

瑞祥高中 114 學年度上學期 高一第一次段考



御藍教育

範圍：數與式、多項式（實數與根式、絕對值、指數律、算幾不等式、多項式的除法原理與恆等式） · 多選
題 4 題（28 分）、填充題 12 格（72 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/rssh-114a-g10-1

一、多選題（一題 7 分，共 28 分，錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 3 分，錯三個以上選項或未作答得 0 分）

1 設多項式 $f(x)$ 的次數大於 1，且 $f(x)$ 除以 $a(x + 2025)$ 的商式為 $q(x)$ ，餘式為 $r(x)$ ，其中 a 為非零的實數，試問下列敘述何者為真？

- (A) $r(x)$ 必為非零的常數
- (B) $f(x)$ 除以 $(x + 2025)$ 的商式為 $aq(x)$
- (C) $(x + 2025)f(x)$ 除以 $a(x + 2025)$ 的餘式為 $\frac{r(x)}{a}$
- (D) $af(x)$ 除以 $(x + 2025)$ 的商式為 $a^2q(x)$
- (E) $af(x)$ 除以 $(x + 2025)$ 的餘式為 $ar(x)$

2 設 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 為整係數多項式，若 $2|a| + 3|b - 1| + |c + 7| + 10|d - 2| + 6|e| = 2$ ，則 $\deg f(x)$ 可能為？

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3
- (E) 4

3 設 a 為實數且 $0 < a < 1$ ，已知 $a + a^{-1} = 6$ ，試問下列敘述何者為真？

- (A) $a - a^{-1} = \pm 4\sqrt{2}$
- (B) $a^2 - a^{-2} = -24\sqrt{2}$
- (C) $a^3 + a^{-3} = 198$
- (D) $a^4 + a^{-4} = 1154$
- (E) $a^5 + a^{-5} = 6732$



- 4 數線上有 A 、 B 、 P 三點，坐標分別為 a 、 b 、 x ，已知 $a < b$ ，且 $3|x - a| = 4|x - b|$ ，試問下列敘述何者正確？
- (A) $\overline{PA} : \overline{PB} = 4 : 3$
- (B) x 可能為 $\frac{4a + 3b}{7}$
- (C) x 可能為 $4b - 3a$
- (D) $x > \frac{a + b}{2}$ 必成立
- (E) x 必為有理數

二、填充題（一格 6 分，共 72 分，答案須完全正確才給分）（本頁第 5~16 題依序為原卷填充題第 1~12 題）

- 5 設 a 為實數且 $a > 2$ ，當 $a = x$ 時 $a + \frac{9}{a - \sqrt{3}}$ 有最小值 m ，試求數對 (x, m) 之值為 _____。

- 6 已知 $512^x = 4$ ， $64^y = 32$ ，試求 $\frac{5x - 2y}{xy}$ 之值為 _____。

- 7 已知 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -2$ 且 $a = 2^x = 3^y = 5^z$ ，試求 a 之值為 _____。

- 8 設 $f(x) = a(x + 1)(x - 1) + bx(x + 1) + cx(x - 1)$ ，其中 a 、 b 、 c 為常數， $g(x) = 114x + 2$ ，若 $f(x) = g(x)$ ，試求數對 (a, b, c) 之值為 _____。

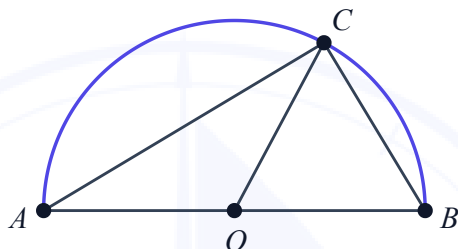
- 9 若 $\sqrt{7}$ 之小數部分為 k ，試求 $\frac{3k + 3}{\sqrt{2} - k}$ 之值為 _____。

- 10 設 $f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x + 1$ ，試求 $f\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$ 之值為 _____。



