

臺南女中 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數與指數函數（弧度量、三角函數的圖形、和差角與倍角半角公式、正餘弦的疊合、指數函數的圖形與方程式） · 單選題 5 題（25 分）、多選題 6 題（30 分）、填充題 9 題（45 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/tngs-114a-g11a-1

一、單選題（占 25 分） | 說明：第 1 題至第 5 題，每題 5 分。

1 對任意實數 x 而言， $32^{x^2+\frac{4}{x}}$ 的最小值為何？

- (1) 4
- (2) 8
- (3) 16
- (4) $16\sqrt{2}$
- (5) 32

2 若 $\triangle ABC$ 中， $\tan \frac{A}{2} = \frac{1}{4}$ ， $\tan B = \frac{1}{3}$ ，則 $\tan C$ 的值最接近下列哪一個選項？

- (1) -1
- (2) -2
- (3) -3
- (4) 1
- (5) 2

3 求 $a = \sin 1.5$ ， $b = \sin 3$ ， $c = \sin 4.5$ ， $d = \sin 6$ 的大小關係為下列哪一個選項？

- (1) $a > b > c > d$
- (2) $a > c > b > d$
- (3) $b > d > c > a$
- (4) $d > c > a > b$
- (5) $a > b > d > c$

4 已知 $-\pi \leq x \leq 3\pi$ ，試求方程式 $\tan x = \frac{\pi}{360}x$ 恰有幾個實數解？

- (1) 6
- (2) 5
- (3) 4
- (4) 3
- (5) 2



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tngs-114a-g11a-1

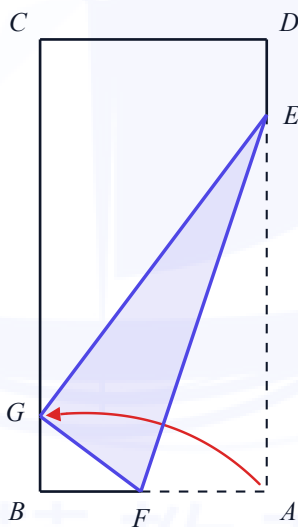
5 下列哪一個選項數值最大？

- (1) $\cos 46^\circ + \sqrt{3} \sin 46^\circ$
- (2) $\cos 66^\circ + \sqrt{3} \sin 66^\circ$
- (3) $\cos 76^\circ + \sqrt{3} \sin 76^\circ$
- (4) $\cos 86^\circ + \sqrt{3} \sin 86^\circ$
- (5) $\cos 96^\circ + \sqrt{3} \sin 96^\circ$

二、多選題（占 30 分） | 說明：第 6 題至第 11 題，每題 5 分。（5-3-1-0）

6 如圖，將矩形紙張 $ABCD$ 的右下角沿 $\overline{EF}$ 摺起，恰使得 A 點落在 $\overline{BC}$ 邊的 G 點上，已知 $\overline{AF} = 10$ ， $\overline{BF} = 8$ ，已知 $\angle AEF = \theta$ ， $\overline{DE} : \overline{AE} = 1 : 5$ ，則下列選項何者正確？

- (1) $\angle BFG = \theta$
- (2) $\cos \theta = \frac{4}{5}$
- (3) $\tan \theta = \frac{3}{4}$
- (4) $\cos 2\theta = \frac{4}{5}$
- (5) $\overline{AD} = 36$



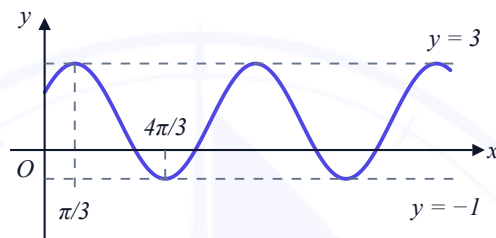
7 若 θ 為第四象限角，且 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ ，則下列選項何者正確？

