

興大附中 114 學年度上學期 高三第一次段考

範圍：極限與微分（數列的極限、無窮等比級數、函數的極限、導數與可微分、多項式函數的微分、切線與一次近似） · 單選題 3 題（12 分）、多選題 4 題（28 分）、選填題 10 題（50 分）、混合題 1 題 3 小題（10 分）



御藍教育

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/nchush-114a-g12jia-1

一、單選題：（每題 4 分，共 12 分。請選出最適合的選項，全對才給分。）

1 下列哪個選項為發散數列？

(1) $\left\langle \frac{3}{n+2} \right\rangle$

(2) $\left\langle 2 - \frac{1}{n^2} \right\rangle$

(3) $\left\langle \frac{-2n^2 + 1}{n^2 - 1} \right\rangle$

(4) $\left\langle \frac{(-5)^n}{6^{n+1}} \right\rangle$

(5) $\langle (-1)^n \rangle$

2 下列哪個選項的函數，在 $x = 0$ 處可微分？

(1) $f_1(x) = |x|$

(2) $f_2(x) = [x]$ ， $[\cdot]$ 為高斯符號

(3) $f_3(x) = \frac{x}{x^2 + x + 3}$

(4) $f_4(x) = \frac{x}{|x|}$

(5) $f_5(x) = \sqrt{x^2}$

3 設 a 、 b 、 c 為實數，若 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + ax^2 + bx - 8}{(x + 2)^2} = c$ ，下列選項何者正確？

(1) $a = -2$

(2) $b = 4$

(3) $c = 3$

(4) $a + b + c = -6$

(5) $abc = -32$



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/nchush-114a-g12jia-1

二、多選題：1. 每題 7 分，共 28 分，每題至少有一個選項是正確的。2. 所有選項均答對者得 7 分；錯一個選項得 4.2 分；錯二個選項得 1.4 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以 0 分計算。

4 有一實數數列 $\langle a_n \rangle$ ，其中 $a_n = \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ ， n 為正整數。試選出正確的選項。

- (1) $a_1 = \frac{1}{2}$
- (2) $a_2 = a_3$
- (3) a_n 是發散數列
- (4) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$
- (5) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^n = 1$

5 下列各無窮級數，哪些為收斂級數？

- (1) $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \cdots + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \cdots$
- (2) $\frac{2}{5} + \frac{4}{15} + \frac{8}{45} + \cdots + \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \cdots$
- (3) $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \cdots$
- (4) $6 + 6 + 6 + \cdots + 6 + \cdots$
- (5) $-2 + 2 - 2 + \cdots + (-1)^n \times 2 + \cdots$

6 已知 $f'(2) = 5$ ，則下列選項哪些正確？

- (1) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - f(2)) = 0$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 0$
- (4) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 0$
- (5) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{h} = -5$

7 設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 與 $h(x)$ 均為定義在實數上的實數值函數，下列選項何者正確？

- (1) 若 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ 存在，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 與 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 也存在。
- (2) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 。
- (3) 若 $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)|$ 存在，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 也存在。
- (4) 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$ ，且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 。
- (5) 設 $0 < |x - a| < b$ 時， $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 恆成立，若 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 與 $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ 均存在，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 也存在。



三、選填題：1. 第 A 至 J 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（8—23）。2. 每題完全答對給 5 分，共 50 分。答錯不倒扣，未完全答對不給分。（本頁第 8~17 題依序為原卷的 A~J 題）

8 $1.\overline{4} \times 4$ 的值為 ____。（原卷的答案格式為循環小數 $5.\overline{\bigcirc}$ ，圓圈填一個數字）

9 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n - 1} - \frac{n^2 - n + 1}{n} \right)$ 的值為 ____。

10 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x| - x}{|x| - 1} + \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x - 4}{|x| + 1}$ 的值為 ____。

11 已知 $f(x) = x^2 - 5|x - 1|$ 。則 $f'(-1)$ 的值為 ____。

12 設 $f(x) = \begin{cases} x^3 + x, & x \geq 1 \\ ax - b, & x < 1 \end{cases}$ ， a, b 為實數。若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 處可微分，則數對 $(a, b) =$ ____。