- 11 試求不等式 $|x+1| + |x-3| \leq 7$ 之解為 _____。

- 12 如右圖，已知半圓的直徑 $\overline{AB} = 10$ ， C 點在半圓弧 AB 上，試求 $\triangle ABC$ 的面積最大值為 _____。



- 13 設 $a^{2x} = \sqrt{2} + 1$ ，試求 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x - a^{-x}}$ 之值為 _____。

- 14 設 x, y 均為實數，已知 $|x+1| \leq 3$ 且 $|y-2| \leq 1$ ，若 $(x-1)^2 - y^2$ 之最小值為 m ，最大值為 M ，試求數對 (M, m) 之值為 _____。

- 15 已知不等式 $|-3x+a| \leq b$ 之解為 $-1 \leq x \leq 5$ ，試求數對 (a, b) 之值為 _____。

- 16 設 $f(x) = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d = (x+2)^3 + 3(x+2)^2 - 7(x+2) + 2$ ，試求數對 (a, b, c, d) 之值為 _____。



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/rssh-114a-g10-1

答案一覽

第 1 題 (B)(D)(E)

第 2 題 (D)(E)

第 3 題 (B)(C)(D)

第 4 題 (A)(C)(D)

第 5 題 $(3 + \sqrt{3}, 6 + \sqrt{3})$

第 6 題 -3

第 7 題 $\frac{\sqrt{30}}{30}$

第 8 題 $(-2, 58, -56)$

第 9 題 $3\sqrt{2}$

第 10 題 $8 + 2\sqrt{5}$

第 11 題 $-\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$

第 12 題 25

第 13 題 $3 + \sqrt{2}$

第 14 題 $(24, -9)$

第 15 題 $(6, 9)$

第 16 題 $(1, 12, 38, 35)$

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。（不用註冊）
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit（可以先把姓名、座號遮掉）



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/rssh-114a-g10-1

多選 1~4：除法原理、次數、對稱式、分點

- 1 答案 (B)(D)(E)。由除法原理 $f(x) = a(x + 2025)q(x) + r(x)$ ，除式是一次式，所以 $r(x)$ 是常數，記作 r 。(A) 錯： r 也可能是 0（整除的情形）。(B) 對： $f(x) = (x + 2025) \cdot aq(x) + r$ ，除式 $(x + 2025)$ 仍是一次式、 r 是常數，所以商式是 $aq(x)$ 、餘式是 r 。(C) 錯： $(x + 2025)f(x) = a(x + 2025) \cdot (x + 2025)q(x) + r(x + 2025)$ ，而 $r(x + 2025) = a(x + 2025) \cdot \frac{r}{a}$ 也能被除式整除，所以餘式是 0， $\frac{r}{a}$ 是併進商式的那一項。(D)(E) 對： $af(x) = (x + 2025) \cdot a^2q(x) + ar$ ，商式 $a^2q(x)$ 、餘式 ar 。

被除式或除式乘以常數時，一律回到「被除式 = 除式 $\times$ 商式 + 餘式」重寫，再檢查餘式的次數有沒有比除式低。另一個流傳版本的 (E) 把除式印作 $a(x + 2025)$ ；那樣 $af(x) = a(x + 2025) \cdot aq(x) + ar$ ，餘式同樣是 $ar(x)$ ，(E) 仍然正確，答案不受影響。

- 2 答案 (D)(E)。係數都是整數，所以每個絕對值都是非負整數，總和只有 $2 \cdot 3|b - 1| + 10|d - 2| + 6|e|$ 只要不是 0 就超過 2，所以 $b = 1$ 、 $d = 2$ 、 $e = 0$ ，剩下 $2|a| + |c + 7| = 2$ 。情形一： $|a| = 1$ 、 $c = -7$ ，此時 $a = \pm 1 \neq 0$ ， $\deg f(x) = 4$ 。情形二： $a = 0$ 、 $|c + 7| = 2$ ($c = -5$ 或 -9)，此時最高次項是 $bx^3 = x^3$ ， $\deg f(x) = 3$ 。所以次數可能是 3 或 4。