- (1) $\tan 2\theta = -\frac{7}{24}$
- (2) $\sin 2\theta = -\frac{24}{25}$
- (3) 2θ 為第四象限角
- (4) $\frac{\theta}{2}$ 為第二象限角
- (5) $\cos \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$



8 圖是函數 $y = a \sin x + b \cos x + c$ 圖形的一部分，則下列選項何者正確？

- (1) 函數週期為 π
- (2) $a = \sqrt{3}$
- (3) $b = -1$
- (4) $x = \frac{11\pi}{3}$ 為圖形的對稱軸
- (5) 圖形通過 $\left(\frac{7\pi}{12}, \sqrt{2} + 1\right)$



9 已知坐標平面上函數圖形 $y = 5^x$ ，標示 A 、 B 、 C 三個點，其 x 坐標分別為 3、1、-1。則下列選項何者正確？

- (1) 函數圖形與任一水平線 $y = k$ 都恰有一交點
- (2) B 點位於 $\overline{AC}$ 中點的上方
- (3) 在直線 AB 、直線 BC 中，以直線 AB 的斜率最大
- (4) 函數圖形 $y = 5^x$ 與 $y = 5^{-x}$ 對稱原點
- (5) 函數圖形 $y = x^2$ 與 $y = 5^x$ 有三個交點

10 令 Γ 為坐標平面上 $y = \cos \pi x$ 在 $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$ 的函數圖形。一水平直線 $L: y = k$ 與 Γ 相交，其中三交點 $P(x_1, k)$ 、 $Q(x_2, k)$ 、 $R(x_3, k)$ 滿足 $0 < x_1 < 1 < x_2 < x_3$ 。則下列選項何者正確？

- (1) $k > 0$
- (2) L 與 Γ 恰有 3 個交點
- (3) $x_1 + x_2 \geq 2$
- (4) 若 $\overline{PQ} = 5\overline{QR}$ ，則 $k = \frac{1}{2}$
- (5) L 與 Γ 所有交點的 x 坐標之和大於 5

11 設 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 3$ ， $0 \leq x \leq \pi$ ，則下列選項何者正確？

- (1) $f(x)$ 的振幅為 5
- (2) $f(x)$ 的週期為 2π
- (3) 當 $x = \pi$ 時， $f(x)$ 有最小值 -1
- (4) 當 $x = \frac{\pi}{3}$ 時， $f(x)$ 有最大值 5
- (5) $f(x)$ 的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形經過平移而得



三、填充題（占 45 分） | 說明：第 12 題至第 20 題，每題 5 分。

- 12 一扇形的周長為 24，圓心角為 θ 時，有最大面積為 M ，則 $(\theta, M) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 13 已知 $1 \leq \theta \leq 10$ ，且 θ 為正整數。則能滿足不等式 $\cos \theta \leq 0$ 且 $\sin 2\theta \leq 0$ 的所有弧度 θ 總和為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 14 求函數 $f(x) = 2^{2x+1} + 1$ 與 $g(x) = 33 \times 2^{x-2}$ 的圖形在第二象限的交點坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 15 已知 $0 \leq x \leq 2\pi$ ，滿足不等式 $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ 的所有區間長度總和為 a ，滿足不等式 $\sin x \leq \frac{1}{2}$ 的所有區間長度總和為 b ，則 $\frac{a}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 16 設 $-1 \leq x \leq 1$ ，若函數 $f(x) = -3 \times 4^x + 2^{x+2}$ 的最大值為 a ，最小值為 b ，則 $a - b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

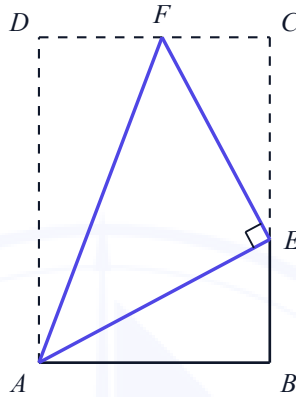
- 17 已知 $0 < x < \pi$ ，且不等式 $\sin 2x \leq \sqrt{3} \sin x$ 的解為 $\alpha\pi \leq x < \beta\pi$ ，則 $\beta - \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION

