

松山高中 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數（弧度量、三角函數的圖形、和差角與倍角半角公式、正餘弦的疊合） · 是非題 10 題（20 分）、多選題 2 題（12 分）、填充題 10 題（60 分）、混合題 1 題組 2 小題（8 分），合計 100 分

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/sssh-114a-g11a-1

第壹部分：選擇（填）題（占 92 分） 一、是非題（占 20 分） | 第 1 題至第 10 題，每題 2 分。 （對的打○，錯的打×）

- 1 $\sin^2 \pi > \sin \pi$ 。
- 2 若 $P(-1, k)$ 為廣義角 θ 終邊上的一點，則 $\sin\left(\theta - \frac{3}{2}\pi\right) = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ 。
- 3 存在實數 x ，使得 $\cos x = \frac{\sqrt{10}}{3}$ 。
- 4 存在第三象限角 θ ，使得 $\tan \frac{\theta}{2} = -100$ 。
- 5 $\tan 145^\circ - \tan 25^\circ + \sqrt{3} \tan 145^\circ \tan 25^\circ > 0$ 。
- 6 若 $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$ ，則 $\sqrt{1 - \sin 2\theta} + \sqrt{1 + \sin 2\theta} = -2 \cos \theta$ 。
- 7 若 $\tan \theta = \sqrt{3}$ ，則 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$ 。
- 8 若 $\sin \theta = \frac{8}{5} \cos \frac{\theta}{2}$ ，則 $\cos \theta = -\frac{7}{25}$ 。
- 9 函數 $f(x) = \cos 2x + 4 \sin x$ 的最大值為 3。
- 10 函數 $f(x) = \sin 2x + \tan x$ 的週期為 π 。

二、多選題（占 12 分） | 第 11 題至第 12 題，每題 6 分。（6-4-2-0）

- 11 坐標平面上，函數 $y = \sin x$ 的圖形對稱於 $x = \frac{\pi}{2}$ 。試選出在 $0 < \theta \leq 2\pi$ 的範圍中滿足 $\sin \theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{5}\right)$ 的 θ 值。
 - (1) $\frac{2\pi}{5}$
 - (2) $\frac{3\pi}{5}$
 - (3) $\frac{4\pi}{5}$
 - (4) $\frac{6\pi}{5}$
 - (5) $\frac{7\pi}{5}$



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/sssh-114a-g11a-1

12 考慮函數 $f(x) = 3\sin(2x - \pi)$ ，下列敘述哪些是正確的？

- (1) $y = f(x)$ 的圖形對稱於原點
- (2) $y = f(x)$ 的圖形是將 $y = \sin(2x - \pi)$ 的圖形以 x 軸為中心線，沿鉛直方向伸縮為 3 倍而得
- (3) $y = f(x)$ 的圖形是將 $y = 3\sin(x - \pi)$ 的圖形以 y 軸為中心線，沿水平方向伸縮為 $\frac{1}{2}$ 倍而得
- (4) $y = f(x)$ 的圖形可由 $y = 3\sin 2x$ 的圖形向右平移 π 單位而得
- (5) $y = f(x)$ 的圖形可由 $y = 3\cos 2x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位而得

三、填充題（占 60 分） | 第 13 題至第 22 題，每題 6 分。

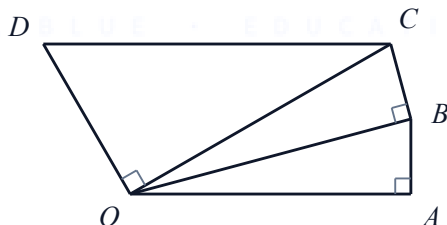
13 設 θ 與 40° 為同界角，且 $-2\pi < \theta \leq 0$ ，則 θ 為 _____ 徑。

