

# 內壢高中 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數（弧度量與扇形、三角函數的圖形與週期、和差角與倍角半角公式、正餘弦的疊合） · 多選  
題 4 題（每題 7 分，共 28 分）、填充題 12 題（每題 6 分，共 72 分），合計 100 分

班級 \_\_\_\_\_ 座號 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 得分 \_\_\_\_\_

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：[royalblue-education.com/school-exams/nlhs-114a-g11a-1](http://royalblue-education.com/school-exams/nlhs-114a-g11a-1)

## 一、多選題（占 28 分） | 第 1 題至第 4 題，每題 7 分。(7-4.2-1.4-0)

1 設  $270^\circ < \theta < 360^\circ$ ，且  $\cos \theta = \frac{4}{5}$ ，下列何者正確：

(1)  $\sin 2\theta = -\frac{24}{25}$

(2)  $\cos 2\theta = \frac{7}{25}$

(3)  $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

(4)  $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

(5)  $\tan \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{3}$

2 下列何者週期為  $\pi$ ？

(1)  $y = \sin 2x$

(2)  $y = |\sin x|$

(3)  $y = \sin |x|$

(4)  $y = |\sin x| + |\cos x|$

(5)  $y = |\sin x + \cos x|$

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION

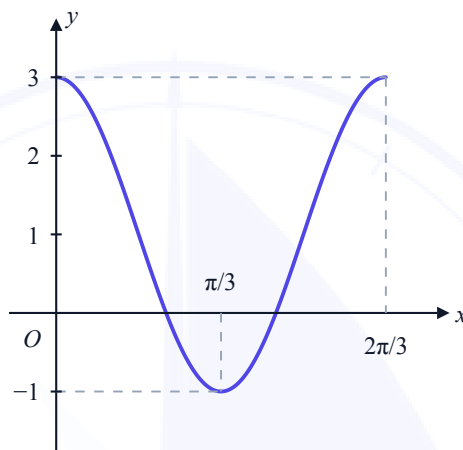


勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：[royalblue-education.com/school-exams/nlhs-114a-g11a-1](http://royalblue-education.com/school-exams/nlhs-114a-g11a-1)

3 圖為函數  $y = a \sin(bx + c) + k$  一個週期的圖形，其中  $a, b > 0$ ，下列何者正確：

- (1)  $a = 3$
- (2)  $b = 3$
- (3)  $c = \frac{\pi}{3}$
- (4)  $c = \frac{\pi}{2}$
- (5)  $k = 1$



4 函數  $y = -\sin x - \sqrt{3} \cos x$ ，其中  $0 \leq x \leq \pi$ 。當  $x = \alpha$  時， $y$  有最大值  $M$ ，當  $x = \beta$  時， $y$  有最小值  $m$ 。則下列何者正確：

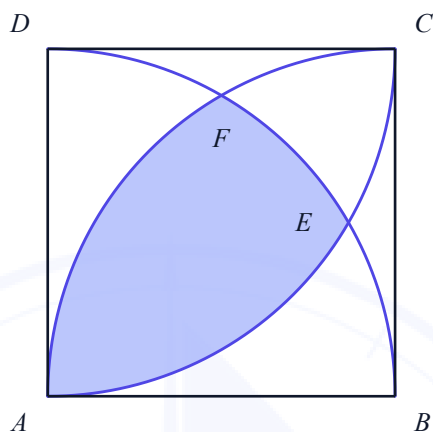
- (1)  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$
- (2)  $\beta = \pi$
- (3)  $m = -2$
- (4)  $M = 1$
- (5)  $M = \sqrt{3}$

## 二、填充題 (占 72 分) | 第 5 題至第 16 題，每題 6 分。

5 用一條長為 24 的繩子圍出一個扇形，試問所能圍出的扇形面積最大為 \_\_\_\_\_。



- 6 已知正方形  $ABCD$  的邊長為 4， $A, B, D$  為圓心，以 4 為半徑各畫  $\frac{1}{4}$  個圓（如圖），求圖中塗色部分的面積為 \_\_\_\_。