b 一定是 1，三次項永遠存在，次數不可能低於 3。

- 3 答案 (B)(C)(D)。(A) 錯： $(a - a^{-1})^2 = (a + a^{-1})^2 - 4 = 32$ ，而 $0 < a < 1$ 時 $a^{-1} > 1 > a$ ，所以 $a - a^{-1}$ 是負的，只能是 $-4\sqrt{2}$ ，不能寫 $\pm$ 。(B) 對： $a^2 - a^{-2} = (a + a^{-1})(a - a^{-1}) = 6 \times (-4\sqrt{2}) = -24\sqrt{2}$ 。(C) 對： $a^3 + a^{-3} = (a + a^{-1})^3 - 3(a + a^{-1}) = 216 - 18 = 198$ 。(D) 對： $a^2 + a^{-2} = 6^2 - 2 = 34$ ， $a^4 + a^{-4} = 34^2 - 2 = 1154$ 。(E) 錯： $(a^2 + a^{-2})(a^3 + a^{-3}) = a^5 + a^{-5} + a + a^{-1}$ ，所以 $a^5 + a^{-5} = 34 \times 198 - 6 = 6726$ 。

(E) 的 6732 正好是 34×198 ，少減了交叉項 $a + a^{-1} = 6$ 。

- 4 答案 (A)(C)(D)。(A) 對： $3\overline{PA} = 4\overline{PB}$ ，所以 $\overline{PA} : \overline{PB} = 4 : 3$ 。去絕對值分兩種： $3(x - a) = -4(x - b)$ 得 $x = \frac{3a + 4b}{7}$ (P 在 A 、 B 之間)； $3(x - a) = 4(x - b)$ 得 $x = 4b - 3a$ (P 在 B 的右邊)。(B) 錯： $\frac{4a + 3b}{7}$ 是 $\overline{PA} : \overline{PB} = 3 : 4$ 的分點，它要等於上面兩個值都得 $a = b$ ，不合。(C) 對。(D) 對： $\frac{3a + 4b}{7} - \frac{a + b}{2} = \frac{b - a}{14} > 0$ ，且 $4b - 3a - \frac{a + b}{2} = \frac{7(b - a)}{2} > 0$ ，兩個可能的 x 都比中點大。(E) 錯：例如 $a = 0$ 、 $b = \sqrt{2}$ 時 $x = \frac{4\sqrt{2}}{7}$ 或 $4\sqrt{2}$ ，都是無理數。

P 離 B 比較近，所以不管內分或外分都在中點的右邊；內分點的係數是「離誰近，誰的係數大」。

多選題的每個選項都回到定義重寫一次：除法原理寫成等式、絕對值拆成兩種情形、對稱式用乘法公式展開。

填充 1~6（第 5~10 題）：算幾不等式、指數律、恆等式、根式

- 5 把式子湊成兩項相乘為定值： $a + \frac{9}{a - \sqrt{3}} = (a - \sqrt{3}) + \frac{9}{a - \sqrt{3}} + \sqrt{3}$ 。因為 $a > 2 > \sqrt{3}$ ， $a - \sqrt{3} > 0$ ，由算幾不等式 $(a - \sqrt{3}) + \frac{9}{a - \sqrt{3}} \geq 2\sqrt{9} = 6$ ，所以原式 $\geq 6 + \sqrt{3}$ 。等號成立在 $a - \sqrt{3} = \frac{9}{a - \sqrt{3}}$ ，即 $a - \sqrt{3} = 3$ ， $a = 3 + \sqrt{3}$ （符合 $a > 2$ ）。答 $(x, m) = (3 + \sqrt{3}, 6 + \sqrt{3})$ 。

湊項時多減的 $\sqrt{3}$ 要加回來；等號成立的 a 要檢查在範圍內。



6 化成以 2 為底： $512^x = 2^{9x} = 2^2$ ， $x = \frac{2}{9}$ ； $64^y = 2^{6y} = 2^5$ ， $y = \frac{5}{6}$ 。所求 $\frac{5x-2y}{xy} = \frac{5}{y} - \frac{2}{x} = 5 \times \frac{6}{5} - 2 \times \frac{9}{2} = 6 - 9 = -3$ 。
先把分式拆成 $\frac{5}{y} - \frac{2}{x}$ ，代入倒數比較快。

