

台中女中 114 學年度上學期 高一第一次段考



御藍教育

範圍：數與式（實數、絕對值、指數、常用對數） · 多選題 3 題（30 分）、填充題 14 題（70 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/tcgs-114a-g10-1

一、多選題（占 30 分；第 1 題至第 3 題，每題 10 分，每個選項各 2 分）

1 下列哪些選項是正確的？

- (1) 若 $a - b$, $a + b$ 都是有理數，則 a, b 為有理數
- (2) 若 a, b 都是無理數，則 $a - b, a + b$ 必為無理數
- (3) 設 a, b 是實數，且 $a + b\sqrt{3} = 0$ ，則 $a = b = 0$
- (4) 數線上可使用尺規作圖標出 $\sqrt[6]{27}$ 的位置
- (5) 若 a 為一實數，且 a^4 與 a^6 都是有理數，則 a 是有理數

2 下列哪些選項是正確的？

- (1) 設 x 為實數，若 $|x + 1| : |x - 3| = 5 : 4$ ，則 x 為 4
- (2) 若 a, b 為實數且 $a < b$ ，則 $\frac{3a + 2b}{4} > b$
- (3) 若 a, b 為實數且 $a < b$ ，則 $\frac{a + b}{2} < \frac{2a + 3b}{5} < \frac{4a + 5b}{8}$
- (4) 若 a, b 為實數且 $a < b$ ，若 $c = -\frac{1}{7}a + \frac{8}{7}b$ ，則 $|a - b| = 7|c - b|$
- (5) 若 a, b 為實數且 $a < b$ ，若 $c = -\frac{1}{7}a + \frac{8}{7}b$ ，則 c 在 a, b 之外

3 設 $x^2 - 4x + 1 = 0$ ，則下列選項何者正確？

- (1) $x + \frac{1}{x} = 4$
- (2) $x - \frac{1}{x} = 2\sqrt{3}$
- (3) $x^2 - \frac{1}{x^2} = 8\sqrt{3}$
- (4) $x^4 - \frac{1}{x^4} = 112\sqrt{3}$
- (5) $x^3 + \frac{1}{x^3} = 52$

二、填充題（占 70 分；第 4 題至第 17 題，每題 5 分）

4 試求 $\sqrt[6]{\frac{4}{27}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[3]{16}}{3}} \times \left(\frac{81}{16}\right)^{-0.25} + 10^{-\log 3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tcgs-114a-g10-1

5 設 $a^2 = 5$ ，試求 $(a+2)(a-2)(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$ 之值為何 ____。

6 設 x, y 為有理數，若 $(4+\sqrt{12})x + (2-\sqrt{3})y = 10 + \sqrt{27}$ ，則數對 (x, y) 之值為 ____。

7 將 $\frac{2467}{3330}$ 化成小數，令 a_n 表 $\frac{2467}{3330}$ 小數點後第 n 位數字，試求 $a_{2025} =$ ____。

8 若 $|ax+2| \leq b$ 的解為 $-3 \leq x \leq 7$ ，求數對 $(a, b) =$ ____。

9 目前國際使用芮氏規模來表示地震強度。設 $E(r)$ 為芮氏規模 r 時所釋放出來的能量， r 與 $E(r)$ 的關係如下： $\log E(r) = 5.24 + 1.44r$ 。試問：芮氏規模 7.2 的地震所釋放出來能量是芮氏規模 5.2 的地震所釋放出來能量的 ____ 倍。(四捨五入至整數位，已知 $10^{1.44} = 27.54$)

10 試問有多少個整數 x 滿足 $10^8 < 2^x < 8^{10}$ ：____。

11 在數線上， C, D 兩點在 A, B 之間，已知 C 點坐標為 5， D 點坐標為 6，且 $\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 2$ ， $\overline{AD} : \overline{BD} = 3 : 2$ ，則 A 點坐標為 ____。

12 已知 a, b 均為正數，若 $a + 2b = 2$ ，試求 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值 ____。



- 13 三隻螞蟻放在數線上，而且三隻螞蟻都沿著數線移動，在某個時刻三隻螞蟻的位置分別在 $A(-4)$ ， $B(3)$ ， $C(x)$ ，且三隻螞蟻彼此的距離和小於等於 16，試問 x 的範圍？_____。