- 7 試求  $\sin^2 \frac{4\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{3} - \tan \frac{3\pi}{4}$  之值為 \_\_\_\_。

- 8 設兩直線  $L_1: 4x + 3y - 2 = 0$ ,  $L_2: x - 2y + 7 = 0$  的銳夾角為  $\theta$ ，試求  $\tan \theta$  之值為 \_\_\_\_。

- 9 設  $-\pi \leq x \leq 2\pi$ ，試求不等式  $\cos x \leq -\frac{1}{2}$  的解區間長度總和為多少？ \_\_\_\_  $\pi$ 。

- 10 若  $-\pi \leq x \leq 4\pi$ ，試求  $\cos x = \frac{2x}{7\pi}$  的方程式有 \_\_\_\_ 個實根。

- 11 設  $\sin \theta$  和  $\cos \theta$  為  $16x^2 - 9x + 1 = 0$  之兩根，試求  $2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right)^2$  之值為 \_\_\_\_。



12 若  $x = \cos(-20^\circ)$ ，試求  $12x^3 - 9x + \frac{7}{2}$  之值為 \_\_\_\_。

13 已知兩點  $A\left(\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right)$ ， $B\left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)$  在以  $O(0,0)$  為圓心的單位圓上，則  $\sin \angle AOB =$  \_\_\_\_。

14 設  $0 \leq x \leq 2\pi$ ，試求函數  $y = 3\sin x - 4\sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  之最大值為 \_\_\_\_。

15  $\triangle ABC$  中， $I$  為內心，且  $\cos \angle BIC = -\frac{2}{3}$ ，則  $\cos \angle BAC$  之值為 \_\_\_\_。

16 設  $x$  為實數，則  $f(x) = \sin x \cos x + 2\sin x + 2\cos x + \frac{5}{2}$  之最大值為 \_\_\_\_。(Hint：令  $t = \sin x + \cos x$ )

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：[royalblue-education.com/school-exams/nlhs-114a-g11a-1](http://royalblue-education.com/school-exams/nlhs-114a-g11a-1)

## 答案一覽

第 1 題 (1)(2)(3)(5)

第 2 題 (1)(2)(5)

第 3 題 (2)(5)

第 4 題 (3)(5)

第 5 題 36

第 6 題  $\frac{20\pi}{3} - 8\sqrt{3}$

第 7 題  $\frac{5}{4}$

第 8 題  $\frac{11}{2}$

第 9 題 1（長度總和為  $\pi$ ）

第 10 題 4

第 11 題  $\frac{1}{2}$

第 12 題 5

第 13 題  $\frac{84}{85}$

第 14 題  $\sqrt{21}$

第 15 題  $\frac{1}{9}$

第 16 題  $3 + 2\sqrt{2}$

### 對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。（不用註冊）
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：[royalblue-education.com/school-exams/submit](http://royalblue-education.com/school-exams/submit)（可以先把姓名、座號遮掉）



## 多選 1、2：倍角與半角的正負、判斷週期

- 1 答案 (1)(2)(3)(5)。θ 在第四象限， $\sin \theta < 0$ ，所以  $\sin \theta = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$ 。(1) 對： $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{4}{5} = -\frac{24}{25}$ 。(2) 對： $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}$ 。再看半角： $135^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ$ ，在第二象限，正弦為正、餘弦為負、正切為負。(3) 對： $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{1}{10}$ ，取正， $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 。(4) 錯： $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} = \frac{9}{10}$ ，取負， $\cos \frac{\theta}{2} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ 。(5) 對： $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \times \left(-\frac{\sqrt{10}}{3}\right) = -\frac{1}{3}$ 。

