

台中一中 114 學年度上學期 高一第一次段考



御藍教育

範圍：數與式（實數、絕對值、指數、常用對數） · 單選題 7 題（42 分）、多選題 2 題（16 分）、填充題 7 題（42 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/tcfsh-114a-g10-1

一、單選題（占 42 分；第 1 題至第 7 題，每題 6 分）

1 若 $a = 32^{1.2}$ 。試選出正確的選項。

- (1) $45 < a \leq 55$
- (2) $55 < a \leq 65$
- (3) $65 < a \leq 75$
- (4) $75 < a \leq 85$
- (5) $85 < a \leq 95$

2 若 $b = \log(10\sqrt[3]{100})$ 。試選出正確的選項。

- (1) $1.5 < b \leq 1.55$
- (2) $1.55 < b \leq 1.6$
- (3) $1.6 < b \leq 1.65$
- (4) $1.65 < b \leq 1.7$
- (5) $1.7 < b \leq 1.75$

3 若 $-3 \leq x \leq 5$ ，則 $c \leq x^2 \leq d$ 。試問上述中 $d - c$ 的最小值為何？

- (1) 2
- (2) 8
- (3) 9
- (4) 16
- (5) 25

4 若 $\sqrt{33 - 20\sqrt{2}} = e - \sqrt{f}$ ，其中 e 、 f 均為整數。試選出正確的選項。

- (1) $e > f > 6$
- (2) $f > e > 6$
- (3) $e > 6 > f$
- (4) $f > 6 > e$
- (5) $6 > e > f$



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tcfsh-114a-g10-1

5 若 $1 \leq g \leq 100$ ， g 為整數， $\sqrt{g} - 6$ 為大於 0 的有理數。符合上述要求的 g 值有幾個？

- (1) 0 個
- (2) 2 個
- (3) 4 個
- (4) 6 個
- (5) 7 個

6 若 $10^{\log 10x} = 3.1 \times 10^4$ 。試選出正確的選項。

- (1) x 為整數且為 4 位數
- (2) x 為整數且為 5 位數
- (3) x 不為整數且 $1000 < x \leq 10000$
- (4) x 不為整數且 $10000 < x \leq 100000$
- (5) x 不為整數且 $100000 < x \leq 1000000$

7 已知 $\log 2 \approx 0.3010$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$ ，若 $100^y = 125$ 。試選出正確的選項。

- (1) $1 < y \leq 1.02$
- (2) $1.02 < y \leq 1.04$
- (3) $1.04 < y \leq 1.06$
- (4) $1.06 < y \leq 1.08$
- (5) $1.08 < y \leq 1.1$

二、多選題（占 16 分；第 8 題至第 9 題，每題 8 分，錯 0、1、2、3、4 個選項依序得 8、6、4、2、0 分）

8 試選出正確的選項。

- (1) $\frac{1}{6}$ 化為小數後，其小數點後第 114 位數字為 6
- (2) $0.\overline{6} + 0.\overline{5} = 0.\overline{8} + 0.\overline{3}$
- (3) 若 $A(a)$ 、 $B(b)$ ，則 $P\left(\frac{na+mb}{m+n}\right)$ 必在 $\overline{AB}$ 內部
- (4) 若實數 a 、 b 滿足 $0 < a < 1$ ， $0 < b < 1$ ，則 $-a < b - a < 1$
- (5) 若 $abc > 0$ ， $a + b + c < 0$ ， $a > b > c$ ，則 $a + c < 0$



9 試選出正確的選項。

- (1) 若 $x+1$ 是無理數，則 $(x+1)(x-1)$ 是有理數
- (2) 若 10^a 為有理數，則 a^{10} 亦為有理數
- (3) 若 $2^a + 2^{-a}$ 為有理數，則 $2^a - 2^{-a}$ 亦為有理數
- (4) $\sqrt{98} + \sqrt{75} > \sqrt{140\sqrt{6}} - 1$
- (5) 若 2^a 為 t 位數 ($t \in \mathbb{N}$)，則 4^a 為 $2t$ 位數或是 $2t+1$ 位數

三、填充題 (占 42 分；第 10 題至第 16 題，每題 6 分)

10 已知 $a > 0$ ， $a^{4x} = 3 + \sqrt{8}$ ，試求 $\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}} - \sqrt{\square}$ 。

11 x 為實數，解不等式 $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} \leq 3$ ，得 $\underline{\hspace{2cm}} \leq x \leq \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12 求滿足不等式 $3|x+1| - x - 2 \leq |2x-3|$ 的實數所形成的區間長度為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

