

台中一中 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數（弧度量、三角函數的圖形、和差角與倍角半角公式、正餘弦的疊合） · 單選題 2 題（10 分）、多選題 4 題（20 分）、填充題 10 題（60 分）、混合題 1 題組 2 小題（10 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/tcfsh-114a-g11a-1

第壹部分：選擇（填）題（占 90 分） 一、單選題（占 10 分）說明：第 1 題至第 2 題，每題 5 分。

1 若 $a = \cos 1$ ， $b = \cos 5$ ， $c = \cos 6$ ， $d = \sin 1$ ， $e = \sin 2$ ，則 a, b, c, d, e 五數中，何者值最大？

- (1) a
- (2) b
- (3) c
- (4) d
- (5) e

2 若方程式 $3 \cos 2x = \frac{x}{a}$ 的實根個數不多於 10 個，則滿足條件的整數 a 有幾個？

- (1) 3
- (2) 4
- (3) 5
- (4) 7
- (5) 8

二、多選題（占 20 分）說明：第 3 題至第 6 題，每題 5 分。（每個選項 1 分）

3 下列選項中，哪一個選項之數值恰與 $\left| \sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{2\pi}{11} \right|$ 相同？

- (1) $\left| \sin \frac{6\pi}{11} - \sin \frac{5\pi}{11} \right|$
- (2) $\left| \sin \frac{7\pi}{11} - \sin \frac{6\pi}{11} \right|$
- (3) $\left| \sin \frac{9\pi}{11} - \sin \frac{8\pi}{11} \right|$
- (4) $\left| \sin \frac{14\pi}{11} - \sin \frac{13\pi}{11} \right|$
- (5) $\left| \sin \frac{20\pi}{11} - \sin \frac{19\pi}{11} \right|$



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tcfsh-114a-g11a-1

4 設 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x$ ，試選出正確的選項。

- (1) $y = f(x)$ 的圖形可由 $y = 2 \sin 2x$ 向右平移 $\frac{11\pi}{12}$ 單位得到
- (2) 鉛直線 $x = \frac{13\pi}{6}$ 為 $y = f(x)$ 圖形的對稱軸
- (3) 在區間 $[0, 2\pi)$ 中僅有 2 個實數解 x 滿足方程式 $f(x) = \sqrt{3}$
- (4) 在區間 $[0, 2\pi)$ 中滿足方程式 $f(x) = \frac{1}{3}$ 的所有實數解 x 之和不超過 2π
- (5) $y = f(x)$ 的圖形可由 $y = 4 \cos^2 x$ 的圖形經適當（左右、上下）平移得到

5 下列哪些函數的圖形，可由 $y = \sqrt{2} \cos x$ 的圖形經左右或上下平移而得？

- (1) $y = \sin \sqrt{2}x$
- (2) $y = \sqrt{2} \sin x$
- (3) $\sqrt{2}y = 2 \sin x - 2$
- (4) $y = \sin(x - \sqrt{2}) + \cos(x - \sqrt{2})$
- (5) $y = \sqrt{1 + \cos 2x}$

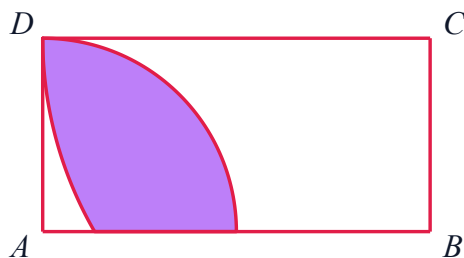
6 給定以下五個函數 $f_1(x) = \sin 2x$ 、 $f_2(x) = \cos 2x$ 、 $f_3(x) = \cos^2 x$ 、 $f_4(x) = \cos^4 x$ 、 $f_5(x) = |\cos 2x|$ ，並令其週期分別為 T_1 、 T_2 、 T_3 、 T_4 、 T_5 ，試選出正確的選項。

- (1) $T_1 = T_2 = \pi$
- (2) 在 T_1 、 T_2 、 T_3 、 T_4 、 T_5 之中，共有 3 個不同的實數值
- (3) T_4 為 T_1 、 T_2 、 T_3 、 T_4 、 T_5 之中的最小值，且 $T_4 = \frac{\pi}{2}$
- (4) 若 $g(x) = f_3(x) + f_4(x)$ ，則 $g(x)$ 的週期恰為 T_3
- (5) 設 m 是實數，且 $h(x) = 15f_1(x) + m \cdot f_2(x) + 25$ 。若對所有實數 x ，皆滿足 $h(x) \geq 0$ ，則 $m \geq 20$

