

板橋高中 114 學年度上學期 高一第一次段考



御藍教育

範圍：數與式（實數、絕對值、指數、常用對數） · 單選題 4 題（24 分）、多選題 3 題（27 分）、填充題 7 題（49 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/pcsh-114a-g10-1

一、單選題（占 24 分）說明：第 1 題至第 4 題，每題 6 分。

1 若實數 a, b 為 $|x - 4| + |x - 17| = 23$ 的解且 $a < b$ ，則滿足 $a \leq N \leq b$ 的整數 N 總共有幾個？

- (1) 13
- (2) 15
- (3) 23
- (4) 24
- (5) 47

2 試問數線上多少整數點與 $\sqrt[3]{999}$ 的距離小於 9，但與 $10^{0.3}$ 的距離大於 2？

- (1) 14
- (2) 15
- (3) 16
- (4) 17
- (5) 18

3 方程式 $|2x - |x - 1|| = 5$ 的所有根之和為？

- (1) -4
- (2) $-\frac{4}{3}$
- (3) $\frac{8}{3}$
- (4) $\frac{14}{3}$
- (5) 8



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/pcsh-114a-g10-1

4 已知 $a = 0.\overline{3} + 0.\overline{7}$, $b = \sqrt{(0.3)^3 + 3 \times (0.3)^2(0.7) + 3 \times (0.3)(0.7)^2 + (0.7)^3}$, $c = \sqrt{(0.3)^2 + 0.42 + (0.7)^2}$, $d = 999 \times (0.\overline{23} + 0.\overline{23})$, 則 a 、 b 、 c 、 d 四數大小次序為?

- (1) $a > d > b = c$
- (2) $a > b = c = d$
- (3) $d > a > b = c$
- (4) $a = b = c = d$
- (5) $a > d > b > c$

二、多選題 (占 27 分) 說明：第 5 題至第 7 題，每題 9 分。(9-6-3-0)

5 下列關於指數和常用對數的敘述，請選出正確的選項。

- (1) 若 $3^a = 7$, $3^b = 8$, 則 $3^{a+b} = 15$
- (2) 若 $10^a = 18$, $10^b = 0.6$, 則 $a - 2b = \log 50$
- (3) 若 a^{27} 、 a^{58} 皆為有理數，則 a 必為有理數
- (4) 若 a^{48} 、 a^{69} 皆為有理數，則 a 必為有理數
- (5) 若 $\log b = a$, 則 $\sqrt{a^2} = a$ 且 $\sqrt{b^2} = b$

6 根據下列甲、乙兩個算式，請選出正確的選項。甲： $|x + 1| < 100$ ；乙： $\log(\log x)$ 存在 且 $|x| \leq |x - 2^{10}|$ 。

- (1) 滿足甲的 x 範圍可用 $(-101, 99)$ 表示
- (2) 滿足乙的 x 範圍可用 $(0, 2^9]$ 表示
- (3) 同時滿足甲、乙的 x 範圍長度為奇數
- (4) 同時滿足甲、乙的 x 範圍和滿足 $|ax + 1| < b$ 的 x 範圍完全相同，則 $-b - 1 < ax < b - 1$
- (5) 同時滿足甲、乙的 x 範圍和滿足 $|ax + 1| < b$ 的 x 範圍完全相同，則 $a = -0.02$

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



- 7 「視星等」是依據肉眼所見明亮程度而定出的星等，除了星體本身發光強度之外，還會受到觀測距離的影響。如果能將星體移到某個與地球等距離的位置才能客觀比較星體的亮度，天文學家將這個距離設為 32.6 光年，星體在此距離所呈現的亮度就稱為「絕對星等」。已知視星等 (m)、絕對星等 (M) 與距離 (d) 之間的關係為： $m - M = 5 \log d - 5$ ，距離的單位是秒差距 (pc)，1 秒差距等於 3.26 光年。根據以上敘述，試選出正確的選項。