14 用一條 40 公分長的繩子來圍成一個扇形，則此扇形面積最大為 _____ 平方公分。

15 在 $-2 \leq x \leq 2$ 的範圍內，方程式 $\cos(3\pi x) = x^2$ 有 _____ 個實數解。

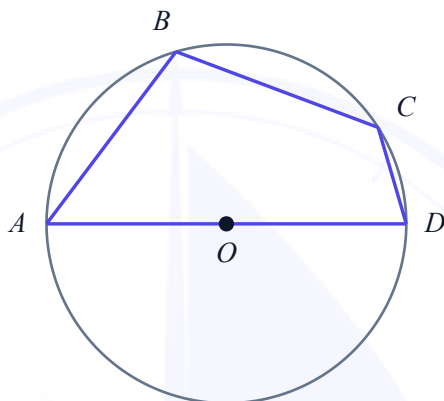
16 已知坐標平面上， O 為原點，另兩點 $A\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$ ， $B\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right), \sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right)\right)$ ，且 $\alpha + \beta = \frac{5}{6}\pi$ ，則 $\triangle OAB$ 面積 = _____。

17 圖是由三個直角三角形堆疊而成的圖形，且 $\overline{CD} = 20$ ， $\angle DCO = \frac{\pi}{6}$ ， $\angle AOB = \angle BOC = \frac{\pi}{12}$ ，則 $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 18 若兩直線 $L_1: x - 2y + 5 = 0$ 與 $L_2: 3x - y + 2 = 0$ 的夾角為 θ ，則 $\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(有兩個)

- 19 如圖， $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，且圓 O 的直徑 $\overline{AD} = 25$ ，若 $\overline{AB} = 15$ ， $\overline{CD} = 7$ ，則 $\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 20 將函數 $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 表成 $y = r \cos(x - \theta)$ 的形式，其中 $r > 0$ ，且 $0 \leq \theta < 2\pi$ ，則數對 $(r, \theta) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 21 在 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ，函數 $f(x) = 2 \cos x (\sin x - \cos x) + 1$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則數對 $(M, m) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

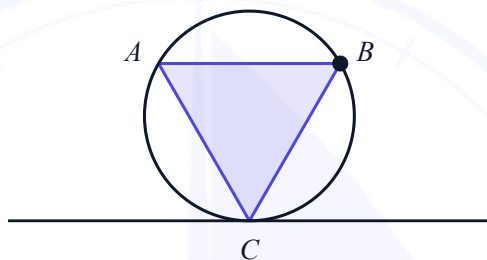
- 22 若 $0 \leq x \leq 2\pi$ ，則不等式 $\sin x - \cos x \leq 1$ 之解的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



第貳部分：混合題（占 8 分） | 本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

第 23~24 題為題組 如圖，一個半徑 10 公分的硬幣，內接一個正三角形 ABC 圖案，且硬幣與地面接觸於 C 點。現沿著地面一直線向左滾動了 x 公分，則 B 點距地面的高度可表為 $y = a \sin(bx + c) + d$ ，其中 a 、 b 都是正數， $0 \leq c < 2\pi$ 。

23 求實數 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $c = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $d = \underline{\hspace{1cm}}$ 。（填充題，4 分）



24 若此枚硬幣沿著地面一直線向左滾動了 $\frac{185}{6}\pi$ 公分，則此時 B 點距地面多高？（非選擇題，4 分）

御藍教育

ROYAL BLUE • EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/sssh-114a-g11a-1

答案一覽

是非題：1 = 正確、2 = 錯誤

1 2	2 2	3 2	4 1	5 2	6 1	7 2
8 2	9 1	10 1				

第 11 題 (1)(5)

第 12 題 (1)(2)(3)(5)

第 13 題 $40 - 14\pi$

第 14 題 100

第 15 題 6

第 16 題 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

第 17 題 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

第 18 題 45° 或 135°

第 19 題 15

第 20 題 $\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$

第 21 題 $(1, -\sqrt{2})$

第 22 題 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 或 $\pi \leq x \leq 2\pi$

第 23 題 $a = 10, b = \frac{1}{10}, c = \frac{\pi}{6}, d = 10$

第 24 題 $(10 - 5\sqrt{2})$ 公分

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。（不用註冊）
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit（可以先把姓名、座號遮掉）