13 設 $f(x)$ 為多項式函數，滿足 $f(0) = 0$ 且 $(x + 1)f'(x) - 3f(x) - 6 = 0$ ，則 $f(1) =$ ____。

14 設函數 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - x + b$ 的圖形與 x 軸的交點為 P ，若以 P 為切點的切線方程式為 $y = 3x + 6$ ，則 $a + b$ 之值為 ____。（化為最簡分數）

15 設多項式函數 $f(x)$ 在 $x = 1$ 處可微分，則 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1 + t^2) - f(1)}{t}$ 之值為 ____。



16 設 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - (1+ax)}{x^2} = b$ ，則 $a+b$ 之值為 ____。(化為最簡分數)

17 設 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{3}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 之值為 ____。(化為最簡分數)

四、混合題 (共 10 分)：第 (a)、(b)、(c) 小題為非選擇題，請使用黑色原子筆在標示題號手寫卷內作答。請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分，只寫答案不予計分。(本頁第 18~20 題依序為原卷混合題第 1 題的 (a)、(b)、(c) 小題)

混合題 已知 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 17$ 為實係數三次多項式函數且 $y = g(x)$ 為 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 附近的一次近似函數，若 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 5}{x - 1} = 2$ ，試回答下列問題。

18 (a) 函數 $y = g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(非選擇題，3 分)

19 (b) 函數 $y = f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(非選擇題，3 分)



- 20 (c) 已知一次函數 $y = h(x)$ 與 $y = g(x)$ 相異，且兩函數圖形的斜率相同，若函數 $y = h(x)$ 的圖形與函數 $y = f(x)$ 的圖形相切，則函數 $y = h(x)$ 為何？（非選擇題，4 分）



御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/nchush-114a-g12jia-1

答案一覽

第 1 題 (5)

第 2 題 (3)

第 3 題 (4)

第 4 題 (1)(3)(5)

第 5 題 (1)(2)

第 6 題 (2)(5)

第 7 題 (4)

第 8 題 $5.\bar{7}$

第 9 題 2

第 10 題 -3

第 11 題 3

第 12 題 (4, 2)

第 13 題 14

第 14 題 $\frac{2}{3}$

第 15 題 0

第 16 題 $\frac{1}{2}$

第 17 題 $\frac{1}{2}$

第 18 題 $g(x) = 2x - 7$

第 19 題 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 23x - 17$

第 20 題 $h(x) = 2x - 115$

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/nchush-114a-g12jia-1

單選 1~3：收斂與發散、可微分的判斷、由極限求係數

- 1 答案 (5)。 (1) $\frac{3}{n+2} \rightarrow 0$ ，收斂。 (2) $2 - \frac{1}{n^2} \rightarrow 2$ ，收斂。 (3) 分子分母同除以 n^2 ： $\frac{-2 + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} \rightarrow -2$ ，收斂。 (4) $\frac{(-5)^n}{6^{n+1}} = \frac{1}{6} \left(-\frac{5}{6}\right)^n$ ，公比的絕對值小於 1，趨近 0，收斂。 (5) 各項為 $-1, 1, -1, 1, \dots$ ，在兩個值之間跳動，不趨近單一的數，發散。

(4) 雖然正負交錯，但絕對值愈來愈小，仍然收斂到 0；(5) 的絕對值一直是 1，才是發散。

- 2 答案 (3)。用定義看 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ 是否存在。 (1) $\frac{|h| - 0}{h}$ 在 $h \rightarrow 0^+$ 時為 1、 $h \rightarrow 0^-$ 時為 -1，左右不相等，不可微分。 (2) $-1 < x < 0$ 時 $[x] = -1$ ，而 $f_2(0) = 0$ ， $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_2(x) = -1 \neq f_2(0)$ ，在 $x = 0$ 不連續，所以不可微分。 (3) 分母 $x^2 + x + 3$ 的判別式 $1 - 12 < 0$ ，恆不為 0； $\frac{f_3(h) - f_3(0)}{h} = \frac{1}{h^2 + h + 3} \rightarrow \frac{1}{3}$ ，極限存在，可微分，且 $f'_3(0) = \frac{1}{3}$ 。 (4) $x = 0$ 時分母為 0， $f_4(0)$ 沒有定義，不可微分。 (5) $\sqrt{x^2} = |x|$ ，與 (1) 是同一個函數，不可微分。

