

台中女中 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數（弧度量、三角函數的圖形、和差角與倍角公式、正餘弦的疊合） · 多選題 3 題（24 分）、
填充題 13 題（65 分）、混合題 1 題組 2 小題（11 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/tcgs-114a-g11a-1

第壹部分：選擇（填）題（占 89 分） 一、多選題（占 24 分）說明：第 1 題至第 3 題，每題 8 分。（8-6-4-2-0）

1 請問下列何者週期為 π ？

- (1) $y = |\sin(2x + 4) - 8|$
- (2) $y = \frac{\cos x}{\sin 290^\circ} + \frac{\sin x}{\cos 290^\circ}$
- (3) $y = \sin^2 x - \sin x \cos x + 4 \cos^2 x$
- (4) $y = 2|\sin x| + |\cos x|$
- (5) $y = (\cos x - \sin x)(\cos x + 2 \sin x)$

2 請問下列何者正確？

- (1) $\sqrt{1 + \sin 340^\circ} - \sqrt{1 - \sin 340^\circ} = -2 \sin 10^\circ$
- (2) $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 180\right)$
- (3) $\cos x = \frac{x}{7}$ 共有 5 個實根
- (4) $y = \cos x + |\cos x|$ 的圖形對稱於 y 軸
- (5) $y = \tan x + |\tan x|$ 的圖形對稱於 y 軸

3 已知函數 $f(x) = 4 \sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ ，請問下列何者正確？

- (1) $f(x)$ 的最大值是 3
- (2) $f(x)$ 是週期函數，週期為 π
- (3) 將函數圖形 $y = \sin 2x$ 先將縱坐標鉛直伸縮為原來的 2 倍，再左移 $\frac{\pi}{12}$ 單位，再下移 1 單位可與 $y = f(x) = 4 \sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ 函數圖形重合
- (4) 將函數圖形 $y = \sin 2x$ 先右移 $\frac{11\pi}{12}$ 單位，再將縱坐標鉛直伸縮為原來的 2 倍，再下移 1 單位可與 $y = f(x) = 4 \sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ 函數圖形重合
- (5) 當 $\frac{4\pi}{3} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ ， $y = f(x) = 4 \sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ 為嚴格遞減函數



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tcgs-114a-g11a-1

二、填充題（占 65 分）說明：第 4 題至第 16 題。答對格數 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13 格，分數依序為 6、12、18、24、30、36、41、45、49、53、57、61、65 分。

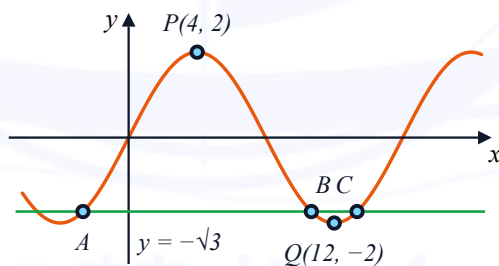
- 4 設 $a = \sin 5$ 、 $b = \sin 6$ 、 $c = \cos 7$ 、 $d = \cos 8$ 、 $e = \sin 8$ 、 $f = \cos \pi^\circ$ 、 $g = \cos \pi$ ，將 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 、 g 由大排到小為 _____。

- 5 求坐標平面上兩直線 $y = 3x$ 與 $y = -2x + 1$ 的銳夾角為 _____。

- 6 $\sin 115^\circ \cos 325^\circ + \sin 215^\circ \cos(-65^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 7 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的範圍內，不等式 $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 < 0$ 之解的範圍為 _____。

- 8 如圖，已知 $a > 0$ ， $b > 0$ ，函數 $y = a \sin bx$ 的圖形通過最高點 $P(4, 2)$ 及最低點 $Q(12, -2)$ ，且與直線 $y = -\sqrt{3}$ 交於 A 、 B 、 C 三點，則 $\overline{AB}$ 線段長為 c ，則數對 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 9 $\triangle ABC$ 中， $\cos(\angle A) = -\frac{1}{2\sqrt{15}}$ ， $\sin(\angle B - \angle C) = \frac{\sqrt{59}}{9\sqrt{15}}$ ，則 $\cos(2\angle B) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 10 $x \in \mathbb{R}$ ，則函數 $f(x) = 3 + 2(\sin x + \cos x) - \sin 2x$ 的最大值為 _____。