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/sssh-114a-g11a-1

是非題第 1~5 題：弧度制的函數值、廣義角、半角的範圍、正切差角

- 1 2 π 徑就是 180° ， $\sin \pi = 0$ ，所以 $\sin^2 \pi = 0^2 = 0$ 。兩邊都是 0，是相等，「大於」不成立。
- 2 2 $P(-1, k)$ 到原點的距離是 $r = \sqrt{1+k^2}$ ，所以 $\sin \theta = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ ， $\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}$ 。左邊的角加一圈不改變函數值： $\sin\left(\theta - \frac{3}{2}\pi\right) = \sin\left(\theta - \frac{3}{2}\pi + 2\pi\right) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}$ 。題目右邊寫的是 $\sin \theta$ 的值，兩者一般不相等。
- 例如 $k = 1$ 時，左邊是 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，右邊是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。只有 $k = -1$ 時兩邊才剛好相等，所以這個敘述不是恆成立。
- 3 2 $\sqrt{10} > \sqrt{9} = 3$ ，所以 $\frac{\sqrt{10}}{3} > 1$ 。對任何實數 x 都有 $-1 \leq \cos x \leq 1$ ，餘弦值不可能大於 1。
- 4 1 第三象限角可以寫成 $\pi + 2n\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ (n 為整數)，各除以 2： $\frac{\pi}{2} + n\pi < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4} + n\pi$ 。正切的週期是 π ，所以 $\tan \frac{\theta}{2}$ 的值和 $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$ 時的 $\tan \varphi$ 一樣。在這一段正切從負無限大遞增到 $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$ ，所以比 -1 小的每一個數都取得到， -100 也在裡面。
- $\frac{\theta}{2}$ 會落在第二或第四象限的後半段，正切一定是負的而且小於 -1 。
- 5 2 由正切的差角公式， $\tan(145^\circ - 25^\circ) = \frac{\tan 145^\circ - \tan 25^\circ}{1 + \tan 145^\circ \tan 25^\circ}$ ，而 $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$ 。去分母： $\tan 145^\circ - \tan 25^\circ = -\sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 145^\circ \tan 25^\circ$ ，移項得 $\tan 145^\circ - \tan 25^\circ + \sqrt{3} \tan 145^\circ \tan 25^\circ = -\sqrt{3} < 0$ 。
- 式子裡同時出現「兩個正切相減」與「兩個正切相乘」，就是正切和差角公式去分母後的樣子。

是非題第 6~10 題：根號化簡、半角與倍角的陷阱、極值、週期

- 6 1 $1 - \sin 2\theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = (\sin \theta - \cos \theta)^2$ ，同理 $1 + \sin 2\theta = (\sin \theta + \cos \theta)^2$ ，所以左邊 $= |\sin \theta - \cos \theta| + |\sin \theta + \cos \theta|$ 。當 $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$ 時， $\cos \theta \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，而 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $\sin \theta - \cos \theta \geq 0$ 、 $\sin \theta + \cos \theta \leq 0$ 。左邊 $= (\sin \theta - \cos \theta) - (\sin \theta + \cos \theta) = -2 \cos \theta$ 。 $\sqrt{a^2} = |a|$ ，去絕對值之前一定要先判斷正負。
- 7 2 $\tan \theta = \sqrt{3}$ 的角不只 $\frac{\pi}{3}$ ，而是 $\theta = \frac{\pi}{3} + n\pi$ (n 為整數)。取 $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ： $\tan \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$ ，但 $\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{1}{2}$ 。所以由 $\tan \theta = \sqrt{3}$ 推不出 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$ 。
- $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}$ ， $\sin \frac{\theta}{2}$ 可能是 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $-\frac{1}{2}$ 、 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 四種。
- 8 2 由二倍角公式 $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ ，條件變成 $2 \cos \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} - \frac{4}{5} \right) = 0$ ，所以 $\cos \frac{\theta}{2} = 0$ 或 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$ 。後者得 $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{32}{25} = -\frac{7}{25}$ ；但前者得 $\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = -1$ 。例如 $\theta = \pi$ 滿足條件（兩邊都是 0），此時 $\cos \theta = -1$ ，所以敘述不一定成立。
- 兩邊同時約掉 $\cos \frac{\theta}{2}$ 會漏掉 $\cos \frac{\theta}{2} = 0$ 的情形。



- 9 1 用 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ，令 $t = \sin x$ ($-1 \leq t \leq 1$)： $f(x) = -2t^2 + 4t + 1 = -2(t-1)^2 + 3$ 。
 $t = 1$ (例如 $x = \frac{\pi}{2}$) 時有最大值 3。

