

平鎮高中 114 學年度上學期 高三第一次段考



御藍教育

範圍：極限與函數（數列的極限、 Σ 求和、無窮等比級數與循環小數、函數的合成與奇偶性、函數的極限與連續）
・ 單選題 2 題（10 分）、多選題 2 題（10 分）、選填題 16 題（80 分）；全卷畫卡作答

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/pjhs-114a-g12yi-1

第一部分：選擇題（佔 20 分） 壹、單選題（佔 10 分） | 第 1 至 2 題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1 試問下列有關極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3} + (0.9999)^n + \frac{2n-1}{n} + (-1)^n \right)$ 的敘述何者正確？

- (1) 極限為 1
- (2) 極限為 2
- (3) 極限為 3
- (4) 極限為 4
- (5) 極限不存在

2 已知函數 $f(x) = \sqrt{x}$ ， $g(x) = x^2 - 2x - 3$ ，求 $g(x)$ 與 $f(x)$ 的合成函數 $(g \circ f)(x)$ 的定義域為

- (1) $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$
- (2) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- (3) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$
- (4) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$
- (5) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -1\}$

貳、多選題（佔 10 分） | 第 3 至 4 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的，選出正確選項劃記在答案卡之「解答欄」。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 5 分，只錯一個選項可得 3 分，錯兩個選項可得 1 分，不作答或錯三個以上選項不給分。

3 試問下列哪些數列的極限值不存在？

- (1) $\left\langle \frac{n}{n+1} \right\rangle$
- (2) $\langle (-1)^n \rangle$
- (3) $\left\langle \frac{(-1)^n}{n^2} \right\rangle$
- (4) $\langle n^2 \rangle$
- (5) $\langle 7^n \rangle$



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/pjhs-114a-g12yi-1

4 下列哪些函數是偶函數？

(1) $f_1(x) = (x + 2)^2$

(2) $f_2(x) = 100x^4 - 3$

(3) $f_3(x) = [x]$

(4) $f_4(x) = \sin x$

(5) $f_5(x) = |x|$

第二部分：選填題（佔 80 分） | 1. 第 A 至 P 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（5~40）。2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。（原卷題號 A~P，本頁編為第 5~20 題）

5 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 4n^3 - 11}{3n - 5n^3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（以最簡分數作答）

6 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{2n^3 + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（以最簡分數作答）

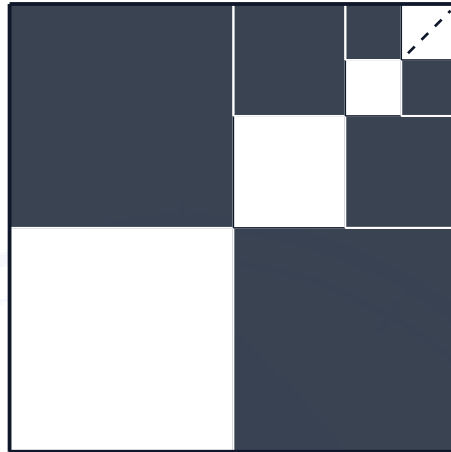
7 求 $\sum_{k=1}^{24} k(k-16)$ 的值。 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

8 求無窮等比級數的和： $30 + 18 + \frac{54}{5} + \frac{162}{25} + \cdots = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9 若將循環小數 $0.2\bar{8}$ 化為有理數，此有理數化為最簡分數之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。（以最簡分數作答）



- 10 有一個面積為 32 的正方形，先將其等分成 4 個相同的小正方形，並將左上方和右下方的兩個正方形塗黑；接著，再將右上方的小正方形等分成 4 個相同的更小正方形，並將左上方和右下方的兩個正方形塗黑；如此繼續下去...，則所有黑色區域的面積總和為 ____。(以最簡分數作答)



- 11 已知無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 中的每一項 a_n 都滿足 $6n^2 + 3 < a_n < 6n^2 + 5$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$ 的值。 ____。

- 12 設 $f(x) = x^2 + x$ ， $g(x) = 2x + 3$ ，則 $(f \circ g)(x)$ 為幾次多項式函數？ ____。

- 13 求 $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x - 3)^4 =$ ____。

- 14 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{10x + 2}{x - 1} + \frac{x + 1}{x - 3} \right) =$ ____。