11 已知 $0 \leq x \leq 2\pi$ ，則 $\sin 2x + \cos 2x = \frac{1}{3} + \sin x$ 有 ____ 個實數解。

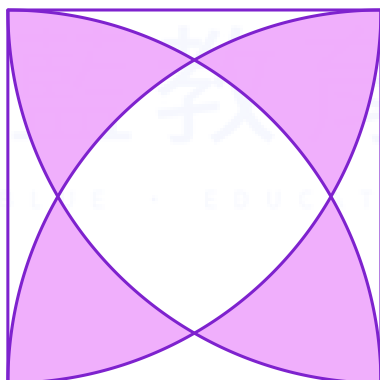
12 已知 $0 \leq x \leq \pi$ ，且 $6 \sin x + 8 \cos x = 5$ ，則 $\sin x =$ ____。

13 已知 $\sin \theta, \cos \theta$ 為 $5x^2 - x + t = 0$ 之兩根，且 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ，則 $\cos 2\theta =$ ____。

14 $(1 + \tan 1^\circ)(\tan 2^\circ + \tan 43^\circ + \tan 2^\circ \cdot \tan 43^\circ)(1 + \tan 44^\circ)(\tan 73^\circ - \tan 13^\circ - \sqrt{3} \tan 73^\circ \cdot \tan 13^\circ) =$ ____。

15 $\frac{1}{\sin \frac{5\pi}{18}} - \frac{\sqrt{3}}{\cos \frac{23\pi}{18}} =$ ____。

16 如圖，邊長為 2 的正方形，分別以四個頂點為圓心，半徑為 2 畫弧，則塗色部分的面積為 ____。

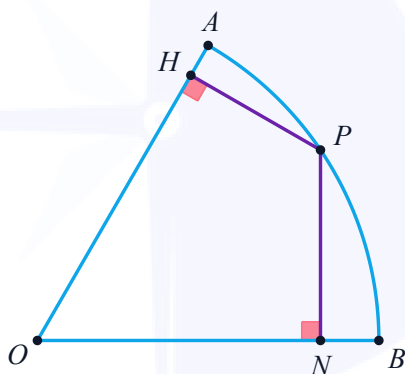


第貳部分：混合題（占 11 分）說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

17-18 題組 如圖，已知扇形 OAB 的半徑 $\overline{OA} = 2$ 且 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ ，而 P 為弧 AB 上的動點，使得 $\angle OHP = \angle ONP = \frac{\pi}{2}$ ，設 $\angle PON = \theta$ 。

17 試選出正確的選項。（多選題，5 分，5-3-1-0）

- (1) $\overline{OH} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$
- (2) $\overline{ON} = 2 \cos \theta$
- (3) 四邊形 $OHPN$ 的周長為 $2 \times \left[\sin \theta + \cos \theta + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \right]$
- (4) 四邊形 $OHPN$ 的周長有最大值時，此時 $\theta = \frac{\pi}{6}$
- (5) 四邊形 $OHPN$ 的周長有最大值為 $2 + 2\sqrt{3}$



18 設 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{12}$ ，當 $\theta = \alpha$ 時，四角形 $OHPN$ 的面積有最大值為何？，此時 $\tan \alpha = ?$ （非選擇題，6 分）

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/tcgs-114a-g11a-1

答案一覽

第 1 題 (1)(3)(4)(5)

第 2 題 (1)(3)(4)

第 3 題 (2)(3)(4)(5)

第 4 題 $f > e > c > d > b > a > g$

第 5 題 $\frac{\pi}{4}$ (即 45°)

第 6 題 $\frac{1}{2}$

第 7 題 $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

第 8 題 $\left(2, \frac{\pi}{8}, \frac{40}{3}\right)$

第 9 題 $-\frac{5}{54}$

第 10 題 5

第 11 題 4

第 12 題 $\frac{3+4\sqrt{3}}{7^{10}}$

第 13 題 $-\frac{1}{25}$

第 14 題 $2\sqrt{3}$

第 15 題 4

第 16 題 $\frac{4\pi}{3} + 8\sqrt{3} - 16$

第 17 題 (2)(3)(4)(5)