- 14 我們將「 $2^n - 1$ 」型式的質數稱為梅森質數，科學家於 2017 年底，發現了當時的最大質數：「 $2^{77232917} - 1$ 」，同時此數也是第 50 個梅森質數（由小而大排列）。日本出版社虹色社把這個第 50 個梅森質數印成一本書出版，書名為（2017 年最大の質數）。假設每頁可以印出 3000 個數字（紙張為 A4），試問該書將所有的數字都印出來，至少需要 _____ 頁。

- 15 溶液中的 pH 值是指溶液中氫離子濃度的常用對數值乘上 (-1) 。若以 $[H^+]$ 表示氫離子濃度，則 $pH = -\log[H^+]$ ，例如純水在 25°C 時的 $[H^+] = 10^{-7}$ 莫耳/升，因此純水的 pH 值為 $-\log 10^{-7} = 7$ 。今有 A 溶液 pH 值為 4， B 溶液 pH 值為 5，若以 A 溶液 20 毫升與 B 溶液 10 毫升充分混合，並假設混合後體積不變，求新溶液的 pH 值為何？_____。（四捨五入到小數點以下第 2 位）

- 16 已知 $a = \sqrt{12 + 4\sqrt{5}}$ ， $b = \sqrt{12 - 4\sqrt{5}}$ 。若 $x = 10^a \times 10^b$ ，則 $\log x$ 之值為何？_____。

- 17 已知 $2 \approx 10^{0.3010}$ ， $3 \approx 10^{0.4771}$ ， $7 \approx 10^{0.8451}$ 。問 3^{50} 是幾位數為 a 又最高位數字為 b ，求數對 $(a, b) =$ _____。

御藍教育

ROYAL BLUE • EDUCATION



網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/tcgs-114a-g10-1

答案一覽

- 第 1 題 (1)(4)
第 2 題 (3)(4)(5)
第 3 題 (1)(5)
第 4 題 $\frac{7}{9}$
第 5 題 61
第 6 題 (2, 1)
第 7 題 0
第 8 題 (-1, 5)
第 9 題 758
第 10 題 3
第 11 題 $\frac{15}{4}$
第 12 題 4
第 13 題 $-5 \leq x \leq 4$
第 14 題 7750
第 15 題 4.15
第 16 題 $2\sqrt{10}$
第 17 題 (24, 7)

多選題：實數的性質、分點與乘法公式

- 1 答案 (1)(4)。(1) 對： $a = \frac{(a+b)+(a-b)}{2}$ 、 $b = \frac{(a+b)-(a-b)}{2}$ ，有理數加減、除以 2 仍是有理數。(2) 錯： $a = \sqrt{2}$ ， $b = -\sqrt{2}$ 時 $a + b = 0$ 是有理數。(3) 錯：題目只說 a, b 是實數，取 $a = -\sqrt{3}$ ， $b = 1$ 就有 $a + b\sqrt{3} = 0$ 。(4) 對： $\sqrt[6]{27} = 3^{\frac{3}{6}} = \sqrt{3}$ ，以 3 和 1 為兩段作半圓，就能作出長 $\sqrt{3}$ 的線段。(5) 錯： $a = \sqrt{2}$ 時 $a^4 = 4$ 、 $a^6 = 8$ 都是有理數，但 a 是無理數。
(3) 要 a, b 都是有理數才能推出 $a = b = 0$ ；(5) 只能推出 $a^2 = \frac{a^6}{a^4}$ 是有理數。



- 2 答案 (3)(4)(5)。 (1) 錯： $4|x+1| = 5|x-3|$ ，同號時 $4(x+1) = 5(x-3)$ 得 $x = 19$ ，異號時 $4(x+1) = -5(x-3)$ 得 $x = \frac{11}{9}$ ；代 $x = 4$ 得 $5:1$ 。 (2) 錯： $\frac{3a+2b}{4} - b = \frac{3a-2b}{4}$ ，取 $a = 0, b = 1$ 是負的。 (3) 對：三個數依序是 $a + \frac{1}{2}(b-a)$ 、 $a + \frac{3}{5}(b-a)$ 、 $a + \frac{5}{8}(b-a)$ ，而 $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{5}{8}$ 、 $b-a > 0$ ，所以遞增。 (4) 對： $c-b = \frac{b-a}{7}$ ，所以 $7|c-b| = b-a = |a-b|$ 。 (5) 對： $c-b = \frac{b-a}{7} > 0$ ， c 在 b 的右邊，落在 a, b 之外。