頂點 $t = 1$ 剛好在 $-1 \leq t \leq 1$ 的邊界上，取得到。

- 10 1 $f(x + \pi) = \sin(2x + 2\pi) + \tan(x + \pi) = \sin 2x + \tan x = f(x)$ ，所以 π 是一個週期。再看有沒有更小的： $f(x)$ 只有在 $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n 為整數) 沒有定義，這些位置相鄰的間隔是 π 。如果有比 π 小的正數 T 也是週期，那麼 $x = \frac{\pi}{2} + T$ 也必須沒有定義，但它落在 $\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{3\pi}{2}$ 之間，是有定義的，矛盾。所以週期是 π 。

多選題第 11~12 題：正弦圖形的對稱軸、伸縮與平移

- 11 答案 (1)(5)。 θ 與 $\theta + \frac{\pi}{5}$ 相差 $\frac{\pi}{5}$ ，不是同界角，正弦值卻相等，表示這兩個角在正弦圖形上對稱於某一條對稱軸 $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n 為整數)。兩角的平均就是對稱軸的位置： $\frac{\theta + (\theta + \frac{\pi}{5})}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ， $\theta = \frac{2\pi}{5} + n\pi$ 。在 $0 < \theta \leq 2\pi$ 內， $n = 0$ 得 $\frac{2\pi}{5}$ ， $n = 1$ 得 $\frac{7\pi}{5}$ 。
驗算： $\sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{5}$ (兩角相加為 π)； $\sin \frac{7\pi}{5} = \sin \frac{8\pi}{5}$ (兩角相加為 3π)。題目只提示了 $x = \frac{\pi}{2}$ 這條對稱軸， $x = \frac{3\pi}{2}$ 也是對稱軸，(5) 就是從它來的。
- 12 答案 (1)(2)(3)(5)。先化簡： $\sin(2x - \pi) = -\sin(\pi - 2x) = -\sin 2x$ ，所以 $f(x) = -3\sin 2x$ 。(1) 對： $f(-x) = 3\sin 2x = -f(x)$ ，是奇函數，圖形對稱於原點。(2) 對：每一點的 y 坐標乘以 3， $\sin(2x - \pi)$ 變成 $3\sin(2x - \pi)$ 。(3) 對：水平方向伸縮為 $\frac{1}{2}$ 倍是把 x 換成 $2x$ ， $3\sin(x - \pi)$ 變成 $3\sin(2x - \pi)$ 。(4) 錯：向右平移 π 是把 x 換成 $x - \pi$ ，得 $3\sin(2x - 2\pi) = 3\sin 2x$ ，與 $f(x) = -3\sin 2x$ 不同。(5) 對：向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 是把 x 換成 $x + \frac{\pi}{4}$ ，得 $3\cos(2x + \frac{\pi}{2}) = -3\sin 2x = f(x)$ 。
(4) 要把 $2x - \pi$ 寫成 $2(x - \frac{\pi}{2})$ 才看得出平移量： $y = 3\sin 2x$ 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 才是 $f(x)$ 。

填充題第 13~17 題：同界角、扇形、數交點、單位圓上的夾角、直角三角形

- 13 同界角相差 2π 的整數倍，所以 $\theta = 40 - 2n\pi$ 。 $2\pi \approx 6.283$ ， $12\pi \approx 37.70$ ， $14\pi \approx 43.98$ 。 $40 - 12\pi \approx 2.30$ 是正的，不合； $40 - 14\pi \approx -3.98$ ，落在 -2π (約 -6.28) 與 0 之間。所以 $\theta = 40 - 14\pi$ 。
- 40 的單位是徑，不是度，要減的是 2π 的倍數而不是 360 的倍數。
- 14 設半徑為 r 、弧長為 s ，繩長就是扇形的周長： $2r + s = 40$ ， $s = 40 - 2r$ 。面積 $= \frac{1}{2}rs = \frac{1}{2}r(40 - 2r) = -r^2 + 20r = -(r - 10)^2 + 100$ 。當 $r = 10$ 時面積最大，最大值 100 平方公分。
此時弧長 $s = 20$ ，圓心角 $\frac{s}{r} = 2$ 徑，小於 2π ，圍得出來。