第 18 題 最大值 $\frac{3}{2}$; $\tan \alpha = 2 - \sqrt{3}$

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)



多選 1~3：週期、圖形性質與化成同一個正弦

- 1 答案 (1)(3)(4)(5)。(1) 對： $\sin(2x+4) - 8 < 0$ ，所以 $y = 8 - \sin(2x+4)$ ，週期 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 。(2) 錯： $\sin 290^\circ$ 、 $\cos 290^\circ$ 都是常數，通分得 $y = \frac{\cos x \cos 290^\circ + \sin x \sin 290^\circ}{\sin 290^\circ \cos 290^\circ} = \frac{\cos(x - 290^\circ)}{\sin 290^\circ \cos 290^\circ}$ ，週期 2π 。
 (3) 對：用 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ 、 $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ 、 $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ ，得 $y = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x$ ，週期 π 。(4) 對： $|\sin(x + \pi)| = |\sin x|$ 、 $|\cos(x + \pi)| = |\cos x|$ ，所以 π 是週期；而 $x = 0$ 時 $y = 1$ 、 $x = \frac{\pi}{2}$ 時 $y = 2$ ， $\frac{\pi}{2}$ 不是週期，週期為 π 。(5) 對：展開得 $\cos^2 x + \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x$ ，週期 π 。

(3)(5) 的 $\cos 2x$ 與 $\sin 2x$ 可以再疊合成一個 $\sin(2x + \varphi)$ ，週期一樣是 π 。(1) 的絕對值沒有把圖形翻上來（裡面恆負），所以週期沒有減半。

- 2 答案 (1)(3)(4)。(1) 對： $\sin 340^\circ = -\sin 20^\circ$ ，而 $1 \pm \sin 20^\circ = \sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ \pm 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ = (\cos 10^\circ \pm \sin 10^\circ)^2$ ； $\cos 10^\circ > \sin 10^\circ > 0$ ，所以原式 $= (\cos 10^\circ - \sin 10^\circ) - (\cos 10^\circ + \sin 10^\circ) = -2 \sin 10^\circ$ 。(2) 錯：180 沒有度的符號，是 180 弧度； $\tan$ 的週期是 π ，兩個角的差要是 π 的整數倍才相等，而 $\frac{180}{\pi} \approx 57.3$ 不是整數。(3) 對： $-1 \leq \frac{x}{7} \leq 1$ ，只需看 $-7 \leq x \leq 7$ ($7 \approx 2.23\pi$)。 $x > 0$ 時： $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 有 1 個交點； $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ 有 1 個 ($x = 2\pi$ 時 $\cos x = 1 > \frac{2\pi}{7}$)； $2\pi < x < 7$ 有 1 個 ($x = 7$ 時 $\cos 7 < 1 = \frac{7}{7}$)。 $x < 0$ 時直線在 x 軸下方， $\cos x < 0$ 的範圍只有 $-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$ ：兩端 $\cos x = 0$ 在直線上方，中間 $x = -\pi$ 時 $\cos x = -1 < -\frac{\pi}{7}$ 在直線下方，有 2 個交點。共 5 個。(4) 對： $\cos(-x) = \cos x$ ，所以 $f(-x) = f(x)$ 。(5) 錯： $x = \frac{\pi}{4}$ 時 $y = 2$ ， $x = -\frac{\pi}{4}$ 時 $y = -1 + 1 = 0$ ，不對稱於 y 軸。

(2) 若寫成 180° 就會相等；題目故意不寫度的符號。

- 3 答案 (2)(3)(4)(5)。先化簡： $f(x) = 4 \sin x \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x - 1 = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - 1$ 。(1) 錯：最大值 $2 - 1 = 1$ 。(2) 對：週期 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 。(3) 對： $y = \sin 2x$ 鉛直伸縮 2 倍得 $y = 2 \sin 2x$ ，左移 $\frac{\pi}{12}$ 得 $y = 2 \sin 2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$ ，再下移 1。(4) 對：右移 $\frac{11\pi}{12}$ 得 $\sin 2 \left(x - \frac{11\pi}{12} \right) = \sin \left(2x - \frac{11\pi}{6} \right) = \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$ (兩角差 2π)，再伸縮 2 倍、下移 1。(5) 對： $\frac{4\pi}{3} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 時 $\frac{17\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{19\pi}{6}$ ，減去 2π 是 $\frac{5\pi}{6}$ 到 $\frac{7\pi}{6}$ ，落在 $\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{3\pi}{2}$ 之間，正弦嚴格遞減。
 左右平移是對 x 本身加減：左移 $\frac{\pi}{12}$ 是把 x 換成 $x + \frac{\pi}{12}$ ，角度變化量要再乘 2。