13 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{114}$ 共 114 個分數中，可化為有限小數的共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 個。

14 若 $|2x-5| \leq 3$ ， $|y+2| \leq 5$ ，則 $a \leq \frac{y-2xy+3}{x} \leq b$ ，其中 $a, b \in \mathbb{R}$ 。求 $b-a$ 的最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
(化為最簡分數)

15 若 $(9+4\sqrt{5})^{100} = a + b\sqrt{5}$ ， $(\sqrt{5}-2)^{201} = c + d\sqrt{5}$ ，其中 a, b, c, d 均為整數。則 $ad + bc = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

16 已知 $a \in \mathbb{R}$ ， a^2 的小數部分是 b ， $b \neq 0$ ， $a+b=6$ ，則 a 的最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡根式)





御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/tcfsh-114a-g10-1

答案一覽

- 第 1 題 (2)
第 2 題 (4)
第 3 題 (5)
第 4 題 (4)
第 5 題 (3)
第 6 題 (1)
第 7 題 (3)
第 8 題 (1)(2)(4)
第 9 題 (4)
第 10 題 $3 - \sqrt{2}$
第 11 題 $-2 \leq x \leq 1$
第 12 題 $\frac{9}{2}$
第 13 題 15
第 14 題 $\frac{35}{2}$
第 15 題 1
第 16 題 $\frac{-1 + \sqrt{165}}{2}$

單選題：指數、對數與根式

- 1 $32 = 2^5$ ，所以 $a = 2^{5 \times 1.2} = 2^6 = 64$ ，落在 $55 < a \leq 65$ 。答案 (2)。
- 2 $10\sqrt[3]{100} = 10^1 \cdot 10^{\frac{2}{3}} = 10^{\frac{5}{3}}$ ，所以 $b = \frac{5}{3} \approx 1.667$ ，落在 $1.65 < b \leq 1.7$ 。答案 (4)。
- 3 $-3 \leq x \leq 5$ 時， x^2 最小是 0 ($x = 0$)，最大是 25 ($x = 5$)，所以 $0 \leq x^2 \leq 25$ 。要對所有這樣的 x 都成立，必須 $c \leq 0$ 、 $d \geq 25$ ， $d - c \geq 25$ ，取 $c = 0$ ， $d = 25$ 時等號成立。答案 (5)。
- 4 設 $(e - \sqrt{f})^2 = e^2 + f - 2e\sqrt{f}$ ，要和 $\square - 20\sqrt{2}$ 對上，需要 $e\sqrt{f} = 10\sqrt{2} = 5\sqrt{8}$ 。取 $e = 5$ ， $f = 8$ ： $(5 - \sqrt{8})^2 = 33 - 20\sqrt{2}$ ，而且 $5 > \sqrt{8}$ ，開根號後確實是 $5 - \sqrt{8}$ 。此時 $f = 8 > 6 > e = 5$ ，答案 (4)。

流傳版本的題幹印作 $\sqrt{30 - 20\sqrt{2}}$ ，照這個數字找不到整數 e, f ($e\sqrt{f} = 10\sqrt{2}$ 的整數解代入 $e^2 + f$ 只有 201, 54, 33, 102)；參考答案 (4) 對應的是 33，本頁題幹寫 33。



- 5 $\sqrt{g} - 6$ 是有理數， $\sqrt{g}$ 就是有理數； g 是正整數，所以 g 必須是完全平方數。再要 $\sqrt{g} > 6$ ，即 $g > 36$ ： $g = 49, 64, 81, 100$ ，共 4 個。答案 (3)。
- 6 $10^{\log N} = N$ ，所以 $10x = 3.1 \times 10^4 = 31000$ ， $x = 3100$ ，是整數且為 4 位數。答案 (1)。
- 7 兩邊取 $\log$ ： $2y = \log 125 = 3 \log 5 = 3(1 - \log 2) \approx 3 \times 0.6990 = 2.097$ ，所以 $y \approx 1.0485$ ，落在 $1.04 < y \leq 1.06$ 。答案 (3)。
 $\log 5$ 用 $\log \frac{10}{2} = 1 - \log 2$ 算。

