $y = 5$ 時 $xy = -15$ 最小， $x = 2$ 、 $y = 5$ 時 $xy = 10$ 最大，範圍是 $-15 \leq xy \leq 10$ 。(D) 錯： x 可以是 0， $0 \leq x^2 \leq 9$ 。(E) 對： x 為負時 $\frac{x}{y}$ 在 $x = -3$ 、 $y = 3$ 時最小，是 -1 ； x 為正時在 $x = 2$ 、 $y = 3$ 時最大，是 $\frac{2}{3}$ 。

x 的範圍有正有負時，乘、除、平方都不能直接把兩端代進去，要看哪一組 x 、 y 讓結果最大或最小。

多重選擇 4~5 (第 11~12 題)：log 的意義、指數律與位數

- 11 答案 (B)(D)(E)。 $t = \log 6$ 表示 $10^t = 6$ 。(A) 錯： $10^{2t} = (10^t)^2 = 36$ 。(B) 對： $100^{-t} = 10^{-2t} = \frac{1}{36}$ 。(C) 錯： $\log 10^t = t = \log 6$ ，不是 6。(D) 對： $6 = 2 \times 3 \approx 10^{0.301} \times 10^{0.4771} = 10^{0.7781}$ ，所以 $t \approx 0.7781$ 。(E) 對： $t > 0$ ， $10^{\log t} = t$ ，所以 $\left(\frac{1}{10}\right)^{\log t} = (10^{\log t})^{-1} = \frac{1}{t}$ 。

$\log 10^t = t$ 、 $10^{\log t} = t$ 這兩個式子都只是 $\log$ 的定義；(C) 把 t 和 10^t 弄混了。



- 12 答案 (B)(C)。 (A) 錯： $a^5 = 2^{0.4 \times 5} = 2^2 = 4$ 。 (B) 對： $b^{20} = 2^{0.02 \times 20} = 2^{0.4} = a$ 。 (C) 對： $ab^5 = 2^{0.4} \times 2^{0.1} = 2^{0.5} = \sqrt{2}$ 。 (D) 錯： $a^{100} = 2^{40} \approx (10^{0.301})^{40} = 10^{12.04}$ ，介於 10^{12} 和 10^{13} 之間，是 13 位數。 (E) 錯： $a = 2^{0.4} \approx 10^{0.301 \times 0.4} = 10^{0.1204}$ ， $\log a \approx 0.1204 > 0.1$ 。
 10^{12} 本身就是 13 位數，所以 $10^{12.04}$ 是 13 位數：位數是指數的整數部分再加 1。

$t = \log N$ 和 $10^t = N$ 是同一件事。看到 $\log$ 就先改寫成 10 的次方，再用指數律處理。

填充 1~5 (第 13~18 題)：科學記號、絕對值方程式、指數與根式化簡

- 13 把兩數化成同一個次方： $6 \times 10^5 = 0.6 \times 10^6$ ，所以 $(4 \times 10^6) - (6 \times 10^5) = (4 - 0.6) \times 10^6 = 3.4 \times 10^6$ 。檢查： $4000000 - 600000 = 3400000$ 。
 科學記號 $a \times 10^n$ 要求 $1 \leq a < 10$ ，3.4 符合。
- 14 $\log a = -0.5$ 表示 $a = 10^{-0.5}$ 。 $b = \sqrt{10} \times a = 10^{0.5} \times 10^{-0.5} = 10^0 = 1$ 。
- 15 $|-2x + 3| = 11$ 表示 $-2x + 3 = 11$ 或 $-2x + 3 = -11$ 。前者 $x = -4$ ，後者 $x = 7$ 。驗算： $|8 + 3| = 11$ 、 $|-14 + 3| = 11$ 。
- 16 三項分別化簡： $(0.01)^{-\frac{1}{2}} = (10^{-2})^{-\frac{1}{2}} = 10$ ； $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ； $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^6}} = 2^{6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ 。相乘： $10 \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{3}$ 。
- 17 (1) 分母有理化： $x = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{5 - 2\sqrt{6}}{1} = 5 - 2\sqrt{6}$ 。 $\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ 。所以 $x + \frac{1}{x} = 10$ 。
- 18 (2) $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 10^3 - 3 \times 10 = 970$ 。
 $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ ，這裡 $ab = x \cdot \frac{1}{x} = 1$ 。