(1) 根據表達式可得 $5 \times 10^d = \frac{10^m \times 10^5}{10^M}$

(2) 根據表達式可得 $5 \times d = \frac{10^m \times 10^5}{10^M}$

(3) 若一顆恆星距離地球 $2pc$ ，視星等 $m = 4.7$ ，則此恆星的絕對星等 $M \approx 6.2$ (四捨五入至小數點後第一位)

(4) 已知甲星的視星等為 9，乙星的視星等為 14，且兩星發光強度相同，則乙星與地球的距離 d_1 是甲星與地球距離 d_2 的 10 倍

(5) 已知甲星的視星等為 9，乙星的視星等為 14，且兩星發光強度相同，則乙星與地球的距離 d_1 是甲星與地球距離 d_2 的 10000 倍

三、填充題 (占 49 分) 說明：第 8 題至第 14 題，每題 7 分。

8 $\{[(2^{-0.5} + 2^{-1.5}) \times 3^{-0.5}] \times \sqrt[6]{128}\}^6 \times 6^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9 若 x, y 為實數，且滿足 $2x + 3y = \log 36$ ，則 $100^x + 1000^y$ 的最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

10 數線上有 A, B 兩點，坐標分別為 $\sqrt{18 - 2\sqrt{45}}$ 、 $\sqrt{27 + 4\sqrt{45}}$ ，若數線上相異兩點 P, Q 滿足 $\overline{AP} = 2\overline{BP}$ 、 $\overline{AQ} = 2\overline{BQ}$ ，則 $\overline{PQ} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

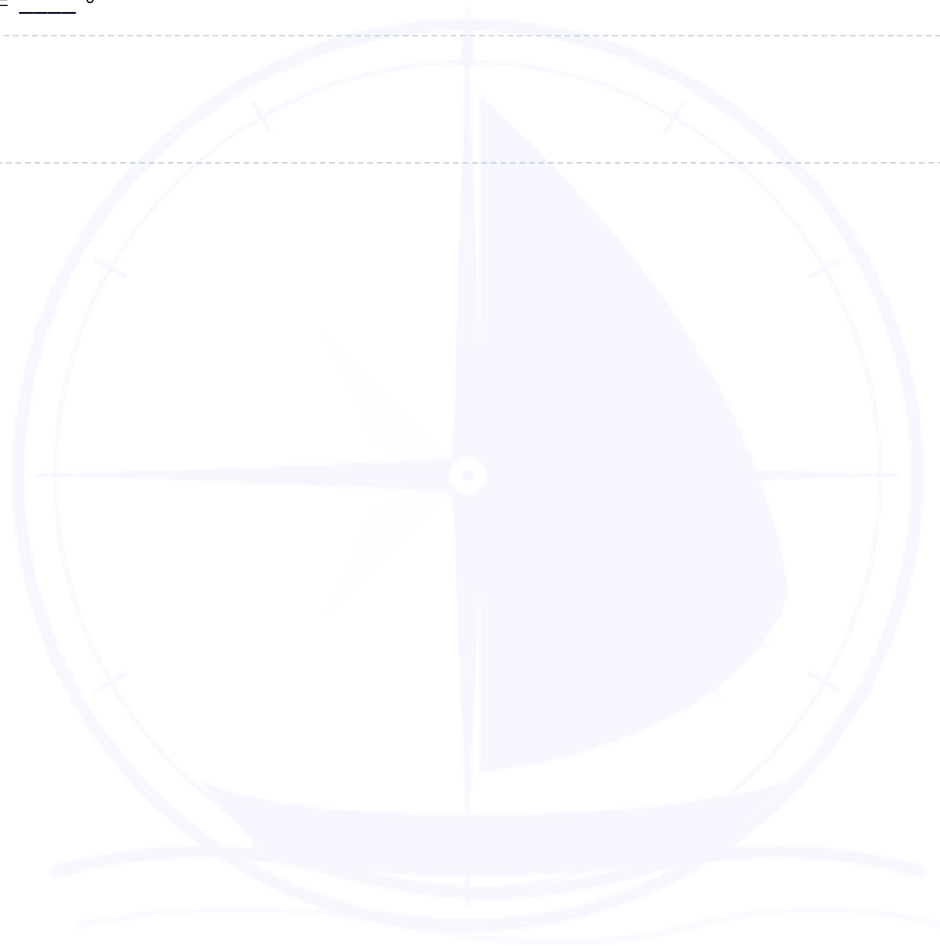
11 若 x, y 為實數，且均不為 0，若 $9^x = 16^y = 12^{xy}$ ，則 $x + y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12 已知 $\pi \approx 3.14159265$ ，今一數據為 $y = 1000^{100\pi}$ 。安安在估算 y 值時使用 π 的有效數字 3 位代入，估算出 H ；輝輝在估算 y 值時使用 π 的有效數字 5 位代入，估算出 W 。則 $\frac{W}{H}$ 最接近的整數為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