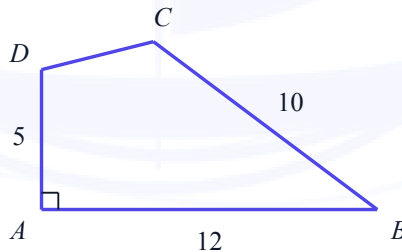


- 18 如圖，有一直角三角形 AEF 內接於矩形 $ABCD$ 中，且 E 、 F 分別在 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 上， $\angle AEF = 90^\circ$ ， $\overline{AE} = 8$ ， $\overline{EF} = 7$ ，令 $\angle BAE = \theta$ ，則當 $\overline{AB} = a$ 時，矩形 $ABCD$ 的周長有最大值 b ，求數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 19 已知 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AC} = 12$ ， $\overline{BC} = 18$ ， $2\angle CBA = \angle CAB$ ，則 $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 20 有一個凸四邊形 $ABCD$ ，已知 $\overline{BC} = 10$ ， $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{AD} = 5$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，而 $\cos \angle ABC = \frac{4}{5}$ ，則 $\triangle BCD$ 面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/tngs-114a-g11a-1

答案一覽

- 第 1 題 (3)
第 2 題 (1)
第 3 題 (5)
第 4 題 (4)
第 5 題 (2)
第 6 題 (4)(5)
第 7 題 (2)(3)
第 8 題 (2)(5)
第 9 題 (3)
第 10 題 (1)(3)
第 11 題 (2)(4)
第 12 題 (2, 36)
第 13 題 22
第 14 題 $\left(-3, \frac{33}{32}\right)$
第 15 題 $\frac{1}{2}$
第 16 題 $\frac{16}{3}$
第 17 題 $\frac{5}{6}$
第 18 題 $\left(\frac{120}{17}, 34\right)$
第 19 題 15
第 20 題 16

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。（不用註冊）
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit（可以先把姓名、座號遮掉）



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練
網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tngs-114a-g11a-1

單選題 1~5：指數最小值、正切公式、弧度比大小、交點個數、疊合

1 答案 (3)。底數 $32 > 1$ ， $y = 32^t$ 是遞增函數，所以指數越小、函數值越小。 $x^2 \geq 0$ ，指數 $x^2 + \frac{4}{5}$ 的最小值是 $\frac{4}{5}$ ($x = 0$ 時)。最小值為 $32^{\frac{4}{5}} = (2^5)^{\frac{4}{5}} = 2^4 = 16$ 。

2 答案 (1)。先用倍角公式求 $\tan A$ ： $\tan A = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{8}{15}$ 。再用和角公式： $\tan(A + B) = \frac{\frac{8}{15} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{13}{15}}{\frac{37}{45}} = \frac{39}{37}$ 。因為 $C = 180^\circ - (A + B)$ ，所以 $\tan C = -\tan(A + B) = -\frac{39}{37} \approx -1.05$ ，最接近 -1 。

題目給的是 $\tan \frac{A}{2}$ ，不是 $\tan A$ ；直接把 $\frac{1}{4}$ 當 $\tan A$ 代入會得到 $-\frac{7}{11}$ 。

3 答案 (5)。取 $\pi \approx 3.14$ ： $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ ， $\frac{3\pi}{2} \approx 4.71$ ， $2\pi \approx 6.28$ 。1.5 在第一象限且很接近 $\frac{\pi}{2}$ ， a 接近 1。3 在第二象限， $b = \sin 3 = \sin(\pi - 3) \approx \sin 0.14$ ，是很小的正數，所以 $a > b > 0$ 。4.5 在第三象限， $c = -\sin(4.5 - \pi) \approx -\sin 1.36$ ；6 在第四象限， $d = -\sin(2\pi - 6) \approx -\sin 0.28$ 。0 $< 0.28 < 1.36 < \frac{\pi}{2}$ ，正弦在這段遞增， $\sin 0.28 < \sin 1.36$ ，所以 $0 > d > c$ 。故 $a > b > d > c$ 。