半角公式只給出平方，正負號要另外由  $\frac{\theta}{2}$  所在的象限決定：先把 θ 的範圍除以 2，再看象限。

- 2 答案 (1)(2)(5)。(1) 對： $y = \sin 2x$  是  $y = \sin x$  水平伸縮  $\frac{1}{2}$  倍，週期  $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 。(2) 對： $|\sin(x + \pi)| = |-\sin x| = |\sin x|$ ，而且函數值為 0 的位置  $x = n\pi$  (n 為整數) 每隔  $\pi$  才出現一次，所以週期就是  $\pi$ 。(3) 錯： $x = \frac{\pi}{2}$  時  $y = 1$ ， $x = \frac{\pi}{2} + \pi$  時  $y = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$ ，兩者不相等， $\pi$  不是它的週期。(4) 錯： $\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |\cos x| + |-\sin x|$ ，與原式相同，所以  $\frac{\pi}{2}$  就已經是週期，週期比  $\pi$  小。(5) 對：疊合得  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，所以  $y = \sqrt{2} \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$ ，是 (2) 的圖形經平移與鉛直伸縮，週期為  $\pi$ 。

週期指的是最小的正週期。(4) 雖然也滿足  $f(x + \pi) = f(x)$ ，但它的週期是  $\frac{\pi}{2}$ ；(3) 的圖形對稱於 y 軸，在 y 軸左右兩側接不成重複的形狀，不是週期函數。

加了絕對值的三角函數，先化成單一個三角函數的絕對值，再用  $f(x + T) = f(x)$  檢查，並確認沒有更小的週期。

## 多選 3、4：由圖形讀係數、疊合後看範圍

- 3 答案 (2)(5)。圖形的最大值是 3、最小值是 -1。因為  $a > 0$ ， $k = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$ ， $a = \frac{3 - (-1)}{2} = 2$ ，所以 (1) 錯、(5) 對。圖形從  $x = 0$  到  $x = \frac{2\pi}{3}$  恰為一個週期，週期  $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3}$ ， $b = 3$ ，(2) 對。函數是  $y = 2 \sin(3x + c) + 1$ ，圖形過  $(0, 3)$ ： $2 \sin c + 1 = 3$ ， $\sin c = 1$ ，所以  $c = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$  (n 為整數)。(3) 錯： $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1$ 。(4)： $c = \frac{\pi}{2}$  是其中一個可能的值，但 c 也可以是  $\frac{5\pi}{2}$ 、 $-\frac{3\pi}{2}$  等，題目沒有限制 c 的範圍，不能斷定 c 一定等於  $\frac{\pi}{2}$ ，所以不選。

流傳版本的參考答案為 (2)(5)，與上面「c 不唯一」的判斷一致。如果題目另外限定  $0 \leq c < 2\pi$ ，那麼  $c = \frac{\pi}{2}$ ，(4) 才會成立。可以代回檢查： $y = 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$  在  $x = \frac{\pi}{3}$  時為  $2 \sin \frac{3\pi}{2} + 1 = -1$ ，與圖相符。



- 4 答案 (3)(5)。疊合： $y = -(\sin x + \sqrt{3} \cos x) = -2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3}\right) = -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 。因為  $0 \leq x \leq \pi$ ，所以  $\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$ ，在這個範圍內  $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  的最大值是 1（在  $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ，即  $x = \frac{\pi}{6}$ ），最小值是  $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ （在  $x = \pi$ ）。乘上  $-2$  後大小顛倒： $y$  的最小值  $m = -2$ ，此時  $\beta = \frac{\pi}{6}$ ；最大值  $M = -2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$ ，此時  $\alpha = \pi$ 。所以 (3)、(5) 對，(1)、(2)、(4) 錯。

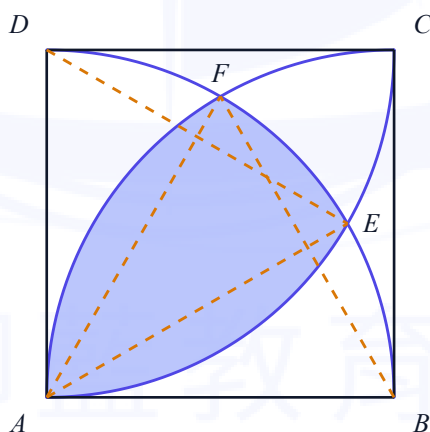
$x$  的範圍只有半圈，正弦取不到  $-1$ ，所以最大值不是 2；(1) 的  $\frac{3\pi}{2}$  根本不在  $0 \leq x \leq \pi$  內。