看到一堆正弦、餘弦的乘積或平方，先降次、疊合成一個正弦函數，週期、極值、平移、增減都從那一個式子讀。



填充 4~7：弧度比大小、夾角、差角公式與三角不等式

- 4 用 $2\pi \approx 6.283$ 、 $\frac{\pi}{2} \approx 1.571$ 把每個角化到容易比的位置。 $f = \cos \pi^\circ$ ， $\pi^\circ \approx 3.14^\circ \approx 0.055$ （弧度）。
 $e = \sin 8 = \sin(8 - 2\pi)$ ， $8 - 2\pi \approx 1.717 = \frac{\pi}{2} + 0.146$ ，所以 $e = \cos 0.146$ 。 $c = \cos 7 = \cos(7 - 2\pi) = \cos 0.717$ 。 $d = \cos 8 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 0.146\right) = -\sin 0.146$ 。 $b = \sin 6 = -\sin(2\pi - 6) = -\sin 0.283$ 。 $a = \sin 5 = -\sin(2\pi - 5) = -\sin 1.283$ 。 $g = \cos \pi = -1$ 。在 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 之間餘弦遞減：
 $\cos 0.055 > \cos 0.146 > \cos 0.717 > 0$ ，即 $f > e > c > 0$ ；正弦遞增： $\sin 0.146 < \sin 0.283 < \sin 1.283 < 1$ ，即 $0 > d > b > a > g$ 。所以 $f > e > c > d > b > a > g$ 。
 流傳版本的參考答案寫 $f > c > e > d > b > a > g$ ，但依題幹 $e = \sin 8 \approx 0.989$ 、 $c = \cos 7 \approx 0.754$ ， $e > c$ ，順序應為 $f > e > c > d > b > a > g$ 。另外 f 的角是 π 度（約 3.14° ），不是 π 弧度。
- 5 設兩直線的斜角為 α 、 β ， $\tan \alpha = 3$ 、 $\tan \beta = -2$ ，其中 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 。由正切的差角公式
 $\tan(\beta - \alpha) = \frac{-2 - 3}{1 + (-2) \cdot 3} = \frac{-5}{-5} = 1$ ，且 $0 < \beta - \alpha < \pi$ ，所以 $\beta - \alpha = \frac{\pi}{4}$ 。兩直線的夾角為 $\frac{\pi}{4}$ 與 $\frac{3\pi}{4}$ ，銳夾角是 $\frac{\pi}{4}$ 。
- 6 $\sin 115^\circ = \sin 65^\circ$ ， $\cos 325^\circ = \cos 35^\circ$ ， $\sin 215^\circ = -\sin 35^\circ$ ， $\cos(-65^\circ) = \cos 65^\circ$ 。原式 =
 $\sin 65^\circ \cos 35^\circ - \cos 65^\circ \sin 35^\circ = \sin(65^\circ - 35^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 。
- 7 把 $\sin^2 x$ 換成 $1 - \cos^2 x$ ： $2 - 2\cos^2 x + 3\cos x - 3 < 0$ ，即 $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 > 0$ ， $(2\cos x - 1)(\cos x - 1) > 0$ ，得 $\cos x < \frac{1}{2}$ 或 $\cos x > 1$ （不可能）。在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 內 $\cos x < \frac{1}{2}$ 的範圍是 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$ 。
 $\cos x = 1$ （ $x = 0、2\pi$ ）時左邊等於 0，不滿足「 < 0 」，兩個端點本來就不在解裡。