沒有寫度的符號就是弧度；把四個數都換成第一象限的同界角或參考角再比。

4 答案 (4)，恰有 3 個解。看 $y = \tan x$ 的圖形與直線 $y = \frac{\pi}{360}x$ 的交點。直線過原點、斜率很小；在 $-\pi \leq x \leq 3\pi$ 上，它的 y 值介於 $-\frac{\pi^2}{360} \approx -0.03$ 與 $\frac{3\pi^2}{360} \approx 0.08$ 之間， $x < 0$ 時為負、 $x > 0$ 時為正。逐段看： $-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$ 時 $\tan x \geq 0$ 而直線為負，沒有交點； $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 時，正切圖形在 $x > 0$ 的部分都在直線 $y = x$ 上方、 $x < 0$ 的部分都在 $y = x$ 下方，而直線 $y = \frac{\pi}{360}x$ 比 $y = x$ 更平，所以只交在原點 (1 個)； $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ 時 $\tan x \leq 0$ 而直線為正，沒有交點； $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ 時 $\tan x$ 從 0 遞增到無限大，與直線交 1 點 (比 π 略大)； $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$ 沒有交點； $2\pi < x < \frac{5\pi}{2}$ 同理交 1 點； $\frac{5\pi}{2} < x \leq 3\pi$ 時 $\tan x \leq 0$ ，沒有交點。合計 3 個。

兩端 $x = -\pi$ 與 $x = 3\pi$ 時 $\tan x = 0$ ，但直線的 y 值不是 0，所以端點不是解。

5 答案 (2)。疊合： $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) = 2 \sin(x + 30^\circ)$ 。五個選項依序是 $2 \sin 76^\circ$ 、 $2 \sin 96^\circ$ 、 $2 \sin 106^\circ$ 、 $2 \sin 116^\circ$ 、 $2 \sin 126^\circ$ 。換成銳角： $\sin 96^\circ = \sin 84^\circ$ ， $\sin 106^\circ = \sin 74^\circ$ ， $\sin 116^\circ = \sin 64^\circ$ ， $\sin 126^\circ = \sin 54^\circ$ 。銳角的正弦隨角度遞增， 84° 最大，所以 (2) 最大。