### 填充 5~7：扇形面積、弓形面積、弧度制的特殊角

- 5 設扇形半徑  $r$ 、圓心角  $\theta$ （弧度），弧長為  $r\theta$ 。繩長是扇形的周長： $2r + r\theta = 24$ ，所以  $r\theta = 24 - 2r$ （ $0 < r < 12$ ）。面積  $= \frac{1}{2}r \cdot r\theta = \frac{1}{2}r(24 - 2r) = 12r - r^2 = 36 - (r - 6)^2$ 。當  $r = 6$  時面積最大，最大值為 36。

此時弧長  $r\theta = 12$ ，圓心角  $\theta = 2$ （弧度）：弧長恰好等於兩條半徑的和。

- 6 設以  $A$ 、 $B$  為圓心的兩段弧交於  $F$ ，以  $A$ 、 $D$  為圓心的兩段弧交於  $E$ 。 $\overline{AF} = \overline{BF} = \overline{AB} = 4$ ， $\triangle ABF$  是正三角形， $\angle FAB = 60^\circ$ ；同理  $\triangle ADE$  是正三角形， $\angle DAE = 60^\circ$ ，所以  $\angle EAB = 30^\circ$ ， $\angle EAF = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$ 。連  $\overline{AF}$ 、 $\overline{AE}$ ，塗色區域分成三塊：① 以  $A$  為圓心、圓心角  $30^\circ = \frac{\pi}{6}$  的扇形  $AEF$ ，面積  $\frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$ 。② 弦  $\overline{AF}$  與以  $B$  為圓心的弧所夾的弓形，等於扇形  $BAF$ （圓心角  $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ ）減去正三角形  $ABF$ ： $\frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}$ 。③ 弦  $\overline{AE}$  與以  $D$  為圓心的弧所夾的弓形，同樣是  $\frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}$ 。總面積  $= \frac{4\pi}{3} + 2\left(\frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}\right) = \frac{20\pi}{3} - 8\sqrt{3}$ 。



流傳版本的附圖把正方形右下、右上兩個頂點標成  $C$ 、 $B$ ，與題幹「 $A$ ， $B$ ， $D$  為圓心」及圖中三段弧的圓心位置不合；本頁的圖依題幹把右下標為  $B$ 、右上標為  $C$ ，面積不受影響。數值約為  $20.94 - 13.86 = 7.09$ ，比正方形面積 16 的一半略小，與圖相符。

- 7  $\frac{4\pi}{3}$  在第三象限， $\sin \frac{4\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，平方得  $\frac{3}{4}$ 。 $\frac{5\pi}{3}$  在第四象限， $\cos \frac{5\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ 。 $\frac{3\pi}{4}$  在第二象限， $\tan \frac{3\pi}{4} = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$ 。原式  $= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - (-1) = \frac{5}{4}$ 。

幾段圓弧圍成的區域，先找出弧的交點與圓心連成的正三角形，再拆成扇形與弓形。



## 填充 8~10：兩直線的夾角、餘弦不等式、用圖形數實根

- 8  $L_1$  的斜率  $m_1 = -\frac{4}{3}$ ,  $L_2$  的斜率  $m_2 = \frac{1}{2}$ 。設兩直線的斜角分別為  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ ，則  $\tan \theta_1 = -\frac{4}{3}$ ， $\tan \theta_2 = \frac{1}{2}$ ，兩直線的一個夾角是  $\theta_1 - \theta_2$ ：
$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{1}{2}}{1 + (-\frac{4}{3}) \times \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{11}{6}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{11}{2}$$
。正切為負，這個夾角是鈍角；銳夾角  $\theta$  是它的補角， $\tan \theta = \frac{11}{2}$ 。