7 $a = 2^x$ ，兩邊取 $\frac{1}{x}$ 次方得 $2 = a^{\frac{1}{x}}$ ；同理 $3 = a^{\frac{1}{y}}$ 、 $5 = a^{\frac{1}{z}}$ 。三式相乘： $30 = a^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = a^{-2}$ ，所以 $a^2 = \frac{1}{30}$ 。 $a = 2^x > 0$ ，故 $a = \frac{1}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{30}$ 。
流傳版本的簡答寫 $\frac{1}{\sqrt{30}}$ ，與 $\frac{\sqrt{30}}{30}$ 是同一個數。

8 $f(x) = g(x)$ 是恆等式， x 代任何數兩邊都相等。代 $x = 1$ ： $2b = 114 + 2 = 116$ ， $b = 58$ 。代 $x = -1$ ： $2c = -114 + 2 = -112$ ， $c = -56$ 。代 $x = 0$ ： $-a = 2$ ， $a = -2$ 。答 $(a, b, c) = (-2, 58, -56)$ 。檢查 x^2 的係數： $a + b + c = 0$ ，與 $g(x)$ 沒有二次項相符。
三個代入值正好各讓兩項變成 0，不必展開比較係數。

9 $2 < \sqrt{7} < 3$ ，所以整數部分是 2， $k = \sqrt{7} - 2$ 。分子 $3k + 3 = 3\sqrt{7} - 3 = 3(\sqrt{7} - 1)$ 。分母 $\sqrt{2-k} = \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}$ （因為 $8-2\sqrt{7} = (\sqrt{7}-1)^2$ ）。相除得 $3(\sqrt{7}-1) \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-1} = 3\sqrt{2}$ 。
 $\sqrt{4-\sqrt{7}}$ 裡的根號前面沒有 2，先把分子分母同乘以 2 再配成完全平方。

10 令 $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，則 $2t-1 = \sqrt{5}$ ，平方得 $4t^2 - 4t + 1 = 5$ ，即 $t^2 - t - 1 = 0$ 。用 $x^2 - x - 1$ 去除 $f(x)$ ： $f(x) = (x^2 - x - 1)(x^2 + 4x + 5) + (4x + 6)$ 。代入 $x = t$ ，前一項是 0，所以 $f(t) = 4t + 6 = 2(1 + \sqrt{5}) + 6 = 8 + 2\sqrt{5}$ 。
也可以用 $t^2 = t + 1$ 逐次降次： $t^3 = 2t + 1$ 、 $t^4 = 3t + 2$ ，代入得 $(3t + 2) + 3(2t + 1) - 5t + 1 = 4t + 6$ 。

帶根號的數要代入高次式時，先找出它滿足的二次方程式，再用除法或降次，只剩一次式要算。

填充 7~12（第 11~16 題）：絕對值不等式、極值、指數式、恆等式

11 分三段。 $x \geq 3$ 時： $(x+1) + (x-3) = 2x-2 \leq 7$ ， $x \leq \frac{9}{2}$ ，得 $3 \leq x \leq \frac{9}{2}$ 。 $-1 \leq x < 3$ 時： $(x+1) - (x-3) = 4 \leq 7$ 恆成立。 $x < -1$ 時： $-(x+1) - (x-3) = -2x+2 \leq 7$ ， $x \geq -\frac{5}{2}$ ，得 $-\frac{5}{2} \leq x < -1$ 。三段合起來是 $-\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$ 。

幾何看法：到 -1 和 3 的距離和不超過 7；兩點相距 4，往兩邊各可再走 $\frac{7-4}{2} = \frac{3}{2}$ 。另一個流傳版本的簡答印作 $\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$ ，少了負號； $x = 0$ 代入得 $4 \leq 7$ 成立，可知左端點應為 $-\frac{5}{2}$ 。