比較正弦值時，先把角度換到同一段遞增的範圍 (例如 0 到 $\frac{\pi}{2}$) 再比。



多選題 6~8：摺紙、倍角半角、由圖形求係數

- 6 答案 (4)(5)。摺起後 $\triangle GEF$ 與 $\triangle AEF$ 全等，所以 $\overline{FG} = \overline{FA} = 10$ ， $\angle EAF = 90^\circ$ ， $\angle AFE = \angle GFE = 90^\circ - \theta$ 。直角三角形 BFG 中， $\overline{BF} = 8$ 、 $\overline{FG} = 10$ ，所以 $\overline{BG} = 6$ 。(1) 錯： $\angle BFG = 180^\circ - 2(90^\circ - \theta) = 2\theta$ ，不是 θ 。(4) 對： $\cos 2\theta = \cos \angle BFG = \frac{\overline{BF}}{\overline{FG}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ 。(2) 錯： $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = \frac{4}{5}$ ， $\cos^2 \theta = \frac{9}{10}$ ， $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ 。(3) 錯： $\sin^2 \theta = \frac{1}{10}$ ， $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ， $\tan \theta = \frac{1}{3}$ 。(5) 對：直角三角形 AEF 中 $\tan \theta = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} = \frac{10}{\frac{1}{3}} = 30$ ； $\overline{DE} : \overline{AE} = 1 : 5$ ， $\overline{DE} = 6$ ， $\overline{AD} = 36$ 。
- 選項 (2)(3) 的 $\frac{4}{5}$ 、 $\frac{3}{4}$ 是 2θ 的餘弦與正切，不是 θ 的。
- 7 答案 (2)(3)。 θ 在第四象限， $\sin \theta < 0$ ， $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ 。 $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{4}{5} = -\frac{24}{25}$ ，(2) 對。 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = \frac{7}{25}$ ， $\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = -\frac{24}{7}$ ，(1) 錯。 $\sin 2\theta < 0$ 且 $\cos 2\theta > 0$ ， 2θ 是第四象限角，(3) 對。(4) 錯： θ 可寫成 $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < \theta < 2\pi + 2k\pi$ (k 為整數)，所以 $\frac{3\pi}{4} + k\pi < \frac{\theta}{2} < \pi + k\pi$ ； k 為偶數時在第二象限， k 為奇數時在第四象限，不一定是第二象限角。(5) 錯： $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} = \frac{9}{10}$ ， $\cos \frac{\theta}{2} = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$ ，不可能是 $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ 。
- 只知道 θ 的象限時， $\frac{\theta}{2}$ 的象限有兩種可能，要把一般式除以 2 來看。
- 8 答案 (2)(5)。由圖：最大值 3、最小值 -1，所以中心線 $c = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$ ，振幅 $\frac{3 - (-1)}{2} = 2$ 。 $y = a \sin x + b \cos x + c$ 的週期是 2π （圖上相鄰的最高點 $x = \frac{\pi}{3}$ 與最低點 $x = \frac{4\pi}{3}$ 相差 π ，正好半個週期），(1) 錯。 $x = \frac{\pi}{3}$ 時在最高點，所以 $y = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ ($x = \frac{\pi}{3}$ 時 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$)。展開： $2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6}\right) + 1 = \sqrt{3} \sin x + \cos x + 1$ ，所以 $a = \sqrt{3}$ 、 $b = 1$ 、 $c = 1$ ；(2) 對，(3) 錯。(4) 錯：對稱軸是通過最高點或最低點的鉛直線 $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ (k 為整數)； $x = \frac{11\pi}{3}$ 時 $y = 2 \sin \frac{23\pi}{6} + 1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$ ，不是最高點也不是最低點。(5) 對： $x = \frac{7\pi}{12}$ 時 $y = 2 \sin \frac{9\pi}{12} + 1 = 2 \sin \frac{3\pi}{4} + 1 = \sqrt{2} + 1$ 。
- 檢查： $x = 0$ 時 $y = 2 \sin \frac{\pi}{6} + 1 = 2$ ，與圖形和 y 軸的交點位置相符。

由圖形求 $a \sin x + b \cos x + c$ ：先由最大、最小值定中心線與振幅，再由最高點的位置寫成單一正弦，最後用和角公式展開對係數。

ROYAL BLUE · EDUCATION



多選題 9~11：指數函數圖形、餘弦圖形的對稱、化成單一正弦

- 9 答案 (3)。三點為 $A(3, 125)$ 、 $B(1, 5)$ 、 $C\left(-1, \frac{1}{5}\right)$ 。(1) 錯： $5^x > 0$ ， $k \leq 0$ 時水平線與圖形沒有交點。(2) 錯： $\overline{AC}$ 中點的 x 坐標是 1、 y 坐標是 $\frac{125 + \frac{1}{5}}{2} = 62.6$ ，而 B 的 y 坐標是 5， B 在中點的下方。(3) 對：直線 AB 的斜率 $\frac{125 - 5}{3 - 1} = 60$ ，直線 BC 的斜率 $\frac{5 - \frac{1}{5}}{1 - (-1)} = 2.4$ 。(4) 錯：把 $y = 5^x$ 的 x 換成 $-x$ 得 $y = 5^{-x}$ ，兩圖形對稱於 y 軸； $(1, 5)$ 在 $y = 5^x$ 上，它對原點的對稱點 $(-1, -5)$ 不在 $y = 5^{-x}$ 上 (5^{-x} 恆正)。(5) 錯： $x < 0$ 時， 5^x 由接近 0 遞增到 1， x^2 由很大遞減到 0，恰交 1 點； $0 \leq x \leq 1$ 時 $5^x \geq 1 \geq x^2$ 且等號不同時成立； $x \geq 1$ 時，若 $n \leq x \leq n+1$ (n 為正整數)， $5^x \geq 5^n > (n+1)^2 \geq x^2$ 。所以只有 1 個交點。