- 15 數 $y = \cos(3\pi x)$ 與 $y = x^2$ 兩個圖形的交點。餘弦值不超過 1，所以只需看 $x^2 \leq 1$ ，即 $-1 \leq x \leq 1$ 。兩個函數都是偶函數，圖形都對稱於 y 軸； $x = 0$ 時左邊是 1、右邊是 0，不是解，所以只要數 $0 < x \leq 1$ 的交點再乘以 2。 $y = \cos(3\pi x)$ 的週期是 $\frac{2}{3}$ ，在 $0 < x \leq 1$ 分三段看：0 到 $\frac{1}{3}$ 餘弦由 1 降到 -1，拋物線由 0 升到 $\frac{1}{9}$ ，交 1 點； $\frac{1}{3}$ 到 $\frac{2}{3}$ 餘弦由 -1 升到 1，拋物線只由 $\frac{1}{9}$ 升到 $\frac{4}{9}$ ，交 1 點； $\frac{2}{3}$ 到 1 餘弦由 1 降到 -1，拋物線由 $\frac{4}{9}$ 升到 1，交 1 點。 $x > 0$ 共 3 個，全部 $3 \times 2 = 6$ 個。
 $x = 1$ 時左邊是 $\cos 3\pi = -1$ 、右邊是 1，端點不是解； $1 < |x| \leq 2$ 時 $x^2 > 1$ ，沒有解。

- 16 A 、 B 的坐標都是 $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ 的形式，所以兩點都在單位圓上， $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ ，而且 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 分別是廣義角 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 與 $\frac{\pi}{3} + \beta$ 的終邊。兩個角相減： $(\frac{\pi}{3} + \beta) - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = (\alpha + \beta) - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ ，差在 0 與 π 之間，所以 $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$ 。面積 $= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 。
 不需要分別知道 α 、 β ，只用到它們的和。

- 17 直角三角形 DOC (直角在 O) 中， $\overline{OC} = \overline{CD} \cos \frac{\pi}{6} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$ 。直角三角形 OBC (直角在 B) 中， $\overline{OB} = \overline{OC} \cos \frac{\pi}{12}$ 。直角三角形 OAB (直角在 A) 中， $\overline{AB} = \overline{OB} \sin \frac{\pi}{12}$ 。所以 $\overline{AB} = 10\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = 10\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = 10\sqrt{3} \times \frac{1}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ 。
 不必算出 $\sin \frac{\pi}{12}$ 與 $\cos \frac{\pi}{12}$ 的值，兩者相乘剛好是二倍角公式 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ 。

填充題第 18~22 題：兩直線夾角、圓內接四邊形、疊合的三種用法

- 18 L_1 的斜率是 $\frac{1}{2}$ ， L_2 的斜率是 3。設兩直線的斜角分別為 θ_1 、 θ_2 ，則 $\tan \theta_1 = \frac{1}{2}$ 、 $\tan \theta_2 = 3$ 。由正切的差角公式， $\tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1$ ，所以其中一個夾角是 45° ；兩直線相交有兩組互補的夾角，另一個是 $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ 。
 用弧度表示就是 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ 。

- 19 $\overline{AD}$ 是直徑，所以 $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ 。設 $\angle BAD = \alpha$ 、 $\angle CAD = \beta$ 。直角三角形 ABD 中 $\overline{BD} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ ， $\sin \alpha = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ ， $\cos \alpha = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ 。直角三角形 ACD 中 $\overline{AC} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ ， $\sin \beta = \frac{7}{25}$ ， $\cos \beta = \frac{24}{25}$ 。 $\angle BAC = \alpha - \beta$ ， $\sin(\alpha - \beta) = \frac{4}{5} \times \frac{24}{25} - \frac{3}{5} \times \frac{7}{25} = \frac{96 - 21}{125} = \frac{3}{5}$ 。 $\triangle ABC$ 的外接圓就是圓 O ，由正弦定理 $\overline{BC} = 2R \sin \angle BAC = 25 \times \frac{3}{5} = 15$ 。
 驗算：把 A 放在 $(-12.5, 0)$ 、 D 放在 $(12.5, 0)$ ，則 $B(-3.5, 12)$ 、 $C(10.54, 6.72)$ ， $\overline{BC} = \sqrt{14.04^2 + 5.28^2} = \sqrt{225} = 15$ 。

