

中山大學附中 114 學年度上學期 高一第一次段考



御藍教育

範圍：數與式、直線方程式（實數、絕對值、指數與常用對數、算幾不等式、直線方程式） · 多重選擇題 3 題（24 分）、填充題 9 題共 12 格（76 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/nsysush-114a-g10-1

一、多重選擇題（一題 8 分，共 24 分，錯一個選項扣 3 分）

1 有關下列描述，何者正確？

- (A) 已知 $\frac{22}{7}$ 不可化為有限小數，故 $\frac{22}{7}$ 為無理數
- (B) 若 a 、 b 是有理數且 $ab \neq 0$ ，則 $a + b\sqrt{5}$ 可能等於 0
- (C) 已知 a 、 b 屬於實數，若 $a + b\sqrt{5} = 0$ ，則 a 、 b 必為有理數
- (D) 已知 $|3x - 1| \geq 2$ ，則解的範圍區間可以寫成 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [1, \infty)$
- (E) 設 $|\alpha| > |\beta|$ ，且 α 、 β 屬於實數，則 $|\alpha| + |\beta| > |\alpha| > |\beta| > 0$

2 設整數 m 滿足不等式 $|10m - 14| \geq 5|m|$ ，試問下列選項哪些正確？

- (A) $|10m - 5m| \geq 14$
- (B) $-1 \leq \frac{5m}{10m - 14} \leq 1$
- (C) $10m - 14 \geq 5m$
- (D) $(10m - 14)^2 \geq 25m^2$
- (E) 對於 m 屬於任意整數， $\frac{(10m - 14) + 5m}{2} \geq \sqrt{(5m) \times (10m - 14)}$ 恆成立

3 三直線 $L_1: 2x + y - 4 = 0$ 、 $L_2: 5x - y + 10 = 0$ 、 $L_3: x + ay + 3 = 0$ ， a 屬於任意實數，下列何者敘述正確？

- (A) 若 $a = -\frac{1}{2}$ ，則 $L_1 \parallel L_3$
- (B) 若 $a = 5$ ，則 $L_2 \perp L_3$
- (C) 若 $a = 6$ ，則 L_3 的 x 截距為 3
- (D) 若 L_1 、 L_2 、 L_3 可圍成直角三角形，則 $a = -2$ 或 5
- (E) 若 $a > 0$ ，則 L_3 必不通過第四象限；若 $a < 0$ ，則 L_3 必不通過第一象限

二、填充題（1~8 題每題 8 分，第 9 題內每小題 4 分，共 76 分）（直線方程式答案請使用一般式 $L: ax + by + c = 0$ ， $a, b, c \in \mathbb{Z}$ 且 $(a, b, c) = 1$ ，否則不予計分）（本頁第 4~10 題依序為原卷填充 1~7，第 11、12 題為填充 8(1)、8(2)，第 13~15 題為填充 9(1)~9(3)）

4 解不等式 $1 < |2x + 3| \leq 9$ 。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/nsysush-114a-g10-1

- 5 計算將 $\frac{3}{13}$ 化為小數時，小數點後第 2025 位的數字。

- 6 已知 $a + a^{-1} = 5$ ，試問 $(a^3 + a^{-3})(a^4 - a^{-4})$ 。

- 7 設 x, y 均為不為 0 的實數，若 $16^x = 25^y = 20^{xy}$ ，則問 $x + y$ 。

- 8 已知直線 $L_1: 3x + 5y - 7 = 0$ ，今有另一直線 L_2 平行於 L_1 且 y 截距為 2，試求 L_2 直線方程式。

- 9 現某種有害人體的病菌在人體內會以指數方式增長，每小時會由 1 個分裂成 2 個。當人體內的病菌達 100 萬個時，身體便會出現不適症狀。若某人一開始將 1000 個該病菌吸入體內，則將在多少小時後身體開始出現不適症狀。(取整數)