13 已知 $x = 1.0001$ ，則 $\frac{2(x-1)}{\sqrt[3]{x^2}-1}$ 最接近的整數為 ____。

14 四邊形 $ABCD$ 為一梯形，其中 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 平行， $\overline{AB} = \overline{AD} = 30$ ， $\overline{BC} = 25$ ， $\overline{CD} = 55$ 。點 P 在 $\overline{CD}$ 上，點 E 在 $\overline{AD}$ 上，點 F 在 $\overline{BC}$ 上，使得 $\overline{PE} \perp \overline{AD}$ ， $\overline{PF} \perp \overline{BC}$ 。則當 $\overline{PE} \times \overline{PF}$ 有最大值時， $\overline{PE} =$ ____。



御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/pcsh-114a-g10-1

答案一覽

- 第 1 題 (4)
第 2 題 (2)
第 3 題 (3)
第 4 題 (3)
第 5 題 (2)(3)
第 6 題 (1)(4)(5)
第 7 題 (4)
第 8 題 $\frac{9}{8}$
第 9 題 12
第 10 題 $4\sqrt{3}$
第 11 題 2
第 12 題 3
第 13 題 3
第 14 題 22

單選 1~3：絕對值與數線上的距離

- 1 答案 (4)。 $|x - 4| + |x - 17|$ 是 x 到 4 與到 17 的距離和。4 與 17 相距 13， x 在兩點之間時距離和恆為 13，所以解在兩點之外。 $x < 4$ 時 $21 - 2x = 23$ ， $x = -1$ ； $x > 17$ 時 $2x - 21 = 23$ ， $x = 22$ 。
 $a = -1$ 、 $b = 22$ ，整數 N 有 $22 - (-1) + 1 = 24$ 個。
幾何看法：距離和多出 $23 - 13 = 10$ ，兩端各往外延伸 5，得 -1 與 22 。
- 2 答案 (2)。 $9^3 = 729 < 999 < 1000 = 10^3$ ，所以 $9 < \sqrt[3]{999} < 10$ ；與它距離小於 9 的整數 n 滿足 $\sqrt[3]{999} - 9 < n < \sqrt[3]{999} + 9$ ，左端在 0 與 1 之間、右端在 18 與 19 之間，得 $n = 1, 2, \dots, 18$ 。又 $\log 2 \approx 0.3010 > 0.3$ ，所以 $1 < 10^{0.3} < 2$ ；與它距離大於 2 的整數要 $n < 10^{0.3} - 2$ (小於 0) 或 $n > 10^{0.3} + 2$ (介於 3 與 4 之間)，在 1~18 中只剩 $n = 4, 5, \dots, 18$ ，共 15 個。
- 3 答案 (3)。依 $x - 1$ 的正負分段。 $x \geq 1$ 時 $2x - (x - 1) = x + 1$ ， $|x + 1| = 5$ 得 $x = 4$ 或 $x = -6$ ，只有 $x = 4$ 在範圍內。 $x < 1$ 時 $2x + (x - 1) = 3x - 1$ ， $|3x - 1| = 5$ 得 $x = 2$ 或 $x = -\frac{4}{3}$ ，只有 $x = -\frac{4}{3}$ 在範圍內。根之和 $4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ 。
每一段解出來的根都要回頭檢查是否落在該段範圍， $x = -6$ 、 $x = 2$ 都要捨去。代回驗算： $x = -\frac{4}{3}$ 時 $|\frac{7}{3}| = 5$ 。