把數字化成同一個底數 (2 或 10)，指數律和 $\log$ 的題目就只剩加減乘除。

多選題：逐項判斷，錯的要找反例

- 8 答案 (1)(2)(4)。(1) 對： $\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$ ，小數點後第 2 位起都是 6，第 114 位是 6。(2) 對： $0.\overline{6} + 0.\overline{5} = \frac{6+5}{9} = \frac{11}{9}$ ， $0.\overline{8} + 0.\overline{3} = \frac{8+3}{9} = \frac{11}{9}$ ，兩邊相等。(3) 錯：沒說 m, n 都是正數。取 $m = 2, n = -1, P = 2b - a, a \neq b$ 時是 $\overline{AB}$ 延長線上的外分點。(4) 對： $b - a > 0 - a = -a$ ，且 $b - a < 1 - a < 1$ 。(5) 錯： $a + b + c < 0$ 而 a 最大，所以最小的 $c < 0$ ； $abc > 0$ 且 $c < 0$ 得 $ab < 0$ ，又 $a > b$ ，所以 $a > 0 > b$ 。反例 $a = 3, b = -1, c = -2.5$ ：三個條件都成立，但 $a + c = 0.5 > 0$ 。
 分點公式 $\frac{na+mb}{m+n}$ 要在 $m, n > 0$ 時才是內分點。
- 9 答案 (4)。(1) 錯：取 $x = \sqrt{2} - 1, x + 1 = \sqrt{2}$ 是無理數，但 $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1 = 2 - 2\sqrt{2}$ 是無理數。(2) 錯：取 $a = \log 2, 10^a = 2$ 是有理數，但 $a^{10} = (\log 2)^{10}$ 不是有理數。(3) 錯：設 $t = 2^a$ ，取 $t + \frac{1}{t} = 3$ ，則 $(t - \frac{1}{t})^2 = (t + \frac{1}{t})^2 - 4 = 5, 2^a - 2^{-a} = \pm\sqrt{5}$ 是無理數。(4) 對：兩邊都正，比平方。左邊 $(7\sqrt{2} + 5\sqrt{3})^2 = 98 + 75 + 70\sqrt{6} = 173 + 70\sqrt{6}$ ，右邊 $140\sqrt{6} - 1$ ；相減得 $174 - 70\sqrt{6}$ ，而 $174^2 = 30276 > 29400 = (70\sqrt{6})^2$ ，差是正的，所以左邊大。(5) 錯： $10^{t-1} \leq 2^a < 10^t$ ，平方得 $10^{2t-2} \leq 4^a < 10^{2t}$ ，所以 4^a 是 $2t - 1$ 位數或 $2t$ 位數，不會是 $2t + 1$ 位數。例如 $2^1 = 2$ 是 1 位數， $4^1 = 4$ 也是 1 位數。
 比較兩個根式的大小，先確定兩邊都是正的，再平方比較。

多選題判「錯」一定要找到一個具體的反例，判「對」要能寫出理由。

填充 10~13：代換、距離和與分段討論

- 10 $3 + \sqrt{8} = 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$ ，所以 $a^{2x} = 1 + \sqrt{2}$ ，記 $s = a^{2x}$ 。分子分母同乘 a^{3x} ： $\frac{a^{6x} - 1}{a^{4x} + a^{2x}} = \frac{s^3 - 1}{s^2 + s} = \frac{(s - 1)(s^2 + s + 1)}{s^2 + s}$ 。 $s - 1 = \sqrt{2}, s^2 + s = 4 + 3\sqrt{2}, s^2 + s + 1 = 5 + 3\sqrt{2}$ ，得 $\frac{\sqrt{2}(5 + 3\sqrt{2})}{4 + 3\sqrt{2}} = \frac{6 + 5\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}}$ 。分母有理化： $\frac{(6 + 5\sqrt{2})(4 - 3\sqrt{2})}{16 - 18} = \frac{-6 + 2\sqrt{2}}{-2} = 3 - \sqrt{2}$ 。
 先把 $3 + \sqrt{8}$ 看成完全平方，後面全部用 s 算，不必求出 x 。
- 11 $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = |x + 2|, \sqrt{x^2 - 2x + 1} = |x - 1|$ 。 $|x + 2| + |x - 1|$ 是數線上 x 到 -2 與到 1 的距離和，最小值就是兩點距離 3，只在 x 位於兩點之間時取到。所以 $-2 \leq x \leq 1$ 。
 $\sqrt{A^2} = |A|$ ，不能直接寫成 A 。