- 10 投資一直以來是人們關注的數學難題，其中一個常選擇的問題是「選擇 100 萬元，還是選擇在一個月內每天變 2 倍的 1 分錢 (0.01 元)？」。若選擇每天變 2 倍的 1 分錢 (0.01 元) 且不限時間，試問達第幾天時當日拿到的錢會超過 100 萬？($\log 2 \approx 0.3010$)

填充題 8 已知通過點 (3, 5) 的直線有無限多條，試求在第一象限與兩坐標軸所圍成之三角形：

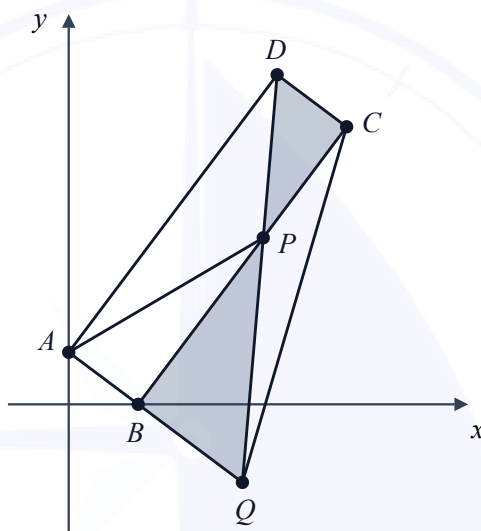
- 11 (1) 三角形面積的最小值。



- 12 (2) 三角形面積最小時直線方程式。

填充題 9 如圖，已知坐標平面上有矩形 $ABCD$ 且點坐標分別為 $A(0, 3)$ 、 $B(4, 0)$ 、 $C(16, 16)$ 、 $D(12, 19)$ ，試回答下列問題：

- 13 (1) 求 $\overline{BC}$ 中垂線方程式。



- 14 (2) 今在 $\overline{BC}$ 上取一點 R ，且 $\overline{BR} : \overline{CR} = 1 : 3$ ，試求 R 坐標。

- 15 (3) 今在 $\overline{BC}$ 上取另一點 P ，並將 D 連結 P 並延伸 $\overline{DP}$ 至 $\overline{AB}$ 延伸線上交於 Q (如圖)，試問圖中著色面積 ($\triangle CDP + \triangle BQP$ 面積) 最小值。



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/nsysush-114a-g10-1

答案一覽

第 1 題 (D)

第 2 題 (B)(D)

第 3 題 (B)(D)

第 4 題 $-6 \leq x < -2$ 或 $-1 < x \leq 3$

第 5 題 0

第 6 題 $\pm 12650\sqrt{21}$

第 7 題 2

第 8 題 $3x + 5y - 10 = 0$

第 9 題 10

第 10 題 27

第 11 題 30

第 12 題 $5x + 3y - 30 = 0$

第 13 題 $3x + 4y - 62 = 0$

第 14 題 (7, 4)

第 15 題 $100\sqrt{2} - 100$

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/nsysush-114a-g10-1

多重選擇 1~3：實數的敘述、絕對值不等式、三條直線

- 1 答案 (D)。(A) 錯： $\frac{22}{7}$ 是兩個整數的比，是有理數；不能化成有限小數只表示它是循環小數。(B) 錯：若 $a + b\sqrt{5} = 0$ 且 $b \neq 0$ ，則 $\sqrt{5} = -\frac{a}{b}$ 是有理數，矛盾；所以 a 、 b 是有理數時只可能 $a = b = 0$ ，和 $ab \neq 0$ 不合。(C) 錯： a 、 b 只說是實數，取 $a = -\sqrt{5}$ 、 $b = 1$ 就有 $a + b\sqrt{5} = 0$ ，但 a 是無理數。(D) 對： $|3x - 1| \geq 2$ 即 $3x - 1 \geq 2$ 或 $3x - 1 \leq -2$ ，得 $x \geq 1$ 或 $x \leq -\frac{1}{3}$ 。(E) 錯：取 $\alpha = 1$ 、 $\beta = 0$ ， $|\alpha| > |\beta|$ 成立，但 $|\beta| > 0$ 與 $|\alpha| + |\beta| > |\alpha|$ 都不成立。
- (B) 和 (C) 的差別在 a 、 b 是有理數還是實數：有理數時 $a + b\sqrt{5} = 0$ 只有 $a = b = 0$ ；只說實數時沒有這個結論。