單選 4：循環小數與乘法公式

- 4 答案 (3)。 $a = \frac{3}{9} + \frac{7}{9} = \frac{10}{9}$ 。 b 的根號內是立方和展開 $(0.3 + 0.7)^3 = 1$ ， $b = 1$ 。 c 的根號內 $0.42 = 2(0.3)(0.7)$ ，是 $(0.3 + 0.7)^2 = 1$ ， $c = 1$ 。 $0.2\overline{3} = \frac{23-2}{90} = \frac{7}{30}$ ， $0.\overline{23} = \frac{23}{99}$ ，所以 $d = 999\left(\frac{7}{30} + \frac{23}{99}\right) \approx 999 \times 0.4657 \approx 465$ 。故 $d > a > b = c$ 。

流傳版本題幹印作 $b = \sqrt{(0.3)^3 + 3 \times (0.3)^2(0.7) + 3 \times (0.3)(0.7)^2 + 0.42 + (0.7)^3}$ ，多了一項 $+0.42$ ；照印的數字 $b = \sqrt{1.42} \approx 1.19$ ，得 $d > b > a > c$ ，五個選項都不成立。依參考答案 (3)，應為上面這個沒有 0.42 的立方和。

多選 5~7：指數、對數與絕對值不等式

- 5 答案 (2)(3)。 (1) 錯： $3^{a+b} = 3^a \cdot 3^b = 56$ 。 (2) 對： $10^{a-2b} = \frac{18}{0.6^2} = \frac{18}{0.36} = 50$ ，所以 $a - 2b = \log 50$ 。 (3) 對： $a = 0$ 時顯然有理； $a \neq 0$ 時 $58 \times 7 - 27 \times 15 = 406 - 405 = 1$ ， $a = \frac{(a^{58})^7}{(a^{27})^{15}}$ 是有理數相乘除，仍是有理數。 (4) 錯：48 與 69 的最大公因數是 3，取 $a = \sqrt[3]{2}$ ， $a^{48} = 2^{16}$ 、 $a^{69} = 2^{23}$ 都是有理數，但 a 是無理數。 (5) 錯： $b > 0$ 所以 $\sqrt{b^2} = b$ 成立，但 $a = \log b$ 可以是負數（例如 $b = 0.1$ ， $a = -1$ ），此時 $\sqrt{a^2} = |a| \neq a$ 。

(3)(4) 的關鍵是兩個指數是否互質：互質才能湊出指數 1。

- 6 答案 (1)(4)(5)。 (1) 對： $-100 < x + 1 < 100$ ，即 $-101 < x < 99$ 。 (2) 錯： $\log(\log x)$ 存在要 $\log x > 0$ ，即 $x > 1$ ； $|x| \leq |x - 1024|$ 表示 x 離 0 不比離 1024 遠，即 $x \leq 512$ 。乙的範圍是 $(1, 2^9]$ ，不是 $(0, 2^9]$ 。 (3) 錯：甲、乙交集為 $(1, 99)$ ，長度 98 是偶數。 (4) 對： $|ax + 1| < b$ 等價於 $-b < ax + 1 < b$ ，也就是 $-b - 1 < ax < b - 1$ 。 (5) 對：若 $a > 0$ ，解為 $\frac{-b-1}{a} < x < \frac{b-1}{a}$ ，要等於 $(1, 99)$ 時兩式相加得 $-\frac{2}{a} = 100$ ， $a < 0$ 矛盾；若 $a < 0$ ，解為 $\frac{b-1}{a} < x < \frac{-b-1}{a}$ ，令 $\frac{b-1}{a} = 1$ 、 $\frac{-b-1}{a} = 99$ ，相加得 $-\frac{2}{a} = 100$ ， $a = -0.02$ ， $b = 0.98$ 。