- 20 展開 $r \cos(x - \theta) = r \cos \theta \cos x + r \sin \theta \sin x$ ，與 $\sin x - \sqrt{3} \cos x$ 比較係數： $r \sin \theta = 1$ ， $r \cos \theta = -\sqrt{3}$ 。 $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ ，所以 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ 、 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， θ 在第二象限， $\theta = \frac{5\pi}{6}$ 。 $(r, \theta) = (2, \frac{5\pi}{6})$ 。

這題指定疊合成餘弦的形式， $\cos x$ 的係數對的是 $r \cos \theta$ 、 $\sin x$ 的係數對的是 $r \sin \theta$ ，和疊合成正弦時相反。



- 21 展開後用倍角公式： $f(x) = 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x + 1 = \sin 2x - (2 \cos^2 x - 1) = \sin 2x - \cos 2x$ 。疊合： $f(x) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x \right) = \sqrt{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$ 。 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 時， $-\frac{3\pi}{4} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$ 。這一段裡正弦在 $-\frac{\pi}{2}$ 取到最小值 -1 ，最大值在右端點 $\frac{\pi}{4}$ ，為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。所以 $m = -\sqrt{2}$ ($x = -\frac{\pi}{8}$)， $M = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ ($x = \frac{\pi}{4}$)。

角度範圍不包含 $\frac{\pi}{2}$ ，正弦到不了 1，最大值不是振幅 $\sqrt{2}$ 。

- 22 疊合： $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$ ，不等式變成 $\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。
 $0 \leq x \leq 2\pi$ 時 $-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4}$ 。在這個範圍內，正弦值大於 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的只有 $\frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$ ，也就是 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 。把這一段去掉，解為 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 或 $\pi \leq x \leq 2\pi$ 。
 驗算端點： $x = \frac{\pi}{2}$ 時 $1 - 0 = 1$ ， $x = \pi$ 時 $0 - (-1) = 1$ ，等號成立，兩個端點都要含。

看到 $a \sin x + b \cos x$ 先疊合成單一的正弦或餘弦，再把 x 的範圍換成整個角的範圍，極值與不等式都在那個範圍裡找。

混合題第 23~24 題：滾動的硬幣與正弦函數

- 23 圓心離地面 10 公分。以圓心為原點、水平向右為始邊來量廣義角：接地點 C 在正下方，對應的角是 $-\frac{\pi}{2}$ ；正三角形的三個頂點把圓周三等分，相鄰兩頂點相差 $\frac{2\pi}{3}$ ，所以右上方的 B 一開始對應的角是 $-\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ 。硬幣向左滾動時是逆時針轉，滾了 x 公分，轉過的弧長也是 x ，轉角是 $\frac{x}{10}$ 徑， B 對應的角變成 $\frac{x}{10} + \frac{\pi}{6}$ 。 B 的高度等於圓心高度加上「半徑乘以這個角的正弦值」，即 $y = 10 \sin \left(\frac{x}{10} + \frac{\pi}{6} \right) + 10$ 。所以 $a = 10$ ， $b = \frac{1}{10}$ ， $c = \frac{\pi}{6}$ ， $d = 10$ 。

檢查： $x = 0$ 時 $y = 10 \times \frac{1}{2} + 10 = 15$ ，與圖中 B 的高度（圓心上方 5 公分）相符；剛開始向左滾時 B 往上升， y 也是遞增。

- 24 代入上一題的式子： $\frac{x}{10} + \frac{\pi}{6} = \frac{185\pi}{60} + \frac{\pi}{6} = \frac{37\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = \frac{39\pi}{12} = \frac{13\pi}{4}$ 。 $\frac{13\pi}{4} = 2\pi + \frac{5\pi}{4}$ ，所以 $\sin \frac{13\pi}{4} = \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。高度 $y = 10 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 10 = 10 - 5\sqrt{2}$ 公分。
 $10 - 5\sqrt{2} \approx 2.93$ 公分，介於 0 與 20 之間，合理。

滾動不滑動時，轉過的弧長等於前進的距離，轉角 = 距離 ÷ 半徑；圓上一點的高度 = 圓心高度 + 半徑 × 該點對應廣義角的正弦值。



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自松山高中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/sssh-114a-g11a-1