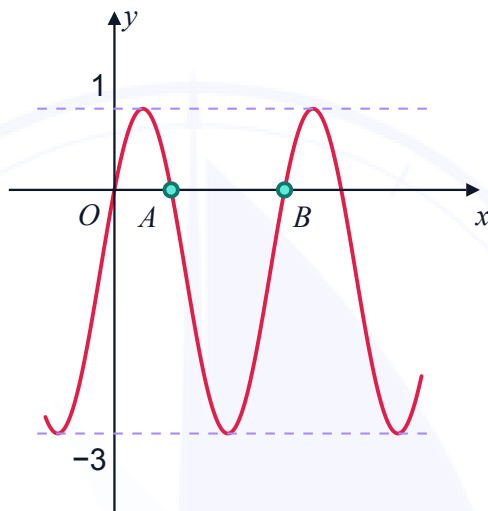
三、填充題（占 60 分）說明：第 7 題至第 16 題，每題 6 分。

7 $\sin 470^\circ \cos 130^\circ + \cos 290^\circ \sin(-50^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（化為最簡根式）

8 圖中，有一長方形 $ABCD$ ，其中 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{AD} = 3$ 。今分別以 A 為圓心、 $\overline{AD}$ 為半徑；以 C 為圓心、 $\overline{CD}$ 為半徑，分別作兩圓弧。求所圍出的套色區域面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。（化為最簡根式）



- 9 圖為函數 $y = a \sin(b(x+c)) + d$ 的部分圖形，其中 $a > 0, b > 0, -\pi \leq c \leq \frac{\pi}{3}$ 。已知 $A\left(\frac{2\pi}{9}, 0\right)$ ， $B\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ ，求序組 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數)



- 10 已知 $0 \leq x \leq \pi$ ，滿足不等式 $\sin 3x \geq \frac{1}{2}$ 的解恰為 $a \leq x \leq b$ 或 $c \leq x \leq d$ ，求 $d - c + b - a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數)

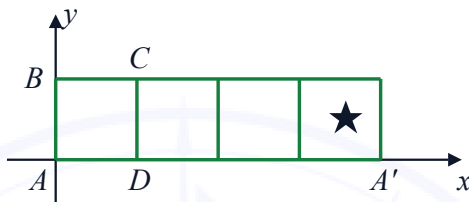
- 11 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的範圍內，求方程式 $2 \cos^2 x - 3 \sin x - 3 = 0$ 所有實數解之和為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數)

- 12 若 $270^\circ < A < 360^\circ$ 且 $\sqrt{3} \sin A + \cos A = 2 \sin 932^\circ$ ，則 $A = \underline{\hspace{2cm}}$ 度。

- 13 已知 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ 。若 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ， $\cos \beta = \frac{12}{13}$ ，則 $\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡根式)



- 14 如圖，座標平面上有一正方形 $ABCD$ ，其中 A 點與原點 O 重合、 B 點座落在 y 軸、 D 點座落在 x 軸正向。今依序以頂點 D 、 C 、 B 為旋轉中心，將此正方形沿 x 軸正向，順時針滾動三次至星號位置停止，最後 A 點停留在 A' 點位置。若滾動過程中， A 點之移動軌跡與 x 軸所形成的封閉區域面積為 $10\pi + 10$ ，則 A 點移動軌跡長度為 ____。(化為最簡根式)



- 15 若函數 $f(x) = \sin x + |\cos x|$ 在區間 $[0, 2\pi]$ 上之最大值為 M 、最小值為 m ，則 $M^2 + m^2$ 之值為 ____。