- 2 答案 (B)(D)。兩邊都不是負的，平方後等價： $(10m - 14)^2 \geq 25m^2$ ，移項分解得 $(10m - 14 - 5m)(10m - 14 + 5m) \geq 0$ ，即 $(5m - 14)(15m - 14) \geq 0$ ，所以 $m \leq \frac{14}{15}$ 或 $m \geq \frac{14}{5}$ 。 m 是整數，所以 $m \leq 0$ 或 $m \geq 3$ 。(A) 錯： $|10m - 5m| = 5|m|$ ， $m = 0$ 滿足原式但 $0 \geq 14$ 不成立。(B) 對： m 是整數， $10m - 14 \neq 0$ ，原式兩邊同除以 $|10m - 14|$ 得 $\left| \frac{5m}{10m - 14} \right| \leq 1$ ，就是 $-1 \leq \frac{5m}{10m - 14} \leq 1$ 。(C) 錯： $m = 0$ 時 $-14 \geq 0$ 不成立。(D) 對：就是原式兩邊平方。(E) 錯： $m = 0$ 時左邊是 -7 、右邊是 0 ；算幾不等式要兩個數都不是負的才能用，而 $m \leq 0$ 時 $5m$ 和 $10m - 14$ 不是正數。
- 第二個流傳版本的 (A) 印作 $|10m - 5n| \geq 14$ ， n 沒有定義，本頁採 $|10m - 5m| \geq 14$ ；兩種寫法 (A) 都不選。

- 3 答案 (B)(D)。 L_1 的斜率是 -2 ， L_2 的斜率是 5 ； $a \neq 0$ 時 L_3 的斜率是 $-\frac{1}{a}$ 。(A) 錯： $a = -\frac{1}{2}$ 時 L_3 的斜率是 2 ，和 -2 不相等。(B) 對： $a = 5$ 時 L_3 的斜率是 $-\frac{1}{5}$ ， $5 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = -1$ 。(C) 錯：令 $y = 0$ 得 $x = -3$ ，不論 a 是多少， x 截距都是 -3 。(D) 對： L_1 和 L_2 的斜率相乘是 -10 ，不垂直，所以直角只能在 L_3 上。 $L_3 \perp L_1$ ： $-2 \times \left(-\frac{1}{a}\right) = -1$ ， $a = -2$ ； $L_3 \perp L_2$ ： $5 \times \left(-\frac{1}{a}\right) = -1$ ， $a = 5$ 。這兩個 a 值下三線兩兩不平行，且 L_1 、 L_2 的交點 $\left(-\frac{6}{7}, \frac{40}{7}\right)$ 不在 L_3 上（要 $a = -\frac{3}{8}$ 才會通過），確實圍成三角形。(E) 錯： $a = 1$ 時 L_3 ： $x + y + 3 = 0$ 通過 $(1, -4)$ ，在第四象限； $a = -1$ 時 L_3 ： $x - y + 3 = 0$ 通過 $(1, 4)$ ，在第一象限。
- L_3 一定通過 $(-3, 0)$ 。 $a > 0$ 時斜率為負，通過第二、三、四象限； $a < 0$ 時斜率為正，通過第一、二、三象限。