12 以 $\overline{AB}$ 為底，設 C 到 $\overline{AB}$ 的距離為 h ，面積是 $\frac{1}{2} \times 10 \times h = 5h$ 。 C 在半圓上， $\overline{OC} = 5$ ，而 $h \leq \overline{OC} = 5$ ，等號在 $\overline{OC} \perp \overline{AB}$ （ C 是弧的中點）時成立。所以面積最大值是 $5 \times 5 = 25$ 。

用算幾不等式也可以： $\angle ACB = 90^\circ$ ，設 $\overline{AC} = p$ 、 $\overline{BC} = q$ ， $p^2 + q^2 = 100$ ， $\frac{p^2 + q^2}{2} \geq \sqrt{p^2 q^2} = pq$ ，所以 $pq \leq 50$ ，面積 $\frac{1}{2}pq \leq 25$ ，等號在 $p = q = 5\sqrt{2}$ 時成立。



13 分子分母同乘以 a^x : $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} - 1} \circ a^{2x} = \sqrt{2} + 1$, 所以 $a^{4x} = (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$,
 $a^{-2x} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$ 。分子 $= 3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = 2 + 3\sqrt{2}$, 分母 $= \sqrt{2}$ 。所求 $= \frac{2 + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 3$ 。

分子是相加、分母是相減，不能直接用立方和公式約分；同乘 a^x 把每一項都化成 a^{2x} 的次方。

14 $|x + 1| \leq 3$ 即 $-4 \leq x \leq 2$, 所以 $-5 \leq x - 1 \leq 1$, $0 \leq (x - 1)^2 \leq 25$ ($x = 1$ 時為 0, $x = -4$ 時為 25)。 $|y - 2| \leq 1$ 即 $1 \leq y \leq 3$, 所以 $1 \leq y^2 \leq 9$ 。 x 、 y 各自獨立，最大值 $M = 25 - 1 = 24$ ($x = -4$ 、 $y = 1$)，最小值 $m = 0 - 9 = -9$ ($x = 1$ 、 $y = 3$)。答 $(M, m) = (24, -9)$ 。

$x - 1$ 的範圍跨過 0，平方的最小值是 0，不是 1。答案的順序是 (M, m) ，先寫最大值。

15 解 $-1 \leq x \leq 5$ 的中點是 2、到中點的距離是 3，所以它等於 $|x - 2| \leq 3$ 。兩邊乘以 3： $|3x - 6| \leq 9$ ，也就是 $|-3x + 6| \leq 9$ 。和 $|-3x + a| \leq b$ 對照，得 $a = 6$ 、 $b = 9$ 。

直接解也可以： $-b \leq -3x + a \leq b$ 得 $\frac{a-b}{3} \leq x \leq \frac{a+b}{3}$ ，令 $\frac{a-b}{3} = -1$ 、 $\frac{a+b}{3} = 5$ 。

16 令 $t = x - 1$ ，則 $x + 2 = t + 3$ 。右邊 $= (t + 3)^3 + 3(t + 3)^2 - 7(t + 3) + 2 = (t^3 + 9t^2 + 27t + 27) + (3t^2 + 18t + 27) - (7t + 21) + 2 = t^3 + 12t^2 + 38t + 35$ 。和左邊 $at^3 + bt^2 + ct + d$ 比較係數， $(a, b, c, d) = (1, 12, 38, 35)$ 。檢查： $x = 1$ 代入右邊得 $27 + 27 - 21 + 2 = 35 = d$ 。

也可以把右邊展開成 $x^3 + 9x^2 + 17x + 8$ 後，用綜合除法連續除以 $x - 1$ 三次，餘數依序是 d 、 c 、 b 。

絕對值不等式先翻成區間再做；要求極值時，先確認每個變數各自的範圍，以及平方後的範圍有沒有跨過零。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自瑞祥高中 114 學年度上學期高一第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE • EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/rssh-114a-g10-1