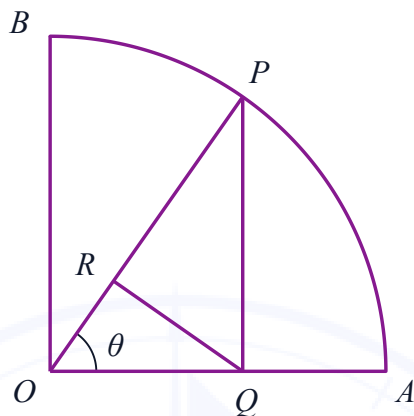
- 16 將 $y = f(x) = 4 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的圖形水平伸縮為 $\frac{1}{2}$ 倍，再向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 單位，再向上平移 4 單位，最後鉛直伸縮為 2 倍，得到函數 $y = g(x)$ 的圖形。若 $g(x_1) \cdot g(x_2) = 256$ ，且 $-4\pi \leq x_1 \leq 4\pi$ 、 $-4\pi \leq x_2 \leq 4\pi$ ，則 $3x_1 - x_2$ 的最大值為 ____。(化為最簡分數)

第貳部分：混合題（占 10 分） 說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

17–18 題組 如圖，給定一扇形 OAB ，其中角 $AOB = 90^\circ$ ，半徑 $\overline{OA} = \overline{OB} = 4$ ， P 為 AB 弧上之動點。其中 $\overline{PQ} \perp \overline{OA}$ ，垂足為點 Q ； $\overline{QR} \perp \overline{OP}$ ，垂足為點 R 。假設角 $AOP = \theta$ ，試回答以下問題：



- 17 請以 θ 表示 $\overline{PR} + \overline{QR}$ 。(非選擇題，3 分)



- 18 求 $\overline{PR} + \overline{QR}$ 的最大值為何？又最大值發生時， $\theta = ?$ （非選擇題，7 分）

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/tcfsh-114a-g11a-1

答案一覽

第 1 題 (3)

第 2 題 (2)

第 3 題 (3)(4)(5)

第 4 題 (1)(2)(5)

第 5 題 (2)(3)(4)

第 6 題 (1)(4)

第 7 題 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

第 8 題 $\frac{21\pi + 18\sqrt{3} - 72}{4}$

第 9 題 $\left(2, 3, -\frac{11\pi}{18}, -1\right)$ 或 $\left(2, 3, \frac{\pi}{18}, -1\right)$

第 10 題 $\frac{4\pi}{9}$

第 11 題 $\frac{9\pi}{2}$

第 12 題 298

第 13 題 $-\frac{7\sqrt{130}}{130}$

第 14 題 $(\sqrt{10} + \sqrt{5})\pi$

第 15 題 3

第 16 題 $\frac{44\pi}{3}$

第 17 題 $4\sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta$ (即 $2\sin 2\theta - 2\cos 2\theta + 2$)

第 18 題 最大值 $2\sqrt{2} + 2$, 此時 $\theta = \frac{3\pi}{8}$

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code, 在網頁上勾你錯的題號, 馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前, 註冊後在首頁填上段考日期和範圍, 可以自己產生一份考前藍圖 PDF: 一份模擬卷、詳解, 還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解? 考完把題目頁拍照上傳, 收到會盡快做好放上來: royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)



勾你錯的題號, 看錯在哪幾章, 註冊後直接從那幾章開始練

網頁版: royalblue-education.com/school-exams/tcfsh-114a-g11a-1

單選 1~2：弧度比大小、直線與餘弦圖形的交點

- 1 答案 (3)。全部換成第一象限角的餘弦再比： $c = \cos 6 = \cos(2\pi - 6) \approx \cos 0.28$ ； $b = \cos 5 = \cos(2\pi - 5) \approx \cos 1.28$ ； $d = \sin 1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \approx \cos 0.57$ ； $e = \sin 2 = \cos\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \approx \cos 0.43$ ； $a = \cos 1$ 。在 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 之間餘弦遞減，角度 $0.28 < 0.43 < 0.57 < 1 < 1.28$ ，所以 $c > e > d > a > b$ ，最大的是 c 。