驗算 (5)： $|-0.02x + 1| < 0.98$ 即 $0.02 < 0.02x < 1.98$ ，得 $1 < x < 99$ ，與交集相同。

- 7 答案 (4)。由 $m - M = 5 \log d - 5$ 得 $\log d^5 = m - M + 5$ ，所以 $d^5 = \frac{10^m \times 10^5}{10^M}$ ；(1) 的 5×10^d 、(2) 的 $5 \times d$ 都不對。(3) 錯： $M = m - 5 \log 2 + 5 \approx 4.7 - 1.505 + 5 \approx 8.2$ ，不是 6.2。(4) 對、(5) 錯：發光強度相同表示絕對星等 M 相同，兩式相減 $14 - 9 = 5 \log d_1 - 5 \log d_2 = 5 \log \frac{d_1}{d_2}$ ，得 $\log \frac{d_1}{d_2} = 1$ ， $d_1 = 10d_2$ 。

(1)(2) 是把係數 5 誤當成乘在外面； $5 \log d = \log d^5$ ，5 應該變成次方。

填充 8~11：指數律、算幾不等式、雙重根號與取對數

- 8 $2^{-0.5} + 2^{-1.5} = 2^{-1.5}(2 + 1) = 3 \times 2^{-\frac{3}{2}}$ ，乘以 $3^{-\frac{1}{2}}$ 得 $3^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{3}{2}}$ ； $\sqrt[6]{128} = 2^{\frac{7}{6}}$ ，相乘得 $3^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{1}{3}}$ 。六次方為 $3^3 \times 2^{-2} = \frac{27}{4}$ ，再乘 6^{-1} 得 $\frac{27}{24} = \frac{9}{8}$ 。
- 9 $100^x + 1000^y = 10^{2x} + 10^{3y}$ ，兩項皆正，由算幾不等式 $10^{2x} + 10^{3y} \geq 2\sqrt{10^{2x+3y}} = 2\sqrt{10^{\log 36}} = 2\sqrt{36} = 12$ 。等號在 $10^{2x} = 10^{3y} = 6$ 時成立（ $x = \frac{\log 6}{2}$ 、 $y = \frac{\log 6}{3}$ 符合條件），最小值 12。兩項乘積 $10^{2x+3y} = 36$ 是定值，而且等號做得到，兩件事都要確認。



- 10 $18 - 2\sqrt{45}$ ：找兩數和 18、積 45，是 15 與 3，所以 $A = \sqrt{15} - \sqrt{3}$ 。 $27 + 4\sqrt{45} = 27 + 2\sqrt{180}$ ：和 27、積 180，是 15 與 12，所以 $B = \sqrt{15} + 2\sqrt{3}$ 。 $\overline{AB} = 3\sqrt{3}$ 。滿足 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 的點有兩個：內分點 P 在 A, B 之間且 $\overline{PB} = \frac{1}{3}\overline{AB} = \sqrt{3}$ ；外分點 Q 在 B 的外側且 $\overline{BQ} = \overline{AB} = 3\sqrt{3}$ 。所以 $\overline{PQ} = \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ 。

用坐標驗算： $P = \frac{A+2B}{3}$ 、 $Q = 2B - A$ ， $Q - P = \frac{4(B-A)}{3} = \frac{4}{3} \times 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ 。