兩直線的兩個夾角互補，正切值差一個負號；題目要銳夾角，取正的那一個。

- 9 先找  $\cos x = -\frac{1}{2}$  的位置：在  $-\pi \leq x \leq 2\pi$  內有  $x = -\frac{2\pi}{3}$ 、 $\frac{2\pi}{3}$ 、 $\frac{4\pi}{3}$ 。由  $y = \cos x$  的圖形， $\cos x \leq -\frac{1}{2}$  的部分是  $-\pi \leq x \leq -\frac{2\pi}{3}$  與  $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{3}$ 。長度分別為  $\frac{\pi}{3}$  與  $\frac{2\pi}{3}$ ，總和  $= \pi$ ，格內填 1。

左邊那一段被範圍的端點  $-\pi$  截掉一半，只剩  $\frac{\pi}{3}$ ； $\frac{4\pi}{3}$  到  $2\pi$  之間餘弦值由  $-\frac{1}{2}$  上升到 1，不在解內。

- 10 在同一坐標平面畫  $y = \cos x$  與直線  $y = \frac{2x}{7\pi}$ ，數  $-\pi \leq x \leq 4\pi$  內的交點。直線過原點，在  $x = \frac{7\pi}{2}$  時高度為 1， $x > \frac{7\pi}{2}$  後高度超過 1，不會再與餘弦相交。逐段比較兩者的高度： $x = -\pi$  時  $\cos x = -1 < -\frac{2}{7}$ ， $x = -\frac{\pi}{2}$  時  $\cos x = 0 > -\frac{1}{7}$ ，所以  $-\pi$  到  $-\frac{\pi}{2}$  之間有 1 個交點； $-\frac{\pi}{2}$  到 0 之間餘弦不為負、直線為負，沒有交點。 $x = 0$  時  $1 > 0$ ， $x = \frac{\pi}{2}$  時  $0 < \frac{1}{7}$ ，0 到  $\frac{\pi}{2}$  之間有 1 個交點。 $\frac{\pi}{2}$  到  $\frac{3\pi}{2}$  之間餘弦不為正、直線為正，沒有交點。 $x = \frac{3\pi}{2}$  時  $0 < \frac{3}{7}$ ， $x = 2\pi$  時  $1 > \frac{4}{7}$ ， $x = \frac{5\pi}{2}$  時  $0 < \frac{5}{7}$ ，所以  $\frac{3\pi}{2}$  到  $2\pi$ 、 $2\pi$  到  $\frac{5\pi}{2}$  之間各有 1 個交點。 $\frac{5\pi}{2}$  到  $\frac{7\pi}{2}$  之間餘弦不為正， $\frac{7\pi}{2}$  之後直線高過 1，都沒有交點。共 4 個實根。

$x = 4\pi$  時  $\cos x = 1$ ，直線高度是  $\frac{8}{7}$ ，已經在餘弦上方，最後一個波峰碰不到直線。用計算機求得四個根約為  $-1.73$ 、 $1.44$ 、 $5.21$ 、 $7.15$ 。

## 填充 11~13：半角化回單倍角、三倍角、單位圓上的差角

- 11 先把半角化回  $\theta$ ：由  $\cos \theta = 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}$  得  $2\sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$ ； $\left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}\right)^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 1 - \sin \theta$ 。所求  $= (1 - \cos \theta)(1 - \sin \theta) = 1 - (\sin \theta + \cos \theta) + \sin \theta \cos \theta$ 。由根與係數關係， $\sin \theta + \cos \theta = \frac{9}{16}$ ， $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{16}$ ，所求  $= 1 - \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$ 。

照流傳版本題幹的方程式，兩根和  $\frac{9}{16}$ 、兩根積  $\frac{1}{16}$  會得到  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{9}{16}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{16} = \frac{49}{256} \neq 1$ ，實際上找不到這樣的  $\theta$ ；流傳版本題幹的係數可能與學校原卷不同，無從判斷原來的數字。本頁照流傳版本的題幹轉錄，並依根與係數關係算出與參考答案相同的  $\frac{1}{2}$ 。