這裡的 1、5、6 都是弧度，6 弧度很接近 $2\pi \approx 6.28$ ，所以 $\cos 6$ 很接近 1。

- 2 答案 (2)。實根個數就是 $y = 3\cos 2x$ 與直線 $y = \frac{x}{a}$ 的交點數。 $3\cos 2x$ 是偶函數， a 換成 $-a$ 只是把圖形左右對調，交點數相同，先看 $a > 0$ 。右半邊 ($x > 0$)： $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 有 1 個交點；之後每個波峰 $x = k\pi$ (高度 3)，只要直線在那裡的高度 $\frac{k\pi}{a} < 3$ 就多 2 個。左半邊 ($x < 0$)：每個波谷 $x = -\frac{\pi}{2} - k\pi$ (高度 -3)，只要直線在那裡的高度大於 -3 就有 2 個。 $a = 1$ ：右邊 $\pi > 3$ 沒有波峰可交，共 1 個；左邊只有 $-\frac{\pi}{2}$ 這個波谷，2 個；合計 3。 $a = 2$ ：右邊 $1 + 2 = 3$ (波峰 π)，左邊 4 (波谷 $-\frac{\pi}{2}$ 、 $-\frac{3\pi}{2}$)，合計 7。 $a = 3$ ：右邊 $1 + 4 = 5$ ，左邊 6，合計 $11 > 10$ ； a 再大直線更平，交點只會更多。所以 $a = \pm 1, \pm 2$ ，共 4 個。

直線過原點但餘弦圖形在 $x = 0$ 是波峰，左右兩邊的交點數不一樣，要分開數；也別忘了負的 a 。

多選 3~6：化簡、疊合、平移與週期

- 3 答案 (3)(4)(5)。用 $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ 、 $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$ 、 $\sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$ 把每個角換回 $\frac{k\pi}{11}$ ($k \leq 5$)。(1) $\sin \frac{6\pi}{11} = \sin \frac{5\pi}{11}$ ，差為 0，不合。(2) $\left| \sin \frac{4\pi}{11} - \sin \frac{5\pi}{11} \right|$ ，不合。(3) $\left| \sin \frac{2\pi}{11} - \sin \frac{3\pi}{11} \right|$ ，合。(4) $\left| -\sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{2\pi}{11} \right|$ ，合。(5) $\left| -\sin \frac{2\pi}{11} + \sin \frac{3\pi}{11} \right|$ ，合。

題幹寫「哪一個選項」，但這題排在多選題，符合的有三個。

- 4 答案 (1)(2)(5)。疊合： $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 。(1) 對：向右平移 $\frac{11\pi}{12}$ 得 $2\sin\left(2x - \frac{11\pi}{6}\right) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 。(2) 對： $x = \frac{13\pi}{6}$ 時 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi}{2}$ ， $f = 2$ 是最大值，過最高點的鉛直線是對稱軸。(3) 錯： $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，而 $\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} < \frac{25\pi}{6}$ ，得 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$ ，有 4 個解。(4) 錯：令 $u = 2x + \frac{\pi}{6}$ ， $\sin u = \frac{1}{6}$ ；設銳角 φ 滿足 $\sin \varphi = \frac{1}{6}$ ($\varphi < \frac{\pi}{6}$)，範圍內的解是 $u = \pi - \varphi, 2\pi + \varphi, 3\pi - \varphi, 4\pi + \varphi$ ，和為 10π ； $x = \frac{u}{2} - \frac{\pi}{12}$ ，四個 x 的和 $= 5\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{14\pi}{3} > 2\pi$ 。(5) 對： $4\cos^2 x = 2\cos 2x + 2 = 2\sin 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$ ，而 $f(x) = 2\sin 2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ ，向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 、向下平移 2 即得。

(4) 的 $u = \varphi$ 比 $\frac{\pi}{6}$ 小，不在範圍內；反而 $u = 4\pi + \varphi$ 在範圍內，要算進去。

- 5 答案 (2)(3)(4)。平移不改變振幅與週期，所以要找振幅 $\sqrt{2}$ 、週期 2π 的正弦型圖形。(1) 錯：振幅 1、週期 $\sqrt{2}\pi$ 。(2) 對： $\sqrt{2}\sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ，向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 。(3) 對： $y = \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}$ ，向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 再向下平移 $\sqrt{2}$ 。(4) 對：疊合得 $y = \sqrt{2}\sin\left(x - \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ ，向右平移 $\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}$ 。(5) 錯： $\sqrt{1 + \cos 2x} = \sqrt{2\cos^2 x} = \sqrt{2}|\cos x|$ ，圖形都在 x 軸上方且有尖點，不是餘弦圖形的平移。