- 11 取對數： $x \log 9 = y \log 16 = xy \log 12$ 。由 $x \log 9 = xy \log 12$ 且 $x \neq 0$ ，得 $y = \frac{\log 9}{\log 12}$ ；由 $y \log 16 = xy \log 12$ 且 $y \neq 0$ ，得 $x = \frac{\log 16}{\log 12}$ 。相加 $x + y = \frac{\log 16 + \log 9}{\log 12} = \frac{\log 144}{\log 12} = 2$ 。

另解：設三式都等於 k ，則 $9 = k^{\frac{1}{x}}$ 、 $16 = k^{\frac{1}{y}}$ ，相乘 $144 = k^{\frac{x+y}{xy}}$ ；又 $12 = k^{\frac{1}{xy}}$ ， $144 = 12^2 = k^{\frac{2}{xy}}$ ，比較得 $x + y = 2$ 。

填充 12~14：估算與幾何極值

- 12 $y = 1000^{100\pi} = 10^{300\pi}$ 。有效數字 3 位 $\pi \approx 3.14$ ，有效數字 5 位 $\pi \approx 3.1416$ 。 $\frac{W}{H} = 10^{300(3.1416-3.14)} = 10^{0.48}$ 。 $\log 3 \approx 0.4771 < 0.48$ ， $\log 3.5 = \log 7 - \log 2 \approx 0.5441 > 0.48$ ，所以 $3 < \frac{W}{H} < 3.5$ ，最接近的整數是 3。

- 13 令 $t = \sqrt[3]{x}$ ，則 $x - 1 = t^3 - 1 = (t - 1)(t^2 + t + 1)$ ， $\sqrt[3]{x^2} - 1 = t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1)$ 。約去 $t - 1$ ($t \neq 1$) 得原式 $= \frac{2(t^2 + t + 1)}{t + 1} = 2\left(t + \frac{1}{t + 1}\right)$ 。 $x = 1.0001$ 時 t 非常接近 1 ($1 < t < 1.0001$)，原式非常接近 $2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$ 。

直接代入分子分母都接近 0，要先用立方差把 $t - 1$ 約掉。

- 14 先求梯形的高 h ：從 A, B 向 $\overline{CD}$ 作垂線，兩側水平段長 p, q 滿足 $p + q = 55 - 30 = 25$ 且 $30^2 - p^2 = 25^2 - q^2$ ，得 $p^2 - q^2 = 275$ ， $p - q = 11$ ， $p = 18, q = 7$ ， $h = \sqrt{900 - 324} = 24$ 。令 $\overline{PD} = s$ ，則 $\overline{PC} = 55 - s$ 。 $\triangle APD$ 面積 $= \frac{1}{2} \cdot s \cdot 24 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \overline{PE}$ ，得 $\overline{PE} = \frac{4s}{5}$ ；同理 $\triangle BPC$ 得 $\overline{PF} = \frac{24(55-s)}{25}$ 。乘積 $= \frac{96}{125} s(55 - s)$ ，由算幾不等式 $s(55 - s) \leq \left(\frac{55}{2}\right)^2$ ，等號在 $s = 27.5$ 。此時 $\overline{PE} = \frac{4}{5} \times 27.5 = 22$ 。

用面積把兩條垂線段換成 $\overline{PD}, \overline{PC}$ ，兩者和是定值 55，就能用算幾不等式。此時垂足 E, F 都落在兩腰上 ($\overline{DE} = 16.5 < 30, \overline{CF} = 7.7 < 25$)。

絕對值先想成距離、次方先化成同底、兩數和或積是定值就想到算幾不等式，每一步都回頭檢查範圍與等號條件。

你們學校的段考卷也想要詳解？考完把題目頁拍照或掃描上傳，我們收到後會盡快做好放上來，一樣免費下載。
上傳：royalblue-education.com/school-exams/submit (上傳前可以先把姓名、座號遮掉)

本卷題目取自板橋高中 114 學年度上學期高一第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

御藍教育

ROYAL BLUE • EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/pcsh-114a-g10-1