

臺南一中 113 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數（弧度量與扇形、三角函數的圖形與週期、和差角與倍角半角公式、正餘弦的疊合） · 第壹部分：多選題 2 題（每題 6 分）、填充題 13 題（每題 6 分），共 90 分；第貳部分：混合題 1 題組 2 小題（4 分、6 分），共 10 分

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/tnfsh-113a-g11a-1

第壹部分：選擇（填）題（占 90 分） 一、多選題（占 12 分） 說明：第 1 題至第 2 題，每題 6 分。(6-4-2-0)

1 選出正確者：

(1) $\tan \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{3}$

(2) $\sin 2 > \sin 2^\circ$

(3) $\cos 2 > \cos 2^\circ$

(4) $\sin 3^\circ > \sin 2^\circ + \sin 1^\circ$

(5) $\sin 6 + \cos 6 > 0$

2 選出最小正週期為 π 的函數：

(1) $y = \sin \frac{x}{2}$

(2) $y = \sin(2x + \pi)$

(3) $y = 2 \sin x + \pi$

(4) $y = \sin^2 x - \cos^2 x$

(5) $y = |\sin x - \cos x|$

二、填充題（占 78 分） 說明：第 3 題至第 15 題，每題 6 分。

3 一扇形的周長為 10 cm，面積為 6 cm²，中心角為 θ 徑且 $\theta < 2$ ，求 $\theta =$ _____。

4 求 $\cos \frac{\pi}{8} =$ _____。

5 已知 k 為整數且 $0 \leq k \leq 11$ ，則滿足 $\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{11}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的 k 有 _____ 個。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tnfsh-113a-g11a-1

6 已知兩直線 $y = 3x$ 與 $y = -4x$ 的銳夾角為 θ ，求 $\tan \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7 $0 \leq \theta < 2\pi$ ，求方程式 $\tan 2\theta = -\tan \theta$ 所有解之和 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

8 已知 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ 且 $-\sqrt{3} \sin 70^\circ + \cos 70^\circ = 2 \sin \theta$ ，求滿足條件的 θ 之最大角度 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

9 已知 $(\cos 1)(\cos 2)(\cos 4) = k \cdot \frac{\sin 8}{\sin 1}$ ，求常數 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10 將 $y = 2 \cos x$ 的圖形沿水平方向伸縮 a 倍 ($a > 0$)，再往右平移最小正單位 b 可得 $y = 2 \cos\left(\frac{x}{4} - \pi\right)$ 的圖形，求 $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

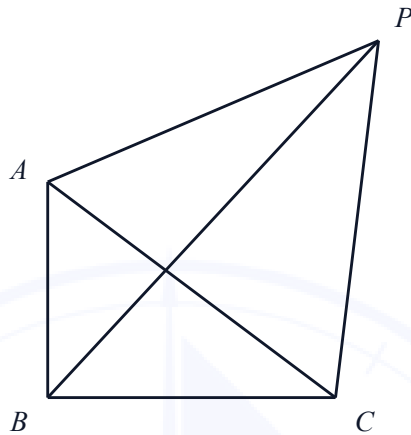
11 遊樂區有一圓形摩天輪，中心軸高 30 公尺，直徑 50 公尺，逆時針方向運轉一圈需時 20 分鐘，當摩天輪開始運轉時，小美恰坐在離地面最高的位置上， x 分鐘後，小美離地的高度可表為 $y = a \sin(bx + c) + d$ ，其中 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $0 \leq c < 2\pi$ ，求序對 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

御藍教育

ROYAL BLUE • EDUCATION



- 12 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 4$ ， $\overline{AC} = 5$ ，以 $\overline{AC}$ 為一邊往外作一正三角形 PAC ，求 $\overline{PB}^2 =$ _____。



- 13 已知 $f(x) = 3 \sin\left(\frac{x}{a} + b\right)$ 圖形距離原點最近的兩條對稱軸依序為 $x = -1$ 與 $x = 4$ ，且 $a > 0$ ， $|b| < \frac{\pi}{2}$ ，求序對 $(a, b) =$ _____。

- 14 $\triangle ABC$ 中， $2\angle A = 3\angle B$ 且 $\overline{BC} = 16$ ， $\overline{AC} = 12$ ，求 $\cos \angle B =$ _____。