- 6 答案 (1)(4)。 $T_1 = T_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ 。 $f_3(x) = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ ， $T_3 = \pi$ 。 $f_4(x) = \cos^4 x$ ： $f_4(x + \pi) = f_4(x)$ ，且 $f_4(x) = 1$ 只發生在 $x = k\pi$ ，相鄰兩個最高點相距 π ，所以 $T_4 = \pi$ 。 $f_5(x) = |\cos 2x|$ 把 $\cos 2x$ 的下半部翻上來，週期減半， $T_5 = \frac{\pi}{2}$ 。(1) 對。(2) 錯：只有 π 、 $\frac{\pi}{2}$ 兩個不同的值。(3) 錯： $T_4 = \pi$ ，最小的是 T_5 。(4) 對： $g(x) = \cos^2 x + \cos^4 x$ ， $g(x + \pi) = g(x)$ ，且 $g(x) = 2$ 只發生在 $\cos^2 x = 1$ 即 $x = k\pi$ ，週期為 $\pi = T_3$ 。(5) 錯： $h(x) = 15 \sin 2x + m \cos 2x + 25$ 的最小值是 $25 - \sqrt{225 + m^2}$ ，恆 ≥ 0 的條件是 $225 + m^2 \leq 625$ ，即 $-20 \leq m \leq 20$ ，例如 $m = 0$ 也成立，推不出 $m \geq 20$ 。
 $\cos^4 x$ 的週期容易誤以為是 $\frac{\pi}{2}$ ；它在 $x = \frac{\pi}{2}$ 的值是 0、在 $x = 0$ 的值是 1， $\frac{\pi}{2}$ 不是週期。

填充 7~11：和角公式、扇形面積、讀圖求係數、三角不等式與方程式

- 7 先化成銳角： $\sin 470^\circ = \sin 110^\circ = \sin 70^\circ$ ； $\cos 130^\circ = -\cos 50^\circ$ ； $\cos 290^\circ = \cos 70^\circ$ ； $\sin(-50^\circ) = -\sin 50^\circ$ 。原式 $= -(\sin 70^\circ \cos 50^\circ + \cos 70^\circ \sin 50^\circ) = -\sin 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。
- 8 設以 C 為圓心的弧交 $\overline{AB}$ 於 E 。直角三角形 CBE 中 $\overline{CB} = 3$ 、 $\overline{CE} = 6$ ，所以 $\angle CEB = \frac{\pi}{6}$ ， $\overline{BE} = 3\sqrt{3}$ ，且 $\angle DCE = \angle CEB = \frac{\pi}{6}$ （內錯角）。長方形內落在 C 圓內的部分 = 扇形 CDE + $\triangle CBE = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3 = 3\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}$ ，所以靠 A 那一角（在 C 圓外）的面積是 $18 - 3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$ 。套色區域 = 以 A 為圓心的四分之一圓減去這一角： $\frac{9\pi}{4} - \left(18 - 3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{21\pi + 18\sqrt{3} - 72}{4}$ 。
 套色區域的底邊不是整段半徑，左下角缺了一塊，要用「四分之一圓減掉缺角」來算。
- 9 最大值 1、最小值 -3 ： $a = \frac{1 - (-3)}{2} = 2$ ， $d = \frac{1 + (-3)}{2} = -1$ 。在 A 、 B 兩點 $y = 0$ ，即 $\sin(b(x + c)) = \frac{1}{2}$ ；由圖， A 是圖形往下穿過 x 軸的點、 B 是緊接著往上穿過的點，所以 A 對應角度 $\frac{5\pi}{6}$ 、 B 對應 $\frac{13\pi}{6}$ （各差 2π 的整數倍）。相減： $b\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{9}\right) = \frac{4\pi}{3}$ ， $b = 3$ 。代回 A ： $3\left(\frac{2\pi}{9} + c\right) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ， $c = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ ；在 $-\pi \leq c \leq \frac{\pi}{3}$ 內有 $k = -1$ 的 $c = -\frac{11\pi}{18}$ 與 $k = 0$ 的 $c = \frac{\pi}{18}$ 。
 流傳版本的參考答案只寫 $\left(2, 3, -\frac{11\pi}{18}, -1\right)$ ；但依題幹印的範圍 $-\pi \leq c \leq \frac{\pi}{3}$ ， $c = \frac{\pi}{18}$ 也符合（兩者相差 $\frac{2\pi}{3}$ ，正好一個週期，圖形完全相同）。若範圍是 $-\pi \leq c \leq -\frac{\pi}{3}$ ，答案才只有 $-\frac{11\pi}{18}$ 一個。
- 10 $0 \leq 3x \leq 3\pi$ 。在這個範圍內 $\sin 3x \geq \frac{1}{2}$ 的解是 $\frac{\pi}{6} \leq 3x \leq \frac{5\pi}{6}$ 或 $\frac{13\pi}{6} \leq 3x \leq \frac{17\pi}{6}$ ，即 $\frac{\pi}{18} \leq x \leq \frac{5\pi}{18}$ 或 $\frac{13\pi}{18} \leq x \leq \frac{17\pi}{18}$ 。兩段長度各 $\frac{4\pi}{18}$ ，所以 $d - c + b - a = \frac{8\pi}{18} = \frac{4\pi}{9}$ 。
- 11 用 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ： $2(1 - \sin^2 x) - 3 \sin x - 3 = 0$ ， $2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$ ， $(2 \sin x + 1)(\sin x + 1) = 0$ 。 $\sin x = -\frac{1}{2}$ 得 $x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ ； $\sin x = -1$ 得 $x = \frac{3\pi}{2}$ 。和為 $\frac{7\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}$ 。