填充 1~4（第 4~7 題）：絕對值不等式、循環小數、指數求值

- 4 $1 < |2x + 3| \leq 9$ 分成兩種情形。 $2x + 3$ 為正： $1 < 2x + 3 \leq 9$ ，得 $-1 < x \leq 3$ 。 $2x + 3$ 為負： $-9 \leq 2x + 3 < -1$ ，得 $-6 \leq x < -2$ 。所以 $-6 \leq x < -2$ 或 $-1 < x \leq 3$ 。
- 左邊是 $<$ 、右邊是 $\leq$ ，拆開後每個端點有沒有等號要分別照抄： -6 和 3 有等號， -2 和 -1 沒有。
- 5 直式除法得 $\frac{3}{13} = 0.\overline{230769}$ ，每 6 位循環一次。 $2025 = 6 \times 337 + 3$ ，所以第 2025 位和循環節的第 3 位相同，是 0。
- 驗算： $230769 \times 13 = 2999997 = 3 \times 999999$ 。



6 $a^2 + a^{-2} = (a + a^{-1})^2 - 2 = 23 \cdot a^3 + a^{-3} = (a + a^{-1})^3 - 3(a + a^{-1}) = 125 - 15 = 110$ 。
 $(a - a^{-1})^2 = (a + a^{-1})^2 - 4 = 21$ ，所以 $a - a^{-1} = \pm\sqrt{21}$ 。 $a^4 - a^{-4} =$
 $(a^2 + a^{-2})(a + a^{-1})(a - a^{-1}) = 23 \times 5 \times (\pm\sqrt{21}) = \pm 115\sqrt{21}$ 。所求為 $110 \times (\pm 115\sqrt{21}) =$
 $\pm 12650\sqrt{21}$ 。

$a + a^{-1} = 5$ 的兩個解 $a = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$ 互為倒數，一個大於 1、一個小於 1，題目沒有限制，所以 $a - a^{-1}$ 正負兩個都要。

7 設 $16^x = 25^y = 20^{xy} = k$ 。因為 $x \neq 0, k \neq 1$ 。把三個式子分別開 x, y, xy 次方： $16 = k^{\frac{1}{x}}, 25 = k^{\frac{1}{y}}, 20 = k^{\frac{1}{xy}}$ 。 $16 \times 25 = 400 = 20^2$ ，所以 $k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = k^{\frac{2}{xy}}$ ，指數相等： $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{xy}$ 。兩邊同乘以 xy 得
 $x + y = 2$ 。

關鍵是三個底數的關係 $16 \times 25 = 20^2$ 。

$a + a^{-1}$ 已知時， $a^2 + a^{-2}, a^3 + a^{-3}$ 都能直接算；只要出現相減的 $a - a^{-1}$ ，就要先求它的平方再討論正負。

填充 5~7 (第 8~10 題)：平行線、指數成長

8 和 L_1 平行的直線可設為 $3x + 5y + c = 0$ 。 y 截距為 2 表示通過 $(0, 2)$ ： $10 + c = 0, c = -10$ 。所以
 $L_2: 3x + 5y - 10 = 0$ 。

9 t 小時後有 1000×2^t 個。要達到 100 萬個： $1000 \times 2^t \geq 10^6$ ，即 $2^t \geq 1000$ 。 $2^9 = 512 < 1000$ ，
 $2^{10} = 1024 \geq 1000$ ，所以在 10 小時後開始出現不適症狀。

10 1 分錢每過一天變 2 倍，第 n 天拿到 0.01×2^n 元。要超過 100 萬： $0.01 \times 2^n > 10^6$ ，即 $2^n > 10^8$ 。
 $2^n = 10^{n \log 2} \approx 10^{0.3010n}$ ，所以要 $0.3010n > 8, n > 26.57 \dots$ ，最小的整數是 $n = 27$ 。驗算： $2^{26} =$
 $67108864 < 10^8 < 134217728 = 2^{27}$ 。

這裡把一開始的 1 分錢當作起點，過一天算第 1 天 (0.02 元)，流傳版本的參考答案 27 是這個算法。如果把拿到 1 分錢的那天算作第 1 天，第 n 天是 $0.01 \times 2^{n-1}$ 元，答案會變成第 28 天。