流傳版本的參考答案寫 (4)(5)，但 (3) 也成立：把每個數寫成「 a 加上 $b-a$ 的幾分之幾」比係數即可。

- 3 答案 (1)(5)。 $x \neq 0$ ，方程式同除以 x 得 $x + \frac{1}{x} = 4$ ，(1) 對。 $(x - \frac{1}{x})^2 = (x + \frac{1}{x})^2 - 4 = 12$ ， $x - \frac{1}{x} = \pm 2\sqrt{3}$ ；方程式兩根 $x = 2 \pm \sqrt{3}$ ，取 $x = 2 - \sqrt{3}$ 時 $x - \frac{1}{x} = -2\sqrt{3}$ ，所以 (2) 錯。同理 $x^2 - \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})(x - \frac{1}{x}) = \pm 8\sqrt{3}$ ，(3) 錯； $x^2 + \frac{1}{x^2} = 16 - 2 = 14$ ， $x^4 - \frac{1}{x^4} = 14 \times (\pm 8\sqrt{3}) = \pm 112\sqrt{3}$ ，(4) 錯。(5) 對： $x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x}) = 64 - 12 = 52$ 。

和的形式只有一個值；差的形式要看 x 取哪一根，正負不定。

判斷「一定成立」先找反例；比較分點先寫成「起點加上全長的幾分之幾」。

填充 4~7：指數律、乘法公式與循環小數

- 4 $\sqrt[6]{\frac{4}{27}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$ ， $\sqrt{\frac{3\sqrt{16}}{3}} = (2^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-1})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$ ，兩者相乘得 $2 \cdot 3^{-1} = \frac{2}{3}$ 。 $(\frac{81}{16})^{-\frac{1}{4}} = (\frac{3}{2})^{-1} = \frac{2}{3}$ 。
 $10^{-\log 3} = \frac{1}{10^{\log 3}} = \frac{1}{3}$ 。合計 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$ 。
- 5 重新配對： $(a+2)(a^2-2a+4) = a^3+8$ ， $(a-2)(a^2+2a+4) = a^3-8$ 。相乘得 $a^6-64 = (a^2)^3-64 = 125-64 = 61$ 。
 先用立方和、立方差公式配對，比四個因式直接展開快。
- 6 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ ，整理成 $(4x+2y) + (2x-y)\sqrt{3} = 10 + 3\sqrt{3}$ 。 x, y 為有理數，有理部分與 $\sqrt{3}$ 的係數分別相等： $4x+2y = 10$ 、 $2x-y = 3$ ，解得 $x = 2, y = 1$ 。
- 7 $\frac{2467}{3330} = 0.7 + \frac{136}{3330}$ ，而 $\frac{136}{3330} = \frac{408}{9990} = 0.0408$ ，所以 $\frac{2467}{3330} = 0.7408$ 。第 1 位是 7，從第 2 位起「4、0、8」三位一循環。 $2025-1 = 2024 = 3 \times 674 + 2$ ，第 2025 位是循環節的第 2 個數字，即 0。
 先扣掉不循環的那一位，再用 3 去除。

填充 8、11~13：絕對值、分點與算幾不等式

- 8 $-3 \leq x \leq 7$ 就是 $|x-2| \leq 5$ (中點 2、半長 5)。 $|ax+2| = |a| \cdot |x + \frac{2}{a}| \leq b$ 的解區間中點是 $-\frac{2}{a}$ ，所以 $-\frac{2}{a} = 2, a = -1$ ；此時不等式為 $|-x+2| = |x-2| \leq b$ ，得 $b = 5$ 。
- 11 若 A 在 B 右邊， C 離 A 較近 (1:2) 而 D 離 B 較近 (3:2)， D 會在 C 左邊，與 $6 > 5$ 不合，所以 A 在左。設 $d = \overline{AB}$ ，則 $C = A + \frac{1}{3}d$ 、 $D = A + \frac{3}{5}d$ ，相減 $\frac{3}{5}d - \frac{1}{3}d = \frac{4}{15}d = 1, d = \frac{15}{4}$ 。 $A = 5 - \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{4} = \frac{15}{4}$ 。
 驗算： $D = \frac{15}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{4} = 6$ ，正確。