由圖形求 $y = a \sin(b(x + c)) + d$ ：先用最大、最小值定 a 、 d ，再用兩個已知點的「角度差」定 b ，最後才代點求 c 並檢查範圍。



填充 12~16：疊合、半角、滾動軌跡、極值與圖形變換

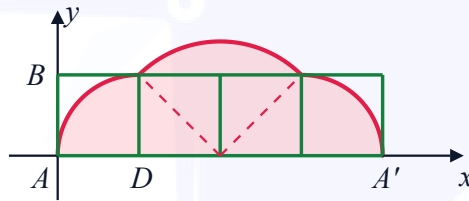
- 12 左邊疊合： $\sqrt{3}\sin A + \cos A = 2\sin(A + 30^\circ)$ 。右邊 $932^\circ = 2 \times 360^\circ + 212^\circ$ ， $\sin 932^\circ = \sin 212^\circ = -\sin 32^\circ$ 。所以 $\sin(A + 30^\circ) = -\sin 32^\circ$ ，而 $300^\circ < A + 30^\circ < 390^\circ$ ；這個範圍內正弦為 $-\sin 32^\circ$ 的角只有 $360^\circ - 32^\circ = 328^\circ$ 。 $A = 298^\circ$ 。

$A + 30^\circ = 212^\circ$ 也滿足等式，但不在 300° 到 390° 之間。

- 13 α 在第二象限： $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ 。 β 在第四象限： $\sin \beta = -\frac{5}{13}$ 。 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = -\frac{36}{65} + \frac{20}{65} = -\frac{16}{65}$ 。又 $2\pi < \alpha + \beta < 3\pi$ ， $\pi < \frac{\alpha + \beta}{2} < \frac{3\pi}{2}$ ，餘弦為負。由半角公式 $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha + \beta)}{2}} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{16}{65}}{2}} = -\sqrt{\frac{49}{130}} = -\frac{7}{\sqrt{130}} = -\frac{7\sqrt{130}}{130}$ 。

流傳版本題幹印作「 $2\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ 」，這樣的 β 不存在；依答案應為「 $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ 」，本頁題幹已照此修正。

- 14 設正方形邊長為 s 。第一次繞 D 轉 90° ： A 走半徑 s 的四分之一圓。第二次繞 C 轉 90° ： A 到 C 的距離是對角線 $\sqrt{2}s$ ，走半徑 $\sqrt{2}s$ 的四分之一圓。第三次繞 B 轉 90° ：半徑 s 的四分之一圓。軌跡與 x 軸圍出的面積 = 兩個半徑 s 的四分之一圓 + 一個半徑 $\sqrt{2}s$ 的四分之一圓 + 中間兩個等腰直角三角形（各 $\frac{1}{2}s^2$ ） $= \frac{\pi s^2}{2} + \frac{\pi s^2}{2} + s^2 = \pi s^2 + s^2$ 。由 $\pi s^2 + s^2 = 10\pi + 10$ 得 $s^2 = 10$ ， $s = \sqrt{10}$ 。軌跡長 $= \frac{\pi}{2}(s + \sqrt{2}s + s) = \frac{\pi}{2}(2\sqrt{10} + \sqrt{20}) = (\sqrt{10} + \sqrt{5})\pi$ 。