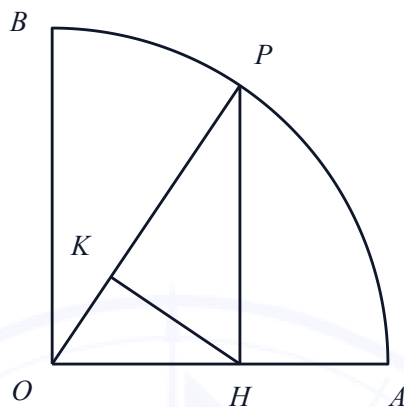
- 15 方程式 $n\pi \cos x = |x|$ 有 366 個實數解，求正整數 $n =$ _____。

第貳部分：混合題（占 10 分） 說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

16–17 題組 如圖，已知扇形 OAB 半徑 1，中心角 $\angle AOB = 90^\circ$ ， P 為劣弧 AB 上的動點，過 P 作 $\overline{PH} \perp \overline{OA}$ 於 H ，再作 $\overline{HK} \perp \overline{OP}$ 於 K ，設 $\angle POA = \theta$



- 16 將 $\overline{PK} + 2\overline{KH}$ 表成 $a \sin 2\theta + b \cos 2\theta + c$ (a 、 b 、 c 為常數) ? (非選擇題, 4 分)



- 17 求 $\overline{PK} + 2\overline{KH}$ 的最大值及此時的 $\tan \theta = ?$ (非選擇題, 6 分)

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/tnfsh-113a-g11a-1

答案一覽

第 1 題 (1)(2)(5)

第 2 題 (2)(4)(5)

第 3 題 $\frac{4}{3}$

第 4 題 $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

第 5 題 4

第 6 題 $\frac{7}{11}$

第 7 題 5π

第 8 題 320°

第 9 題 $\frac{1}{8}$

第 10 題 4π

第 11 題 $(25, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, 30)$

第 12 題 $25 + 12\sqrt{3}$

第 13 題 $(\frac{5}{\pi}, -\frac{3\pi}{10})$

第 14 題 $\frac{4\sqrt{13}-1}{18}$

第 15 題 182 或 183

第 16 題 $\sin 2\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2}$

第 17 題 最大值 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; 此時 $\tan \theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tnfsh-113a-g11a-1

多選題 (第 1、2 題)：弧度與度分清楚、先化簡再看週期

- 1 答案 (1)(2)(5)。沒有寫「°」的角是弧度，1 弧度約 57.3° 。(1) 對： $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\frac{\pi}{3} \approx 1.047$ 。(2) 對：2 弧度約 114.6° ， $\sin 2 = \sin(\pi - 2) \approx \sin 65.4^\circ \approx 0.91$ ，而 $\sin 2^\circ \approx 0.035$ 。(3) 錯： $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$ ，2 弧度在第二象限， $\cos 2 < 0$ ； $\cos 2^\circ > 0$ 。(4) 錯： $\sin 3^\circ = \sin(2^\circ + 1^\circ) = \sin 2^\circ \cos 1^\circ + \cos 2^\circ \sin 1^\circ$ ，其中 $\cos 1^\circ$ 、 $\cos 2^\circ$ 都小於 1，所以 $\sin 3^\circ < \sin 2^\circ + \sin 1^\circ$ 。(5) 對：疊合得 $\sin 6 + \cos 6 = \sqrt{2} \sin\left(6 + \frac{\pi}{4}\right)$ ，而 $6 + \frac{\pi}{4} \approx 6.785$ 介於 $2\pi \approx 6.283$ 與 $3\pi \approx 9.425$ 之間，正弦值為正。
- (5) 也可以看象限： $\frac{7\pi}{4} \approx 5.498 < 6 < 2\pi$ ，6 弧度在第四象限而且比 $\frac{7\pi}{4}$ 更靠近 x 軸正向，所以 $\cos 6$ 是正的而且比 $|\sin 6|$ 大。用計算機核對： $\sin 6 \approx -0.279$ ， $\cos 6 \approx 0.960$ 。
- 2 答案 (2)(4)(5)。 $y = \sin kx$ ($k > 0$) 的週期是 $\frac{2\pi}{k}$ ；平移與鉛直伸縮不改變週期。(1) 錯：週期 $\frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$ 。(2) 對：週期 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 。(3) 錯： $y = 2\sin x + \pi$ 只是把 $y = \sin x$ 鉛直伸縮 2 倍再向上平移 π ，週期仍是 2π 。(4) 對： $\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$ ，週期 π 。(5) 對：疊合得 $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ，加絕對值後把 x 軸下方的部分翻上來，週期由 2π 變成 π 。
- (5) 確認沒有更小的週期：函數值為 0 只發生在 $x = \frac{\pi}{4} + m\pi$ (m 為整數)，相鄰兩個相距 π ，所以週期不會比 π 小。(3) 的「 $+\pi$ 」加在函數外面，是上下平移，和 (2) 加在角裡面不同。