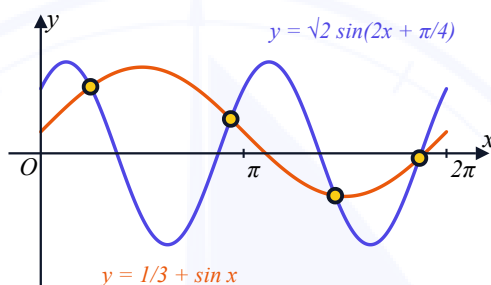
填充 8~11：圖形判讀、和角公式、代換與數交點

- 8 最高點的 y 坐標是 2，所以 $a = 2$ 。相鄰的最高點、最低點 x 坐標差 $12 - 4 = 8$ 是半個週期，週期
 $16 = \frac{2\pi}{b}$ ， $b = \frac{\pi}{8}$ 。解 $2\sin \frac{\pi x}{8} = -\sqrt{3}$ ： $\sin \frac{\pi x}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\frac{\pi x}{8} = -\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}$ （再加 2π 的整數倍），即
 $x = -\frac{8}{3} + 16k$ 或 $x = \frac{32}{3} + 16k$ 。由圖， A 在 y 軸左邊最靠近原點， A 的 x 坐標為 $-\frac{8}{3}$ ； $B、C$ 在 Q
 的兩側， x 坐標為 $\frac{32}{3}$ 、 $\frac{40}{3}$ 。所以 $c = \overline{AB} = \frac{32}{3} + \frac{8}{3} = \frac{40}{3}$ 。
 $B、C$ 對稱於 $x = 12$ ： $12 \mp \frac{4}{3}$ ，可以用來檢查。
- 9 $\angle B + \angle C = \pi - \angle A$ ，所以 $\cos(B + C) = -\cos A = \frac{1}{2\sqrt{15}}$ ， $\sin(B + C) = \sin A = \sqrt{1 - \frac{1}{60}} = \frac{\sqrt{59}}{2\sqrt{15}}$ 。 $\cos A < 0$ ， $\angle A$ 是鈍角， $\angle B、\angle C$ 都是銳角， $-\frac{\pi}{2} < B - C < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\cos(B - C) > 0$ ：
 $\cos(B - C) = \sqrt{1 - \frac{59}{1215}} = \sqrt{\frac{1156}{1215}} = \frac{34}{9\sqrt{15}}$ 。 $2B = (B + C) + (B - C)$ ，由和角公式 $\cos 2B =$
 $\frac{1}{2\sqrt{15}} \cdot \frac{34}{9\sqrt{15}} - \frac{\sqrt{59}}{2\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{59}}{9\sqrt{15}} = \frac{34 - 59}{270} = -\frac{5}{54}$ 。
 關鍵是把 $2B$ 拆成 $(B + C) + (B - C)$ ，而 $B + C$ 的正弦、餘弦由 $\angle A$ 決定。



- 10 令 $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ 。平方得 $t^2 = 1 + \sin 2x$, $\sin 2x = t^2 - 1$ 。
 $f = 3 + 2t - (t^2 - 1) = -t^2 + 2t + 4 = -(t - 1)^2 + 5$ 。 $t = 1$ 在範圍內 (例如 $x = 0$)，所以最大值是 5。

- 11 左邊疊合成 $\sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ (週期 π 、振幅 $\sqrt{2}$)，右邊是 $y = \sin x$ 上移 $\frac{1}{3}$ 。在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 畫出兩個圖形數交點 (見附圖)。用幾個點確認上下關係，令 $h(x) = \text{左邊} - \text{右邊}$ ： $h(0) = \frac{2}{3} > 0$ ； $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.04 < 0$ ； $h(\pi) = \frac{2}{3} > 0$ ； $h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 - \frac{1}{3} + 1 = -\frac{1}{3} < 0$ ； $h(2\pi) = \frac{2}{3} > 0$ 。正負號換了 4 次，四段各有一個交點，共 4 個實數解。



$x = \frac{\pi}{4}$ 附近兩個圖形很接近 (左邊 1、右邊約 1.04)，第一個交點在 $\frac{\pi}{4}$ 之前；畫圖時這裡要算值確認，不能只憑感覺。