填充 6~9 (第 19~22 題)：算幾不等式、指數律的應用

- 19 設垂直河岸的兩邊各長 x 公尺、平行河岸的一邊長 y 公尺 ($x > 0, y > 0$)，則 $xy = 800$ ，鐵絲網長 $2x + y$ 。由算幾不等式 $\frac{2x + y}{2} \geq \sqrt{2x \cdot y} = \sqrt{1600} = 40$ ，所以 $2x + y \geq 80$ 。等號在 $2x = y$ 時成立，即 $x = 20$ 、 $y = 40$ (面積 $20 \times 40 = 800$)，所以最少需要 80 公尺。
 要用算幾不等式的兩個數是 $2x$ 和 y (它們的和是所求、積是定值 1600)，不是 x 和 y 。
- 20 $9^x = 3^{2x} = 10$ ，所以 $3^x = 10^{\frac{1}{2}}$ 。 $27^x = (3^x)^3 = 10^{\frac{3}{2}}$ ， $\log 27^x = \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$ 。
- 21 設細菌數每過 1 日變為原來的 r 倍 ($r > 0$)。每過 3 日變為 a 倍，所以 $a = r^3$ ；經過 4 日變為 9 倍，所以 $r^4 = 9$ ， $r = 9^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}}$ 。 $a = r^3 = 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$ 。
 也可以直接寫：經過 4 日是 $\frac{4}{3}$ 個「3 日」， $a^{\frac{4}{3}} = 9$ ， $a = 9^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{2}}$ 。這題假設細菌數隨時間以固定倍率成長。



- 22 把兩式都化成以 3 為底。 $117^x = 9 = 3^2$ ，兩邊取 $\frac{1}{x}$ 次方： $117 = 3^{\frac{2}{x}}$ 。 $13^y = 3$ ，兩邊取 $\frac{1}{y}$ 次方： $13 = 3^{\frac{1}{y}}$ 。兩式相除： $3^{\frac{2}{x} - \frac{1}{y}} = \frac{117}{13} = 9 = 3^2$ ，所以 $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 2$ 。
關鍵是 $117 = 9 \times 13$ 。所求是 $\frac{2}{x} - \frac{1}{y}$ ，所以把 $x、y$ 移到另一邊的指數上，再用相除變成指數相減。

算幾不等式求極值：先確認「和」與「積」哪一個是定值，再挑出那兩個正數；最後一定要檢查等號成立的條件做得到。

填充 10~12 (第 23~25 題)：兩個絕對值、雙重根號、對稱式

- 23 條件是 $2\left|x + \frac{3}{2}\right| + |x - 2| = 10$ ，即 $|2x + 3| + |x - 2| = 10$ 。以 $-\frac{3}{2}、2$ 分三段。 $x \geq 2$ 時： $(2x + 3) + (x - 2) = 10$ ， $x = 3$ ，在這一段內，合。 $-\frac{3}{2} \leq x < 2$ 時： $(2x + 3) - (x - 2) = 10$ ， $x = 5$ ，不在這一段內，不合。 $x < -\frac{3}{2}$ 時： $-(2x + 3) - (x - 2) = 10$ ， $x = -\frac{11}{3}$ ，在這一段內，合。所以 P 的坐標是 3 或 $-\frac{11}{3}$ 。
每一段解出來的 x 都要檢查是否落在那一段裡。驗算 $x = -\frac{11}{3}$ ： $\overline{AP} = \frac{13}{6}$ 、 $\overline{BP} = \frac{17}{3}$ ， $2 \times \frac{13}{6} + \frac{17}{3} = 10$ 。
- 24 $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ ， $6^2 = 36 < 48 < 49 = 7^2$ ，整數部分是 6，所以 $a = 4\sqrt{3} - 6$ 。 $13 + a = 7 + 4\sqrt{3} = 7 + 2\sqrt{12}$ ，找兩數和 7、積 12：4 和 3，所以 $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$ 。 $(13 + a)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3}$ 。 $m、n$ 是有理數， $\sqrt{3}$ 是無理數，比較得 $m = 2、n = -1$ 。
 $-\frac{1}{2}$ 次方是「開根號再取倒數」。
- 25 分子： $a^3 + a^{-3} = (a + a^{-1})^3 - 3(a + a^{-1}) = 27 - 9 = 18$ 。分母： $(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 = a + 2 + a^{-1} = 5$ ，而 $a > 0$ 時 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} > 0$ ，所以分母是 $\sqrt{5}$ 。所求 $= \frac{18}{\sqrt{5}} = \frac{18\sqrt{5}}{5}$ 。
流傳版本的參考答案寫 $\frac{18}{\sqrt{5}}$ ，與 $\frac{18\sqrt{5}}{5}$ 是同一個數，這裡化成分母有理化後的形式。

已知 $a + a^{-1}$ 求其他對稱式：平方可以得到 $a^2 + a^{-2}$ ，立方可以得到 $a^3 + a^{-3}$ ；要求 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$ 就先算它的平方。



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自新化高中 114 學年度上學期高一第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tnhhsh-114a-g10-1