12 以 $x = -1$ 、 $x = \frac{3}{2}$ 分三段。 $x < -1$ ： $-3(x+1) - x - 2 \leq 3 - 2x$ ，化成 $x \geq -4$ ，得 $-4 \leq x < -1$ 。
 $-1 \leq x < \frac{3}{2}$ ： $3(x+1) - x - 2 \leq 3 - 2x$ ，化成 $x \leq \frac{1}{2}$ ，得 $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 。 $x \geq \frac{3}{2}$ ： $2x + 1 \leq 2x - 3$ 不成立。合起來 $-4 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ，區間長度 $\frac{1}{2} - (-4) = \frac{9}{2}$ 。

13 最簡分數 $\frac{1}{n}$ 可化為有限小數，恰好是分母 n 只含質因數 2、5。在 1 ~ 114 中：只含 2 的 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 共 7 個；含一個 5 的 5, 10, 20, 40, 80 共 5 個；含 5^2 的 25, 50, 100 共 3 個； $125 > 114$ 。共 15 個。

$\frac{1}{1} = 1$ 也算在內（參考答案 15 已含它）；分母依 5 的次方分組數，不容易漏。

填充 14~16：範圍、共軛與小數部分

14 $|2x - 5| \leq 3$ 得 $1 \leq x \leq 4$ ； $|y + 2| \leq 5$ 得 $-7 \leq y \leq 3$ 。令 $t = \frac{1}{x}$ ， $\frac{1}{4} \leq t \leq 1$ ，式子 = $\frac{y(1-2x)+3}{x} = y(t-2) + 3t$ 。 $t-2 < 0$ ，固定 t 時 y 越小值越大：最大在 $y = -7$ ，得 $14 - 4t$ ；最小在 $y = 3$ ，得 $6t - 6$ 。再看 t ： $14 - 4t$ 在 $t = \frac{1}{4}$ 最大，為 13； $6t - 6$ 在 $t = \frac{1}{4}$ 最小，為 $-\frac{9}{2}$ 。所以式子的範圍是 $[-\frac{9}{2}, 13]$ ， $b - a$ 最小為 $13 + \frac{9}{2} = \frac{35}{2}$ 。

兩個變數要一次固定一個； y 的係數 $t - 2$ 恆負，決定 y 取哪一端。

15 $(9 + 4\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5}) = 1$ ，所以 $(9 - 4\sqrt{5})^{100} = a - b\sqrt{5}$ ，且 $a^2 - 5b^2 = 1$ 。又 $(\sqrt{5} - 2)^2 = 9 - 4\sqrt{5}$ ，故 $(\sqrt{5} - 2)^{201} = (a - b\sqrt{5})(\sqrt{5} - 2) = (-2a - 5b) + (a + 2b)\sqrt{5}$ ，即 $c = -2a - 5b$ ， $d = a + 2b$ 。代入： $ad + bc = a(a + 2b) + b(-2a - 5b) = a^2 - 5b^2 = 1$ 。

$201 = 2 \times 100 + 1$ ，把奇數次方拆成「平方的 100 次方」乘一次，就接回第一個式子。

16 $0 < b < 1$ 且 $a = 6 - b$ ，所以 $5 < a < 6$ 。設 a^2 的整數部分為 n ，則 $b = a^2 - n$ ，代入 $a + b = 6$ ： $a^2 + a - (6 + n) = 0$ ，取正根 $a = \frac{-1 + \sqrt{25 + 4n}}{2}$ 。由 $5 < a < 6$ 得 $30 < a^2 + a < 42$ ，即 $24 < n < 36$ ， n 可取 25 ~ 35。 n 越大 a 越大，取 $n = 35$ ： $a = \frac{-1 + \sqrt{165}}{2} \approx 5.92$ ，此時 $a^2 \approx 35.08$ ，整數部分確實是 35。

用 $b \in (0, 1)$ 先把 a 夾在 5 與 6 之間，才能定出 n 的範圍。

看到「整數部分、小數部分」就設整數部分為 n ，把小數部分寫成「原數減 n 」，再用 $0 \leq \text{小數部分} < 1$ 夾範圍。

你們學校的段考卷也想要詳解？考完把題目頁拍照或掃描上傳，我們收到後會盡快做好放上來，一樣免費下載。

上傳：royalblue-education.com/school-exams/submit（上傳前可以先把姓名、座號遮掉）

本卷題目取自台中一中 114 學年度上學期高一第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tcfsh-114a-g10-1

孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

御藍教育

ROYAL BLUE • EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/tcfsh-114a-g10-1