填充 12~16：聯立平方關係、倍角、正切公式變形、疊合與扇形面積

- 12 $\cos x = \frac{5 - 6 \sin x}{8}$ ，代入 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ：令 $s = \sin x$, $64s^2 + (5 - 6s)^2 = 64$ ，即 $100s^2 - 60s - 39 = 0$, $s = \frac{60 \pm \sqrt{3600 + 15600}}{200} = \frac{60 \pm 80\sqrt{3}}{200} = \frac{3 \pm 4\sqrt{3}}{10}$ 。 $0 \leq x \leq \pi$ 時 $\sin x \geq 0$ ，而 $\frac{3 - 4\sqrt{3}}{10} < 0$ 不合，所以 $\sin x = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}$ 。

也可以疊合： $6 \sin x + 8 \cos x = 10 \sin(x + \varphi)$ ，其中 $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ 、 $\sin \varphi = \frac{4}{5}$ ； $\sin(x + \varphi) = \frac{1}{2}$ 且 $x + \varphi$ 在 φ 到 $\pi + \varphi$ 之間，得 $x + \varphi = \frac{5\pi}{6}$ ，再用差角公式算 $\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \varphi\right)$ ，答案相同。

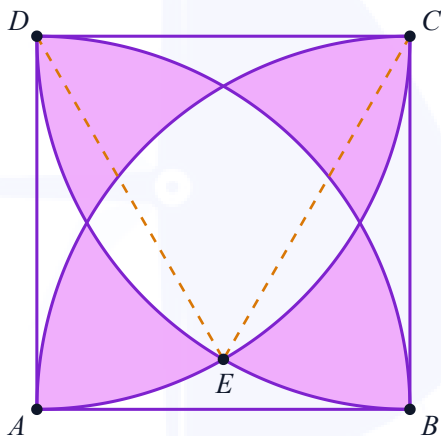
- 13 由根與係數： $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$ 。平方： $1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{25}$, $2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{24}{25}$ 。 $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{49}{25}$ ； θ 在第二象限， $\sin \theta > 0 > \cos \theta$ ，所以 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5}$ 。 $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta) = \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) = -\frac{7}{25}$ 。
 此時 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ 、 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ ，兩根之積 $\frac{t}{5} = -\frac{12}{25}$, $t = -\frac{12}{5}$ 。

- 14 若 $A + B = 45^\circ$ ，由 $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = 1$ 得 $\tan A + \tan B + \tan A \tan B = 1$ ，兩邊加 1 再因式分解： $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$ 。所以 $(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 44^\circ) = 2$, $\tan 2^\circ + \tan 43^\circ + \tan 2^\circ \tan 43^\circ = 1$ 。又 $\tan(73^\circ - 13^\circ) = \frac{\tan 73^\circ - \tan 13^\circ}{1 + \tan 73^\circ \tan 13^\circ} = \sqrt{3}$ ，得 $\tan 73^\circ - \tan 13^\circ - \sqrt{3} \tan 73^\circ \tan 13^\circ = \sqrt{3}$ 。原式 $= 2 \times 1 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ 。



15 $\frac{23\pi}{18} = \pi + \frac{5\pi}{18}$ ，所以 $\cos \frac{23\pi}{18} = -\cos \frac{5\pi}{18}$ 。令 $\varphi = \frac{5\pi}{18}$ ，原式 $= \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{\sqrt{3}}{\cos \varphi} = \frac{\cos \varphi + \sqrt{3} \sin \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi}$ 。
分子疊合： $2 \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) = 2 \sin \frac{4\pi}{9}$ ；分母 $= \frac{1}{2} \sin 2\varphi = \frac{1}{2} \sin \frac{5\pi}{9}$ 。而 $\frac{4\pi}{9} + \frac{5\pi}{9} = \pi$ ，兩個正弦相等，所以原式 $= \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$ 。