第二段的半徑是對角線不是邊長；面積也別漏掉第二段扇形兩側、落在弧下方的兩個三角形。

- 15 分段去絕對值再疊合。 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ： $f = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，範圍 $[1, \sqrt{2}]$ 。 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ ： $f = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ，其中 $\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$ ，範圍 $[-1, \sqrt{2}]$ 。 $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ ： $f = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，其中 $\frac{7\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4}$ ，範圍 $[-1, 1]$ 。所以 $M = \sqrt{2}$ ， $m = -1$ （在 $x = \frac{3\pi}{2}$ ）， $M^2 + m^2 = 3$ 。

最小值不是 $-\sqrt{2}$ ： $\sin x$ 為負的時候 $|\cos x|$ 仍然不小於 0，最低只到 -1 。

- 16 逐步變換：水平伸縮為 $\frac{1}{2}$ 倍（ x 換成 $2x$ ）得 $4\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ；向左平移 $\frac{\pi}{3}$ （ x 換成 $x + \frac{\pi}{3}$ ）得 $4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ；向上 4 得 $4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 4$ ；鉛直伸縮為 2 倍得 $g(x) = 8\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 8$ 。 $0 \leq g(x) \leq 16$ ，而 $256 = 16 \times 16$ ，所以 $g(x_1) = g(x_2) = 16$ ，即 $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ ， $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ 。在 $[-4\pi, 4\pi]$ 內最大的是 $\frac{23\pi}{6}$ （ $k = 4$ ），最小的是 $-\frac{19\pi}{6}$ （ $k = -3$ ）。 $3x_1 - x_2$ 最大 $= 3 \cdot \frac{23\pi}{6} + \frac{19\pi}{6} = \frac{88\pi}{6} = \frac{44\pi}{3}$ 。

向左平移是把 x 換成 $x + \frac{\pi}{3}$ ，此時括號裡是 $2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}$ ，不是直接在角度上加 $\frac{\pi}{3}$ （那樣會得到 $2x$ ，少了 $\frac{\pi}{3}$ ）。



混合題 17~18：扇形內的線段和

17 直角三角形 OPQ 中 $\overline{OP} = 4$: $\overline{OQ} = 4 \cos \theta$, $\overline{PQ} = 4 \sin \theta$ 。直角三角形 OQR ($\angle R = 90^\circ$) 中 : $\overline{QR} = \overline{OQ} \sin \theta = 4 \sin \theta \cos \theta$, $\overline{OR} = \overline{OQ} \cos \theta = 4 \cos^2 \theta$ 。所以 $\overline{PR} = \overline{OP} - \overline{OR} = 4 - 4 \cos^2 \theta = 4 \sin^2 \theta$ 。 $\overline{PR} + \overline{QR} = 4 \sin^2 \theta + 4 \sin \theta \cos \theta$ 。用倍角公式可再寫成 $2(1 - \cos 2\theta) + 2 \sin 2\theta = 2 \sin 2\theta - 2 \cos 2\theta + 2$ 。

18 由第 17 題 , $\overline{PR} + \overline{QR} = 2 \sin 2\theta - 2 \cos 2\theta + 2 = 2\sqrt{2} \sin \left(2\theta - \frac{\pi}{4} \right) + 2$ 。 P 在弧上 , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $-\frac{\pi}{4} < 2\theta - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$, 這個範圍內包含 $\frac{\pi}{2}$ 。當 $2\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 即 $\theta = \frac{3\pi}{8}$ 時 , 正弦取最大值 1 , $\overline{PR} + \overline{QR}$ 的最大值為 $2\sqrt{2} + 2$ 。

疊合後一定要寫出 $2\theta - \frac{\pi}{4}$ 的範圍 , 確認 $\frac{\pi}{2}$ 在範圍內 , 才能說正弦取得到 1 。

線段和先化成 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ 的一次式 , 再疊合成單一正弦 , 最大值與發生的角度一次讀出 。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自台中一中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tcfsh-114a-g11a-1