角沒有寫度的符號就是弧度，先換算成大約幾度、落在哪個象限再比大小；求週期先把式子化成單一個三角函數。

填充題 (第 3~5 題)：扇形、半角公式、正弦不等式

- 3 設半徑為 r ，弧長為 $r\theta$ 。周長 $2r + r\theta = 10$ ，所以 $r\theta = 10 - 2r$ 。面積 $\frac{1}{2}r \cdot r\theta = \frac{1}{2}r(10 - 2r) = 6$ ，整理得 $r^2 - 5r + 6 = 0$ ， $r = 2$ 或 $r = 3$ 。 $r = 2$ 時 $\theta = \frac{10 - 4}{2} = 3$ ，不合 $\theta < 2$ ； $r = 3$ 時 $\theta = \frac{10 - 6}{3} = \frac{4}{3}$ 。所以 $\theta = \frac{4}{3}$ 。
- 扇形面積用 $\frac{1}{2} \times \text{半徑} \times \text{弧長}$ ，可以少解一次 θ 。兩組解的半徑與弧長剛好對調 (2、6 與 3、4)，題目用 $\theta < 2$ 挑出其中一組。
- 4 由餘弦的二倍角公式 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ ，取 $\alpha = \frac{\pi}{8}$ ： $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ 。 $\frac{\pi}{8}$ 是銳角，餘弦為正，所以 $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ 。
- 約 0.924，介於 $\cos \frac{\pi}{6} \approx 0.866$ 與 1 之間，合理。
- 5 $0 \leq k \leq 11$ 時角 $\frac{k\pi}{11}$ 在 0 到 π 之間。在這個範圍內 $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的解是 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ 。所以 $\frac{\pi}{3} < \frac{k\pi}{11} < \frac{2\pi}{3}$ ，即 $\frac{11}{3} < k < \frac{22}{3}$ ，約為 $3.67 < k < 7.33$ 。整數 $k = 4, 5, 6, 7$ ，共 4 個。
- 是嚴格大於，但 $\frac{11}{3}$ 、 $\frac{22}{3}$ 都不是整數，端點不影響個數。



填充題 (第 6~9 題)：正切的差角與二倍角、疊合、連乘餘弦

- 6 設兩直線的斜角分別為 α 、 β ，則 $\tan \alpha = 3$ ， $\tan \beta = -4$ ，兩直線的一個夾角是 $\beta - \alpha$ 。由正切的差角公式， $\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \frac{-4 - 3}{1 + (-4) \times 3} = \frac{-7}{-11} = \frac{7}{11}$ 。這個值為正，所以 $\beta - \alpha$ 就是銳夾角， $\tan \theta = \frac{7}{11}$ 。

如果算出來是負的，表示算到的是鈍夾角，銳夾角的正切取它的絕對值。

- 7 令 $t = \tan \theta$ ，由正切的二倍角公式 $\tan 2\theta = \frac{2t}{1-t^2}$ ，方程式成為 $\frac{2t}{1-t^2} = -t$ 。 $t = 0$ 是解； $t \neq 0$ 時兩邊同除以 t 得 $2 = -(1-t^2)$ ， $t^2 = 3$ ， $t = \pm\sqrt{3}$ (都滿足 $t^2 \neq 1$)。在 $0 \leq \theta < 2\pi$ 內： $\tan \theta = 0$ 得 $\theta = 0, \pi$ ； $\tan \theta = \sqrt{3}$ 得 $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ ； $\tan \theta = -\sqrt{3}$ 得 $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ 。所有解之和 $= 0 + \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \pi + \frac{4\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 5\pi$ 。
 $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 時 $\tan \theta$ 沒有定義，不是解；六個解恰好是 $\frac{m\pi}{3}$ ($m = 0, 1, \dots, 5$)。範圍含 $\theta = 0$ ，但它對總和沒有影響。