填充 8、9 (第 11~15 題)：截距式與算幾不等式、矩形上的直線問題

11 (1) 設直線的 x 截距為 a 、 y 截距為 b ($a > 0, b > 0$)，方程式為 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 。通過 $(3, 5)$ ： $\frac{3}{a} + \frac{5}{b} = 1$ 。
 由算幾不等式 $\frac{\frac{3}{a} + \frac{5}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{3}{a} \cdot \frac{5}{b}}$ ，即 $\frac{1}{2} \geq \sqrt{\frac{15}{ab}}$ ，兩邊平方得 $\frac{1}{4} \geq \frac{15}{ab}$ ， $ab \geq 60$ 。三角形面積
 $\frac{1}{2}ab \geq 30$ ，最小值是 30。

12 (2) 等號成立在 $\frac{3}{a} = \frac{5}{b} = \frac{1}{2}$ ，即 $a = 6, b = 10$ 。直線為 $\frac{x}{6} + \frac{y}{10} = 1$ ，同乘以 30： $5x + 3y - 30 = 0$ 。
 。

這時 $(3, 5)$ 剛好是兩個截距點 $(6, 0)$ 、 $(0, 10)$ 的中點。

13 (1) $\overline{BC}$ 的中點是 $\left(\frac{4+16}{2}, \frac{0+16}{2}\right) = (10, 8)$ 。 $\overline{BC}$ 的斜率是 $\frac{16-0}{16-4} = \frac{4}{3}$ ，中垂線的斜率是 $-\frac{3}{4}$ 。中
 垂線： $y - 8 = -\frac{3}{4}(x - 10)$ ，整理得 $3x + 4y - 62 = 0$ 。



14 (2) R 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{BR} : \overline{RC} = 1 : 3$ ，由分點公式 $R = \left(\frac{3 \times 4 + 1 \times 16}{4}, \frac{3 \times 0 + 1 \times 16}{4} \right) = (7, 4)$ 。

R 離 B 比較近，所以 B 的坐標要乘比較大的 3。

15 (3) $\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ ， $\overline{BC} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ ，所以 $\overline{CD} = 5$ 。設 $\overline{CP} = u$ ($0 < u < 20$)，則 $\overline{BP} = 20 - u$ 。 $\overline{CD}$ 平行 $\overline{AB}$ ，所以 $\triangle CDP$ 和 $\triangle BQP$ 相似（對頂角相等、內錯角相等）， $\frac{\overline{BQ}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}$ ， $\overline{BQ} = \frac{5(20-u)}{u}$ 。兩個三角形在 C 、 B 都是直角： $\triangle CDP = \frac{1}{2} \times 5 \times u = \frac{5u}{2}$ ， $\triangle BQP = \frac{1}{2}(20-u) \times \frac{5(20-u)}{u} = \frac{5(20-u)^2}{2u} = \frac{1000}{u} - 100 + \frac{5u}{2}$ 。著色面積是 $5u + \frac{1000}{u} - 100$ 。由算幾不等式 $5u + \frac{1000}{u} \geq 2\sqrt{5u \cdot \frac{1000}{u}} = 2\sqrt{5000} = 100\sqrt{2}$ ，等號在 $5u = \frac{1000}{u}$ ，即 $u = 10\sqrt{2}$ 時成立（ $10\sqrt{2} \approx 14.14 < 20$ ， P 在 $\overline{BC}$ 上）。最小值是 $100\sqrt{2} - 100$ 。

流傳版本題幹括號內印作「 $\triangle ADP + \triangle CQP$ 面積」，依附圖著色的兩塊與參考答案應為 $\triangle CDP + \triangle BQP$ 。照印的字算： $\triangle ADP$ 的面積固定是 50， $\triangle CQP = \frac{1}{2}u \times \overline{BQ} = \frac{5(20-u)}{2}$ ，兩者的和隨 P 靠近 B 一直變小，沒有最小值。

用算幾不等式求極值的步驟：把要求的量寫成兩個正數的和（或把條件寫成兩個正數的和），讓它們的乘積是定值，最後一定要檢查等號成立的條件做得到。

御藍教育

ROYAL BLUE • EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自中山大學附中 114 學年度上學期高一第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE • EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/nsysush-114a-g10-1