- 15 求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} =$ ____。



16 若 $-|x| \leq x \times \sin \frac{1}{x} \leq |x|$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \times \sin \frac{1}{x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

17 設 a 為實數，且極限 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 2x + a}{x + 2}$ 存在，求此極限為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

18 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 7$ ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

19 設 $y = f(x)$ 為一函數，若 $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 3} \leq f(x) \leq \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$ ，試求 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 之值化為最簡分數為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

20 已知函數 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & \text{當 } x \geq -2 \\ x + a, & \text{當 } x < -2 \end{cases}$ 為連續函數，求實數 a 的值。 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/pjhs-114a-g12yi-1

答案一覽

- 第 1 題 (5)
第 2 題 (2)
第 3 題 (2)(4)(5)
第 4 題 (2)(5)
第 5 題 $\frac{4}{5}$
第 6 題 $\frac{1}{6}$
第 7 題 100
第 8 題 75
第 9 題 $\frac{13}{45}$
第 10 題 $\frac{64}{3}$
第 11 題 6
第 12 題 2
第 13 題 625
第 14 題 19
第 15 題 27
第 16 題 0
第 17 題 -10
第 18 題 (5, -6)
第 19 題 $\frac{1}{2}$
第 20 題 20

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/pjhs-114a-g12yi-1

單選題 (第 1、2 題)：極限的存在、合成函數的定義域

- 1 答案 (5)。前三項各自收斂： $\frac{1}{n^3} \rightarrow 0$ ；0.9999 的絕對值小於 1，所以 $(0.9999)^n \rightarrow 0$ ； $\frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \rightarrow 2$ 。這三項的和趨近 2。但 $(-1)^n$ 在 -1 與 1 之間來回，所以整個式子在 n 很大時，奇數項接近 $2 - 1 = 1$ 、偶數項接近 $2 + 1 = 3$ ，不會趨近同一個數，極限不存在。
(0.9999) n 雖然降得很慢，公比的絕對值小於 1 就一定趨近 0；讓極限不存在的是 $(-1)^n$ 這一項。
- 2 答案 (2)。 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x})$ ，要先能算 $f(x) = \sqrt{x}$ ，所以 $x \geq 0$ ；而 g 是多項式函數，任何實數都能代入，不再多出限制。因此定義域是 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ 。
化簡後 $(g \circ f)(x) = x - 2\sqrt{x} - 3$ 。選項 (3)(4)(5) 是從 $x^2 - 2x - 3$ 的正負去想，那是 $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ 才需要的條件，合成的順序不同。

多選題 (第 3、4 題)：數列的收斂與發散、偶函數

- 3 答案 (2)(4)(5)。(1) $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$ ，極限存在。(2) $(-1)^n$ 在 -1、1 之間來回，極限不存在。(3) $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ ，所以數列趨近 0，極限存在。(4) n^2 愈來愈大、沒有上限，極限不存在。(5) 7^n 的公比 $7 > 1$ ，同樣愈來愈大，極限不存在。
(3) 雖然正負交錯，但絕對值趨近 0，所以收斂到 0；(2) 正負交錯而且絕對值一直是 1，才是發散。
- 4 答案 (2)(5)。偶函數要對所有 x 都有 $f(-x) = f(x)$ 。(1) $f_1(1) = 9$ 、 $f_1(-1) = 1$ ，不相等，不是。(2) $f_2(-x) = 100(-x)^4 - 3 = 100x^4 - 3 = f_2(x)$ ，是。(3) $[x]$ 是高斯符號， $f_3(0.5) = 0$ 、 $f_3(-0.5) = -1$ ，不是。(4) $\sin(-x) = -\sin x$ ，是奇函數，不是偶函數。(5) $|-x| = |x|$ ，是。
(1) 的圖形是拋物線，對稱軸在 $x = -2$ 而不是 y 軸；偶函數的圖形要對稱於 y 軸。