- 12  $x = \cos(-20^\circ) = \cos 20^\circ$ 。先導出餘弦的三倍角： $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = (2\cos^2 \alpha - 1)\cos \alpha - 2\sin^2 \alpha \cos \alpha = (2\cos^2 \alpha - 1)\cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha)\cos \alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$ 。取  $\alpha = 20^\circ$ ： $4x^3 - 3x = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ 。所以  $12x^3 - 9x = 3(4x^3 - 3x) = \frac{3}{2}$ ，所求  $= \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5$ 。

看到  $x^3$  與  $x$  的係數比是 4：(-3)，就是餘弦三倍角的形狀。



- 13 設  $A$ 、 $B$  分別是角  $\alpha$ 、 $\beta$  的終邊與單位圓的交點 ( $0 < \alpha, \beta < \pi$ )，則  $\cos \alpha = \frac{8}{17}$ 、 $\sin \alpha = \frac{15}{17}$ ， $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ 、 $\sin \beta = \frac{3}{5}$ 。  $A$  在第一象限、 $B$  在第二象限， $\beta > \alpha$ ，所以  $\angle AOB = \beta - \alpha$ 。  
 $\sin \angle AOB = \sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha = \frac{3}{5} \times \frac{8}{17} - \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{15}{17} = \frac{24}{85} + \frac{60}{85} = \frac{84}{85}$ 。  
 $\angle AOB$  介於  $0^\circ$  與  $180^\circ$  之間，正弦值一定不為負；如果減的順序反了算出  $-\frac{84}{85}$ ，要取正。

式子裡出現半角的平方或半角的乘積時，先用倍角公式化回原來的角，再代已知條件。

#### 填充 14~16：展開後疊合、內心的夾角、代換成二次函數

- 14 先用差角公式展開： $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$ 。所以  $y = 3 \sin x - 4\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right) = 3 \sin x - 2\sqrt{3} \cos x - 6 \sin x = -3 \sin x - 2\sqrt{3} \cos x$ 。疊合後的振幅是  $\sqrt{(-3)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{21}$ ，即  $y = \sqrt{21} \sin(x + \varphi)$  ( $\varphi$  為某個固定的角)。  $0 \leq x \leq 2\pi$  恰為一整個週期，正弦取得到 1，最大值為  $\sqrt{21}$ 。  
 兩項的角不同 ( $x$  與  $x - \frac{\pi}{3}$ )，不能直接疊合，要先展開成同一個角的正弦與餘弦。
- 15  $I$  是內心， $\overline{BI}$ 、 $\overline{CI}$  分別平分  $\angle B$ 、 $\angle C$ ，所以  $\angle BIC = 180^\circ - \frac{\angle B + \angle C}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$ 。於是  $\cos \angle BIC = \cos\left(90^\circ + \frac{A}{2}\right) = -\sin \frac{A}{2} = -\frac{2}{3}$ ，得  $\sin \frac{A}{2} = \frac{2}{3}$ 。由倍角公式， $\cos \angle BAC = 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - 2 \times \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$ 。
- 16 令  $t = \sin x + \cos x$ ，則  $t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ ， $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$ 。  $f = \frac{t^2 - 1}{2} + 2t + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}t^2 + 2t + 2 = \frac{1}{2}(t + 2)^2$ 。疊合得  $t = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，所以  $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ 。拋物線的頂點在  $t = -2$ ，不在這個範圍內；在  $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$  上  $t + 2 > 0$ ， $t$  愈大函數值愈大，最大值在  $t = \sqrt{2}$ ：  
 $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 2)^2 = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$ 。  
 代換後一定要寫出  $t$  的範圍； $t = \sqrt{2}$  發生在  $x = \frac{\pi}{4}$ ，代回檢查： $\frac{1}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \frac{5}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$ 。

同時出現  $\sin x + \cos x$  與  $\sin x \cos x$  時，令  $t = \sin x + \cos x$  化成  $t$  的二次函數，並用疊合定出  $t$  的範圍。



## 孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

## 費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：[royalblue-education.com](https://royalblue-education.com)

LINE 客服：@royalblue\_edu

本卷題目取自內壢高中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：[royalblue-education.com/school-exams/nlhs-114a-g11a-1](https://royalblue-education.com/school-exams/nlhs-114a-g11a-1)