- 8 左邊提出 2 疊合： $-\sqrt{3} \sin 70^\circ + \cos 70^\circ = 2 \left(\cos 70^\circ \cdot \frac{1}{2} - \sin 70^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2(\cos 70^\circ \cos 60^\circ - \sin 70^\circ \sin 60^\circ) = 2 \cos 130^\circ$ 。所以 $\sin \theta = \cos 130^\circ = -\cos 50^\circ = -\sin 40^\circ$ 。正弦值為負， θ 在第三或第四象限： $\theta = 180^\circ + 40^\circ = 220^\circ$ 或 $\theta = 360^\circ - 40^\circ = 320^\circ$ 。最大的是 320° 。
用計算機核對：左邊 $\approx -1.732 \times 0.9397 + 0.3420 \approx -1.286$ ， $2 \sin 320^\circ \approx -1.286$ 。

- 9 這裡的 1、2、4、8 都是弧度。角一個是前一個的兩倍，乘上 $\sin 1$ 後連續用 $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ ：
 $\sin 1 \cos 1 \cos 2 \cos 4 = \frac{1}{2} \sin 2 \cos 2 \cos 4 = \frac{1}{4} \sin 4 \cos 4 = \frac{1}{8} \sin 8$ 。兩邊同除以 $\sin 1$ ($\sin 1 \neq 0$) 得
 $\cos 1 \cos 2 \cos 4 = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 8}{\sin 1}$ ，所以 $k = \frac{1}{8}$ 。

用計算機核對： $\cos 1 \cos 2 \cos 4 \approx 0.5403 \times (-0.4161) \times (-0.6536) \approx 0.1470$ ； $\frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 8}{\sin 1} \approx \frac{1}{8} \cdot \frac{0.9894}{0.8415} \approx 0.1470$ 。

看到一串成兩倍的角相乘，補一個最小角的正弦，用二倍角公式一路收起來。

填充題 (第 10~12 題)：伸縮與平移、摩天輪、和角公式配餘弦定理

- 10 沿水平方向伸縮 a 倍是把 x 換成 $\frac{x}{a}$ ： $y = 2 \cos \frac{x}{a}$ 。再向右平移 b 是把 x 換成 $x - b$ ： $y = 2 \cos \frac{x-b}{a} = 2 \cos \left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a} \right)$ 。要與 $y = 2 \cos \left(\frac{x}{4} - \pi \right)$ 是同一個圖形， x 的係數要相同， $a = 4$ ；而且 $\frac{b}{4}$ 與 π 只能差 2π 的整數倍： $\frac{b}{4} = \pi + 2m\pi$ ， $b = 4\pi + 8m\pi$ (m 為整數)。最小的正數是 $m = 0$ 時的 $b = 4\pi$ 。

平移量是 4π 不是 π ： $\frac{x}{4} - \pi = \frac{x-4\pi}{4}$ ，要把 x 的係數提出來才看得到真正的平移量。伸縮後的週期是 8π ，所以其他可能的平移量與 4π 差 8π 的整數倍。



- 11 半徑 25 公尺，中心高 30 公尺，所以高度在 $30 - 25 = 5$ 與 $30 + 25 = 55$ 之間變動：振幅 $a = 25$ ，中心線 $d = 30$ 。轉一圈 20 分鐘，週期 $\frac{2\pi}{b} = 20$ ， $b = \frac{\pi}{10}$ 。 $x = 0$ 時在最高點： $25 \sin c + 30 = 55$ ， $\sin c = 1$ ，在 $0 \leq c < 2\pi$ 內 $c = \frac{\pi}{2}$ 。所以 $(a, b, c, d) = \left(25, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, 30\right)$ 。

高度只和轉了多少角度有關，順時針或逆時針轉，高度函數都一樣。檢查： $x = 10$ （轉半圈）時 $y = 25 \sin \frac{3\pi}{2} + 30 = 5$ ，在最低點。

- 12 $3^2 + 4^2 = 5^2$ ，所以 $\angle B = 90^\circ$ ， $\cos A = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{3}{5}$ ， $\sin A = \frac{4}{5}$ 。正三角形 PAC 作在外側， $\overline{AP} = \overline{AC} = 5$ ， $\angle BAP = \angle A + 60^\circ$ 。由和角公式 $\cos(A + 60^\circ) = \cos A \cos 60^\circ - \sin A \sin 60^\circ = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} - \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$ 。在 $\triangle ABP$ 用餘弦定理： $\overline{PB}^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10} = 34 - 3(3 - 4\sqrt{3}) = 25 + 12\sqrt{3}$ 。