流傳版本的參考答案寫 (3)(4)。但照題幹印的 $y = 5^{-x}$ ，它與 $y = 5^x$ 是對稱於 y 軸，不是對稱於原點，所以本站重算的答案是 (3)。與 $y = 5^x$ 對稱於原點的圖形是 $y = -5^{-x}$ ；如果選項 (4) 原本是 $y = -5^{-x}$ ，那麼 (4) 才會成立。

- 10 答案 (1)(3)。 $y = \cos \pi x$ 的週期是 2：在 $x = 0$ 、 $x = 2$ 有最大值 1，在 $x = 1$ 有最小值 -1，在 $x = \frac{1}{2}$ 、 $\frac{3}{2}$ 的值為 0；兩端 $x = -\frac{1}{2}$ 、 $\frac{5}{2}$ 不含。若 $-1 < k < 0$ ，交點只有 2 個（在 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{3}{2}$ 之間、對稱於 $x = 1$ ）； $k = 0$ 也只有 2 個； $k = \pm 1$ 時也湊不出題目要三點。所以 $0 < k < 1$ ，(1) 對。此時設 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ 滿足 $\cos \pi \alpha = k$ ，由圖形對稱於 $x = 0$ 、 $x = 1$ 、 $x = 2$ ，交點共 4 個： $x = -\alpha$ 、 α 、 $2 - \alpha$ 、 $2 + \alpha$ ，(2) 錯。題目的三點是 $x_1 = \alpha$ 、 $x_2 = 2 - \alpha$ 、 $x_3 = 2 + \alpha$ 。(3) 對： $x_1 + x_2 = 2$ ，滿足 ≥ 2 。(4) 錯： $\overline{PQ} = 2 - 2\alpha$ ， $\overline{QR} = 2\alpha$ ； $2 - 2\alpha = 10\alpha$ 得 $\alpha = \frac{1}{6}$ ， $k = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。(5) 錯：四個交點的 x 坐標和為 $(-\alpha) + \alpha + (2 - \alpha) + (2 + \alpha) = 4$ 。

題目說「其中三交點」，交點其實有四個； $x = -\alpha$ 那一個在 $-\frac{1}{2}$ 與 0 之間，容易漏掉。

- 11 答案 (2)(4)。 $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，所以 $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3$ 。(1) 錯：振幅是 2。(2) 對： $2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3$ 的週期是 2π 。 $0 \leq x \leq \pi$ 時 $\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$ ， $-\frac{1}{2} \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ 。(4) 對： $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ 即 $x = \frac{\pi}{3}$ 時有最大值 $2 + 3 = 5$ 。(3) 錯： $x = \pi$ 時確實是最小，但最小值是 $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 2$ ，不是 -1。(5) 錯：平移不會改變振幅， $y = \sin x$ 的振幅是 1，而 $f(x)$ 的振幅是 2，還需要鉛直伸縮。

題幹限定 $0 \leq x \leq \pi$ ，圖形只有半個週期長。選項 (2) 是就函數式 $2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3$ 而言週期為 2π ，流傳版本的參考答案也把 (2) 列為正確。

填充題 12~16：扇形、整數弧度、指數方程式、不等式區間、二次極值

- 12 設半徑 r 、圓心角 θ (弧度)，弧長 $r\theta$ 。周長 $2r + r\theta = 24$ ，所以 $r\theta = 24 - 2r$ 。面積 $= \frac{1}{2}r \cdot r\theta = \frac{1}{2}r(24 - 2r) = 12r - r^2 = 36 - (r - 6)^2$ 。 $r = 6$ 時面積最大， $M = 36$ ；此時 $r\theta = 12$ ， $\theta = 2$ 。故 $(\theta, M) = (2, 36)$ 。
 $\theta = 2$ 是 2 弧度，不是 2° 。