- 12 $(\frac{2}{a} + \frac{1}{b})(a + 2b) = 2 + \frac{4b}{a} + \frac{a}{b} + 2 = 4 + \frac{4b}{a} + \frac{a}{b}$ 。由算幾不等式 $\frac{4b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{4} = 4$ ，所以 $2(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}) \geq 8$ ，即 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$ 。等號在 $\frac{4b}{a} = \frac{a}{b}$ ，即 $a = 2b$ 時成立，配合 $a + 2b = 2$ 得 $a = 1, b = \frac{1}{2}$ ，最小值 4。

乘上 $a + 2b$ (等於 2) 湊出乘積為定值的兩項，最後要記得除以 2。

- 13 距離和 $= \overline{AB} + |x + 4| + |x - 3| = 7 + |x + 4| + |x - 3| \leq 16$ ，即 $|x + 4| + |x - 3| \leq 9$ 。 $|x + 4| + |x - 3|$ 是 x 到 -4 與到 3 的距離和： x 在兩點之間時恆為 7； $x > 3$ 時為 $2x + 1 \leq 9$ ，得 $x \leq 4$ ； $x < -4$ 時為 $-2x - 1 \leq 9$ ，得 $x \geq -5$ 。所以 $-5 \leq x \leq 4$ 。

填充 9、10、14~17：常用對數

- 9 $\log E(7.2) - \log E(5.2) = 1.44 \times (7.2 - 5.2) = 2.88$ ，所以 $\frac{E(7.2)}{E(5.2)} = 10^{2.88} = (10^{1.44})^2 = 27.54^2 = 758.4516$ ，四捨五入得 758 倍。
- 10 $8^{10} = 2^{30}$ ，所以 $x < 30$ 。左邊取 $\log: x \log 2 > 8, x > \frac{8}{0.3010} \approx 26.6$ (也可直接看 $2^{26} = 67108864 < 10^8 < 2^{27} = 134217728$)。整數 $x = 27, 28, 29$ ，共 3 個。
- 14 $2^{77232917}$ 的個位數是 2、4、8、6 之一，減 1 不會讓位數變少，所以兩者位數相同。 $\log 2^{77232917} = 77232917 \times \log 2 \approx 77232917 \times 0.30103 \approx 23249424.7$ ，所以是 23249425 位數。 $23249425 \div 3000 \approx 7749.8$ ，至少需要 7750 頁。
用 $\log 2 \approx 0.3010$ 算得 23247108 位，除以 3000 約 7749.04，一樣要 7750 頁。
- 15 A 溶液 $[H^+] = 10^{-4}$ ， B 溶液 $[H^+] = 10^{-5}$ (莫耳/升)。混合後氫離子總量正比於 $20 \times 10^{-4} + 10 \times 10^{-5} = 21 \times 10^{-4}$ ，體積 30 毫升，新濃度 $\frac{21 \times 10^{-4}}{30} = 7 \times 10^{-5}$ 。 $pH = -\log(7 \times 10^{-5}) = 5 - \log 7 \approx 5 - 0.8451 = 4.1549$ ，約 4.15。
要先把氫離子的量加起來再取對數，不能把兩個 pH 值直接加權平均。
- 16 $12 + 4\sqrt{5} = 12 + 2\sqrt{20} = (\sqrt{10} + \sqrt{2})^2$ ，所以 $a = \sqrt{10} + \sqrt{2}$ ；同理 $b = \sqrt{10} - \sqrt{2}$ 。 $x = 10^{a+b}$ ， $\log x = a + b = 2\sqrt{10}$ 。
- 17 $\log 3^{50} = 50 \times 0.4771 = 23.855$ ，首數 23，是 24 位數。尾數 0.855 介於 $\log 7 = 0.8451$ 與 $\log 8 = 3\log 2 = 0.9030$ 之間，所以最高位數字是 7。 $(a, b) = (24, 7)$ 。

$\log N$ 的整數部分決定位數，小數部分決定最高位數字；應用題先把量加總，再取對數。

你們學校的段考卷也想要詳解？考完把題目頁拍照或掃描上傳，我們收到後會盡快做好放上來，一樣免費下載。
上傳：royalblue-education.com/school-exams/submit (上傳前可以先把姓名、座號遮掉)

本卷題目取自台中女中 114 學年度上學期高一第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tcgs-114a-g10-1

孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

御藍教育

ROYAL BLUE • EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tcgs-114a-g10-1