16 把正方形頂點依序記為 A 、 B 、 C 、 D （見附圖），四條弧把正方形分成三種區域：中央一塊、貼著四邊的白色四塊（每塊面積設為 T ）、四個角落的塗色四塊（每塊面積設為 K ）。以 C 、 D 為圓心的兩弧交於 E ， $\overline{CE} = \overline{DE} = \overline{CD} = 2$ ， $\triangle CDE$ 是正三角形。兩個四分之一圓重疊的部分 = 兩個圓心角 $\frac{\pi}{3}$ 的扇形 $- \triangle CDE = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$ 。貼著 $\overline{AB}$ 的白色那塊在這兩個四分之一圓之外：
 $T = 4 - \left[\pi + \pi - \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right) \right] = 4 - \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$ 。再看以 C 為圓心的四分之一圓之外的部分，面積 $4 - \pi$ ，由 A 角落的塗色一塊與貼著 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AD}$ 的白色兩塊組成： $K + 2T = 4 - \pi$ ， $K = 4 - \pi - 2 \left(4 - \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right) = \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3} - 4$ 。塗色面積 $4K = \frac{4\pi}{3} + 8\sqrt{3} - 16$ 。



答案約 2.05，大約是正方形面積 4 的一半，與圖相符；扇形面積用 $\frac{1}{2}r^2\theta$ （ θ 為弧度）。

三角式求值先看角度之間的關係（相加是特別角、互補、差一圈），再決定用哪個公式；面積題先把區域分類、設未知數列式。

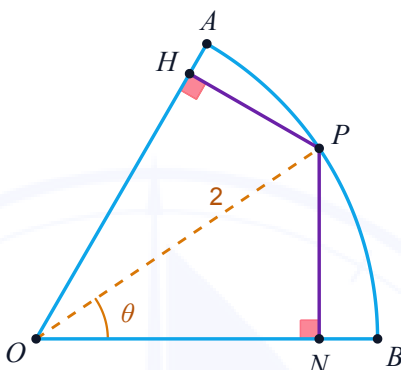
御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



混合題 17~18：扇形內的四邊形 OHPN

想法 連 $\overline{OP}$, $\overline{OP} = 2$, 把四邊形分成兩個直角三角形。△ONP 中 $\angle PON = \theta$: $\overline{ON} = 2 \cos \theta$, $\overline{PN} = 2 \sin \theta$ 。△OHP 中 $\angle POH = \frac{\pi}{3} - \theta$: $\overline{OH} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$, $\overline{PH} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$ 。



17 答案 (2)(3)(4)(5)。 (1) 錯: $\overline{OH} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$, $2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$ 是 $\overline{PH}$ 。 (2) 對。 (3) 對: 周長 = $\overline{ON} + \overline{PN} + \overline{PH} + \overline{OH}$, 就是四個長度相加。 (4)(5) 對: 用差角公式展開, $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sin \theta$, 所以中括號內 = $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{3+\sqrt{3}}{2} \cos \theta = \frac{1+\sqrt{3}}{2} (\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) = (1+\sqrt{3}) \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$, 周長 = $2(1+\sqrt{3}) \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ 。 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ 時 $\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ 時正弦為 1, 周長最大值 $2 + 2\sqrt{3}$ 。
 $\frac{3+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, 提出公因數後才看得出可以疊合。 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 時 P 在弧的中點, 圖形左右對稱。

18 面積 = $\triangle ONP + \triangle OHP = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \theta \cdot 2 \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \cdot 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \sin 2\theta + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2\theta\right)$ 。展開第二項: $\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2\theta\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta$, 所以面積 = $\frac{3}{2} \sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta = \sqrt{3} \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ 。 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{12}$ 時 $\frac{\pi}{6} \leq 2\theta + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{3}$, 正弦在這一段遞增, 所以 $\theta = \frac{\pi}{12}$ 時面積最大, 最大值 $\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{12}$ 。 $\tan \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3}$ 。

流傳版本的參考答案寫最大值 $\frac{2}{3}$, 但 $\theta = \frac{\pi}{12}$ 時面積 = $\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}$, 應為 $\frac{3}{2}$; $\tan \alpha = 2 - \sqrt{3}$ 與流傳版本一致。範圍限制在 $\frac{\pi}{12}$ 以內, 最大值發生在端點, 不是正弦等於 1 的地方。

先用半徑把圖形切成直角三角形, 邊長都寫成 θ 的正弦、餘弦; 周長、面積疊合成一個正弦後, 再看 θ 的範圍決定極值在哪裡。



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自台中女中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tcgs-114a-g11a-1