13 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ 。 θ 是正整數時不會是 $\frac{\pi}{2}$ 的整數倍，所以 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 都不為 0。條件成為 $\cos \theta < 0$ 且 $\sin \theta \cos \theta < 0$ ，即 $\cos \theta < 0$ 且 $\sin \theta > 0$ ， θ 是第二象限角。 $\frac{\pi}{2} \approx 1.57 < \theta < \pi \approx 3.14$ ： $\theta = 2, 3$ 。再加一圈： $\frac{5\pi}{2} \approx 7.85 < \theta < 3\pi \approx 9.42$ ： $\theta = 8, 9$ 。總和 $2 + 3 + 8 + 9 = 22$ 。

14 令 $f(x) = g(x) : 2 \cdot 2^{2x} + 1 = \frac{33}{4} \cdot 2^x$ 。令 $t = 2^x > 0 : 2t^2 + 1 = \frac{33}{4}t$ ，即 $8t^2 - 33t + 4 = 0$ ， $(8t - 1)(t - 4) = 0$ ， $t = \frac{1}{8}$ 或 $t = 4$ ，所以 $x = -3$ 或 $x = 2$ 。第二象限的點 $x < 0$ ，取 $x = -3$ ； $y = g(-3) = 33 \times 2^{-5} = \frac{33}{32}$ 。交點為 $(-3, \frac{33}{32})$ 。

驗算： $f(-3) = 2^{-5} + 1 = \frac{33}{32}$ ，相符。另一個交點 $(2, 33)$ 在第一象限。

15 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ ： $\sin x = -\frac{1}{2}$ 的解是 $x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ ， $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ 的範圍是 $\frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}$ ，長度 $a = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ 。 $\sin x = \frac{1}{2}$ 的解是 $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ ， $\sin x \leq \frac{1}{2}$ 的範圍是 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$ ，長度 $b = \frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$ 。所以 $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ 。

16 令 $t = 2^x$ ； $-1 \leq x \leq 1$ 時 $\frac{1}{2} \leq t \leq 2$ 。 $4^x = t^2$ ， $2^{x+2} = 4t$ ，所以 $f = -3t^2 + 4t = -3\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}$ 。頂點 $t = \frac{2}{3}$ 在範圍內，最大值 $a = \frac{4}{3}$ 。圖形開口向下，最小值在離頂點較遠的端點： $t = 2$ 時 $f = -12 + 8 = -4$ （另一端 $t = \frac{1}{2}$ 時 $f = \frac{5}{4}$ ），所以 $b = -4$ 。 $a - b = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3}$ 。

代換後要把 x 的範圍換成 t 的範圍，再比較頂點與兩個端點。

指數式裡同時出現 4^x 與 2^x 時，令 $t = 2^x$ 化成二次式；別忘了 $t > 0$ 以及題目給的範圍。

填充題 17~20：三角不等式、周長最大值、二倍角三角形、四邊形裡的面積

17 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ，不等式成為 $2 \sin x \cos x \leq \sqrt{3} \sin x$ 。 $0 < x < \pi$ 時 $\sin x > 0$ ，兩邊同除以 $\sin x$ （不等號方向不變）： $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。餘弦在 $0 < x < \pi$ 遞減，且 $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，所以 $\frac{\pi}{6} \leq x < \pi$ 。 $\alpha = \frac{1}{6}$ 、 $\beta = 1$ ， $\beta - \alpha = \frac{5}{6}$ 。