選填 A、B、G (第 5、6、11 題)：數列的極限

- 5 分子分母同除以最高次 n^3 ： $\frac{5n - 4n^3 - 11}{3n - 5n^3} = \frac{\frac{5}{n^2} - 4 - \frac{11}{n^3}}{\frac{3}{n^2} - 5}$ 。 $n \rightarrow \infty$ 時 $\frac{5}{n^2}$ 、 $\frac{11}{n^3}$ 、 $\frac{3}{n^2}$ 都趨近 0，極限為 $\frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$ 。
分子分母沒有照降冪排，最高次項是 $-4n^3$ 與 $-5n^3$ ，不是排在最前面的 $5n$ 與 $3n$ 。
- 6 分子用平方和公式： $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。所以原式 $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(2n^3+1)}$ ，分子分母同除以 n^3 得 $\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6(2+\frac{1}{n^3})}$ ，極限為 $\frac{1 \times 2}{6 \times 2} = \frac{1}{6}$ 。
分子的項數會跟著 n 變多，不能把 $\frac{1^2}{2n^3+1}$ 、 $\frac{2^2}{2n^3+1}$...各自取極限再相加；要先求和成一個式子。
- 11 各項同除以 n^2 ($n^2 > 0$ ，不等號方向不變)： $6 + \frac{3}{n^2} < \frac{a_n}{n^2} < 6 + \frac{5}{n^2}$ 。 $n \rightarrow \infty$ 時左右兩邊都趨近 6，由夾擠定理， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 6$ 。

分式型的數列極限先同除以分母的最高次；項數會變的和先用公式收成一個式子；只知道範圍時用夾擠定理。



選填 C~F (第 7~10 題) : Σ 求和與無窮等比級數

7 $\sum_{k=1}^{24} k(k-16) = \sum_{k=1}^{24} k^2 - 16 \sum_{k=1}^{24} k$ 。其中 $\sum_{k=1}^{24} k^2 = \frac{24 \times 25 \times 49}{6} = 4900$ ， $\sum_{k=1}^{24} k = \frac{24 \times 25}{2} = 300$ 。所以原式 $= 4900 - 16 \times 300 = 100$ 。

8 首項 $a = 30$ ，公比 $r = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ (檢查： $18 \times \frac{3}{5} = \frac{54}{5}$ ， $\frac{54}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{162}{25}$)。 $|r| < 1$ ，級數收斂，和為 $\frac{a}{1-r} = \frac{30}{1-\frac{3}{5}} = 30 \times \frac{5}{2} = 75$ 。

9 循環節只有 $8 : 0.2\bar{8} = 0.2 + 0.08 + 0.008 + 0.0008 + \dots$ 。後面是首項 0.08 、公比 0.1 的無窮等比級數，和為 $\frac{0.08}{1-0.1} = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$ 。所以 $0.2\bar{8} = \frac{1}{5} + \frac{4}{45} = \frac{9}{45} + \frac{4}{45} = \frac{13}{45}$ 。
另一種算法：設 $x = 0.2\bar{8}$ ，則 $100x - 10x = 28.\bar{8} - 2.\bar{8} = 26$ ， $x = \frac{26}{90} = \frac{13}{45}$ 。若把循環節當成 28 會得到 $\frac{28}{99}$ ，與本題不同。

10 第一次分割：每個小正方形面積 $\frac{32}{4} = 8$ ，塗黑兩個，面積 16 。第二次只分割右上方那個面積 8 的小正方形，每格面積 2 ，塗黑兩個，面積 4 。之後每次被分割的正方形面積都是前一次的 $\frac{1}{4}$ ，塗黑的面積也跟著變成 $\frac{1}{4}$ 。所以黑色面積是首項 16 、公比 $\frac{1}{4}$ 的無窮等比級數： $16 + 4 + 1 + \dots = \frac{16}{1-\frac{1}{4}} = \frac{64}{3}$ 。
也可以這樣檢查：每次分割時，黑色佔被分割正方形的 $\frac{1}{2}$ 、留白 $\frac{1}{4}$ 、剩下 $\frac{1}{4}$ 繼續分，所以黑與白的面積比固定是 $2:1$ ，黑色佔全體的 $\frac{2}{3}$ ， $32 \times \frac{2}{3} = \frac{64}{3}$ 。