改從 C 看也一樣： $\angle BCP = \angle C + 60^\circ$ ， $\cos(C + 60^\circ) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$ ， $\overline{PB}^2 = 16 + 25 - 40 \times \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10} = 25 + 12\sqrt{3}$ 。約 45.78， $\overline{PB} \approx 6.77$ 。

填充題（第 13~15 題）：對稱軸、正弦定理配倍角、用圖形數解的個數

- 13 正弦函數圖形的對稱軸通過最高點或最低點，相鄰兩條對稱軸相距半個週期。 $x = -1$ 與 $x = 4$ 相鄰，所以半個週期是 5，週期是 10。 $f(x)$ 的週期是 $\frac{2\pi}{1/a} = 2\pi a$ ，由 $2\pi a = 10$ 得 $a = \frac{5}{\pi}$ ， $f(x) =$

$3 \sin\left(\frac{\pi x}{5} + b\right)$ 。對稱軸上的正弦值是 ± 1 ： $x = -1$ 代入， $-\frac{\pi}{5} + b = \frac{\pi}{2} + m\pi$ （ m 為整數）， $b = \frac{7\pi}{10} + m\pi$ 。滿足 $|b| < \frac{\pi}{2}$ 的只有 $m = -1$ 時的 $b = -\frac{3\pi}{10}$ 。所以 $(a, b) = \left(\frac{5}{\pi}, -\frac{3\pi}{10}\right)$ 。

檢查： $x = 4$ 時 $\frac{4\pi}{5} - \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$ ，是最高點； $x = -1$ 時 $-\frac{\pi}{5} - \frac{3\pi}{10} = -\frac{\pi}{2}$ ，是最低點。所有對稱軸是 $x = -1 + 5m$ ，離原點最近的兩條確實是 $x = -1$ 與 $x = 4$ 。

- 14 設 $\angle B = 2t$ ，則 $\angle A = 3t$ 。由正弦定理 $\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{AC}}{\sin B}$ ， $\frac{16}{\sin 3t} = \frac{12}{\sin 2t}$ ，即 $4 \sin 2t = 3 \sin 3t$ 。用和角公式展開 $\sin 3t = \sin(2t + t) = \sin 2t \cos t + \cos 2t \sin t = 2 \sin t \cos^2 t + (2 \cos^2 t - 1) \sin t = \sin t (4 \cos^2 t - 1)$ 。代入並用 $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ ： $8 \sin t \cos t = 3 \sin t (4 \cos^2 t - 1)$ 。 $\sin t \neq 0$ ，約去後得 $12 \cos^2 t - 8 \cos t - 3 = 0$ ， $\cos t = \frac{8 \pm \sqrt{208}}{24} = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{6}$ 。 t 是銳角，取 $\cos t = \frac{2 + \sqrt{13}}{6}$ 。所以

$$\cos B = \cos 2t = 2 \cos^2 t - 1 = 2 \cdot \frac{17 + 4\sqrt{13}}{36} - 1 = \frac{4\sqrt{13} - 1}{18}。$$

約 0.746： $\angle B \approx 41.8^\circ$ ， $\angle A \approx 62.7^\circ$ ， $\angle C \approx 75.5^\circ$ ，大邊 $\overline{BC} = 16$ 對大角 A ，合理。也可以由 $12 \cos^2 t = 8 \cos t + 3$ 直接代換： $\cos 2t = \frac{8 \cos t + 3}{6} - 1 = \frac{8 \cos t - 3}{6}$ 。