能同除以 $\sin x$ 是因為在 $0 < x < \pi$ 內它是正數；範圍若不同，就要移項後分情況討論。

18 直角三角形 ABE 中： $\overline{AB} = 8 \cos \theta$ ， $\overline{BE} = 8 \sin \theta$ ， $\angle AEB = 90^\circ - \theta$ 。 B 、 E 、 C 共線，所以 $\angle FEC = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \theta) = \theta$ ；直角三角形 ECF 中 $\overline{EC} = 7 \cos \theta$ 。矩形的寬 $\overline{AB} = 8 \cos \theta$ ，長 $\overline{BC} = 8 \sin \theta + 7 \cos \theta$ ，周長 $= 2(8 \cos \theta + 8 \sin \theta + 7 \cos \theta) = 2(8 \sin \theta + 15 \cos \theta)$ 。疊合： $8 \sin \theta + 15 \cos \theta = 17 \left(\frac{8}{17} \sin \theta + \frac{15}{17} \cos \theta \right) = 17 \sin(\theta + \varphi)$ ，其中 $\cos \varphi = \frac{8}{17}$ 、 $\sin \varphi = \frac{15}{17}$ ，最大值 17，所以 $b = 34$ 。此時 $\theta + \varphi = 90^\circ$ ， $\cos \theta = \sin \varphi = \frac{15}{17}$ ， $a = \overline{AB} = 8 \cdot \frac{15}{17} = \frac{120}{17}$ 。

檢查 F 確實落在 $\overline{CD}$ 上：此時 $\sin \theta = \frac{8}{17}$ ， $\overline{CF} = 7 \sin \theta = \frac{56}{17}$ ，小於 $\overline{CD} = \frac{120}{17}$ 。



19

設 $\angle CBA = B$ ，則 $\angle CAB = 2B$ 。正弦定理： $\frac{\overline{BC}}{\sin 2B} = \frac{\overline{AC}}{\sin B}$ ，即 $\frac{18}{2 \sin B \cos B} = \frac{12}{\sin B}$ ，得 $\cos B = \frac{3}{4}$ 。第三個角 $C = 180^\circ - 3B$ ， $\sin C = \sin 3B = \sin(2B + B) = \sin 2B \cos B + \cos 2B \sin B = \sin B (2 \cos^2 B + \cos 2B) \cdot 2 \cos^2 B = \frac{9}{8}$ ， $\cos 2B = 2 \cdot \frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8}$ ，所以 $\sin C = \frac{5}{4} \sin B$ 。再用正弦定理： $\overline{AB} = \overline{AC} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = 12 \cdot \frac{5}{4} = 15$ 。
 求出 $\cos B = \frac{3}{4}$ 後若改用餘弦定理 $12^2 = 18^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot 18 \cdot \overline{AB} \cdot \frac{3}{4}$ ，會解出 $\overline{AB} = 12$ 或 15 ； $\overline{AB} = 12$ 時 $\angle B = \angle C$ ，三個角是 $2B$ 、 B 、 B ，得 $B = 45^\circ$ ，與 $\cos B = \frac{3}{4}$ 不合，要捨去。

20

連 $\overline{BD}$ 。直角三角形 ABD 中 $\overline{BD} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ ， $\cos \angle ABD = \frac{12}{13}$ ， $\sin \angle ABD = \frac{5}{13}$ 。又 $\cos \angle ABC = \frac{4}{5}$ ， $\sin \angle ABC = \frac{3}{5}$ 。四邊形是凸的， D 在 $\angle ABC$ 的內部， $\angle DBC = \angle ABC - \angle ABD$ 。差角公式： $\sin \angle DBC = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{16}{65}$ 。 $\triangle BCD$ 面積 $= \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{BC} \cdot \sin \angle DBC = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 10 \cdot \frac{16}{65} = 16$ 。
 另一種算法： $\triangle ABC$ 面積 $= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 \cdot \frac{3}{5} = 36$ ； C 到直線 AD 的距離是 $12 - 10 \cdot \frac{4}{5} = 4$ ， $\triangle ACD$ 面積 $= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$ ；四邊形面積 46，減去 $\triangle ABD$ 的 30，也得 16。

圖形裡的長度先用一個角的正弦、餘弦表示，再用疊合或和差角公式處理，是這個範圍幾何題的共同做法。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自臺南女中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tngs-114a-g11a-1