無窮等比級數先確認公比的絕對值小於 1 ，再用「首項除以 $(1 - \text{公比})$ 」；循環小數與重複分割的圖形都是同一個公式。

選填 H (第 12 題) : 合成函數

12 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+3) = (2x+3)^2 + (2x+3) = 4x^2 + 14x + 12$ ，最高次項是 $4x^2$ ，所以是 2 次多項式函數。

f 是二次、 g 是一次，合成後的次數是 $2 \times 1 = 2$ ；把一次式代進二次式，最高次項的係數 4 不會是 0 。

選填 I~L (第 13~16 題) : 函數的極限

13 多項式函數的極限直接代入： $x = -2$ 時 $x^2 - 2x - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$ ，所以極限為 $5^4 = 625$ 。

14 $x = 2$ 時兩個分母 $x - 1 = 1$ 、 $x - 3 = -1$ 都不是 0 ，可以直接代入： $\frac{10 \times 2 + 2}{2 - 1} + \frac{2 + 1}{2 - 3} = 22 + (-3) = 19$ 。

15 直接代入是 $\frac{0}{0}$ ，先因式分解： $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ 。 $x \rightarrow 3$ 時 $x \neq 3$ ，可以約去 $x - 3$ ，得 $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x + 9) = 9 + 9 + 9 = 27$ 。



- 16 題目已給 $-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$ 。 $x \rightarrow 0$ 時 $-|x| \rightarrow 0$ 、 $|x| \rightarrow 0$ ，左右兩邊的極限都是 0，由夾擠定理，
 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$ 。
 题目的不等式來自 $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ ，各項乘上 $|x|$ 就得到。 $\sin \frac{1}{x}$ 本身在 $x \rightarrow 0$ 時沒有極限，所以不能拆成兩個極限相乘，要用夾擠定理。

選填 M~P (第 17~20 題)：反求係數、夾擠定理、連續

- 17 $x \rightarrow -2$ 時分母趨近 0，極限要存在，分子也必須趨近 0： $3(-2)^2 + 2(-2) + a = 8 + a = 0$ ， $a = -8$ 。
 此時 $3x^2 + 2x - 8 = (x+2)(3x-4)$ ，約去 $x+2$ 後極限為 $\lim_{x \rightarrow -2} (3x-4) = -10$ 。
 題目問的是極限值 -10 ，不是 $a = -8$ 。
- 18 分母趨近 0 而極限存在，分子在 $x = 1$ 的值必為 0： $1 + a + b = 0$ ，即 $b = -1 - a$ 。於是 $x^2 + ax + b = x^2 + ax - (1+a) = (x-1)(x+1+a)$ ，約去 $x-1$ 後極限為 $1 + 1 + a = 2 + a = 7$ ，得 $a = 5$ ， $b = -6$ 。所以 $(a, b) = (5, -6)$ 。
 檢查： $x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+6)$ ， $x \rightarrow 1$ 時 $x+6 \rightarrow 7$ 。
- 19 左邊： $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-3)}$ ， $x \rightarrow 3$ 時約去 $x-3$ ，極限為 $\frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$ 。右邊： $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)}$ ，約去 $x-3$ ，極限為 $\frac{3}{3+3} = \frac{1}{2}$ 。左右兩邊的極限都是 $\frac{1}{2}$ ，由夾擠定理， $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{2}$ 。
- 20 兩段各自都是多項式，只要在接點 $x = -2$ 連續即可。 $f(-2) = (-2)^2 - 4(-2) + 6 = 18$ ，右極限也是 18；左極限用 $x + a$ 算，是 $-2 + a$ 。連續要左極限 = 右極限 = 函數值： $-2 + a = 18$ ，得 $a = 20$ 。
 $x = -2$ 屬於上面那一段 ($x \geq -2$)，函數值用 $x^2 - 4x + 6$ 算；代入時 $-4 \times (-2) = +8$ ，三項相加是 $4 + 8 + 6 = 18$ 。

分母趨近 0 而極限存在時，分子也要趨近 0，這個條件先用來求係數，再約去公因式算極限；分段函數在接點連續，就是左極限、右極限、函數值三者相等。

御藍教育

ROYAL BLUE EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自平鎮高中 114 學年度上學期高三第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/pjhs-114a-g12yi-1