- 15 方程式兩邊都是偶函數，而 $x = 0$ 時左邊是 $n\pi$ 、右邊是 0，不是解；所以正、負解各一半，正解要有 183 個。 $x > 0$ 時方程式是 $\cos x = \frac{x}{n\pi}$ ，看 $y = \cos x$ 與直線 $y = \frac{x}{n\pi}$ 的交點。直線由原點往右上升，在 $x = n\pi$ 時高度到 1，之後超過 1 不會再有交點；交點只可能出現在 $\cos x > 0$ 的區段。第一段 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ：餘弦由 1 降到 0，直線由 0 上升，恰 1 個交點。之後每一段 $2m\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2m\pi + \frac{\pi}{2}$ ($m = 1, 2, \dots$) 是一個拱形，頂點在 $x = 2m\pi$ 、高度 1，直線在那裡的高度是 $\frac{2m}{n}$ 。當 $2m < n$ 時直線從拱形頂點下方穿過，有 2 個交點；當 $2m = n$ 時直線恰好通過頂點 $(n\pi, 1)$ ，直線是斜的而拱形在頂點是平的，所以頂點左邊還有 1 個交點，連頂點共 2 個；當 $2m > n$ 時整個拱形都在 $x > n\pi$ ，沒有交點。若 n 是偶數， $m = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ 各 2 個，正解共 $1 + n$ 個；若 n 是奇數， $m = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$ 各 2 個，正解共 $1 + (n-1) = n$ 個。令正解個數為 183：偶數時 $n = 182$ ，奇數時 $n = 183$ 。所以 $n = 182$ 或 183 。

兩個答案都要寫。 $n = 182$ 時最後一個交點就是拱形頂點 $(182\pi, 1)$ ，別漏算； $n = 183$ 時直線在 $x = 183\pi$ 才到 1，但那裡 $\cos x = -1$ ，不是交點。

數解的個數時，先用奇偶性把範圍減半，再一個週期一個週期數；最後一個週期的邊界情形要單獨檢查。

混合題 (第 16、17 題)：線段長化成二倍角，再疊合求最大值

- 16 $\overline{OP} = 1$ ，直角三角形 OHP 中 $\angle POH = \theta$ ，所以 $\overline{OH} = \cos \theta$ ， $\overline{PH} = \sin \theta$ ，且 $\angle OPH = 90^\circ - \theta$ 。 $\overline{HK} \perp \overline{OP}$ ，直角三角形 PKH 中 $\angle KPH = 90^\circ - \theta$ ，斜邊 $\overline{PH} = \sin \theta$ ，所以 $\overline{PK} = \overline{PH} \cos(90^\circ - \theta) = \sin^2 \theta$ ， $\overline{KH} = \overline{PH} \sin(90^\circ - \theta) = \sin \theta \cos \theta$ 。於是 $\overline{PK} + 2\overline{KH} = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta$ 。用二倍角公式 $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ 、 $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$ ，得 $\overline{PK} + 2\overline{KH} = \sin 2\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2}$ ，即 $a = 1$ ， $b = -\frac{1}{2}$ ， $c = \frac{1}{2}$ 。
 $\overline{KH}$ 也可以用面積算：直角三角形 OHP 的面積 $= \frac{1}{2} \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{KH}$ ，得 $\overline{KH} = \sin \theta \cos \theta$ 。

- 17 由第 16 題， $\overline{PK} + 2\overline{KH} = \sin 2\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2}$ 。疊合： $\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ，取銳角 φ 使 $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 、 $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ，則 $\sin 2\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} (\sin 2\theta \cos \varphi - \cos 2\theta \sin \varphi) = \frac{\sqrt{5}}{2} \sin(2\theta - \varphi)$ 。 P 在弧上， $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ， $2\theta - \varphi$ 的範圍是 $-\varphi$ 到 $\pi - \varphi$ ，其中包含 $\frac{\pi}{2}$ ，所以 $\sin(2\theta - \varphi)$ 取得到 1，最大值為 $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 。此時 $2\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$ ， $\sin 2\theta = \cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ， $\cos 2\theta = -\sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ 。由 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2 \cos^2 \theta} = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$ ，得 $\tan \theta = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 。
最大值與此時的 $\tan \theta$ 恰好是同一個數 $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ ，題目問的是兩個量，兩個都要寫；流傳版本的參考答案只列一個式子。也可以由 $\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = -2$ 用正切的二倍角公式解 $\frac{2t}{1 - t^2} = -2$ ，得 $t^2 - t - 1 = 0$ ， θ 是銳角取正根。此時 $\theta \approx 58.3^\circ$ 。

式子裡有 $\sin^2 \theta$ 與 $\sin \theta \cos \theta$ 時，先用二倍角公式降成 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ 的一次式，再疊合求極值；求極值時要確認角的範圍內取得到。



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自臺南一中 113 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tnfsh-113a-g11a-1