(5) 化簡後就是 (1)， $\sqrt{x^2}$ 不是 x 。不連續或沒有定義的點一定不可微分。

- 3 答案 (4)。 $x \rightarrow -2$ 時分母 $(x+2)^2$ 趨近 0，極限要存在，分子必須有因式 $(x+2)^2$ 。分子是首項係數 1 的三次式，設 $x^3 + ax^2 + bx - 8 = (x+2)^2(x+k) = (x^2 + 4x + 4)(x+k)$ ，比較常數項 $4k = -8$ ， $k = -2$ 。展開得 $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ ，所以 $a = 2$ ， $b = -4$ 。極限 $c = \lim_{x \rightarrow -2} (x-2) = -4$ 。 $a + b + c = 2 - 4 - 4 = -6$ ，(4) 對； $abc = 2 \cdot (-4) \cdot (-4) = 32$ ，(5) 錯。

分母是 $(x+2)^2$ ，分子只有一個 $x+2$ 不夠（約掉後分母還會趨近 0），要有兩個。

可微分先看有沒有定義、連不連續，再看左右兩側的斜率是否相等。

多選 4~7：無窮級數的收斂、導數的定義、極限的性質

- 4 答案 (1)(3)(5)。由差角公式， $\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin n\pi \cos \frac{\pi}{6} - \cos n\pi \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \cos n\pi$ ，所以 n 為奇數時 $a_n = \frac{1}{2}$ ， n 為偶數時 $a_n = -\frac{1}{2}$ 。 (1) $a_1 = \frac{1}{2}$ ，對。 (2) $a_2 = -\frac{1}{2}$ ， $a_3 = \frac{1}{2}$ ，不相等，錯。 (3) 數列在 $\frac{1}{2}$ 、 $-\frac{1}{2}$ 之間跳動，發散，對。 (4) 部分和依序為 $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \dots$ ，不趨近單一的數，級數發散，沒有和，錯。 (5) n 為奇數時 $(a_n)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ； n 為偶數時 $(a_n)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 。所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ ，對。

(4) 的部分和有一半是 0，但另一半是 $\frac{1}{2}$ ，不能說和是 0。(5) 負號只出現在偶數項，偶數次方後變成正的。

- 5 答案 (1)(2)。無窮等比級數（首項不為 0）收斂的條件是公比 r 滿足 $|r| < 1$ 。 (1) $r = -\frac{2}{3}$ ，收斂。 (2) 首項 $\frac{2}{5}$ 、 $r = \frac{2}{3}$ ，收斂。 (3) $r = \frac{3}{2} > 1$ ，發散。 (4) $r = 1$ ，部分和 $6n$ 愈來愈大，發散。 (5) $r = -1$ ，部分和為 $-2, 0, -2, 0, \dots$ ，發散。

數列 $\langle r^n \rangle$ 在 $r = 1$ 時收斂，但級數在 $r = 1$ 時發散；兩者的條件差在 $r = 1$ 。



6 答案 (2)(5)。 $f'(2) = 5$ 表示 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 5$ ，所以 (3)、(4) 錯。(2) $f(x) - f(2) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \cdot (x - 2) \rightarrow 5 \cdot 0 = 0$ ，對 (可微分必連續)。(1) 由 (2) 知 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ ，但題目沒有給 $f(2)$ ；例如 $f(x) = 5x$ 滿足 $f'(2) = 5$ ，而 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 10$ ，錯。(5) 令 $k = -h$ ， $h \rightarrow 0$ 時 $k \rightarrow 0$ ， $\frac{f(2-h) - f(2)}{h} = -\frac{f(2+k) - f(2)}{k} \rightarrow -5$ ，對。
 $f'(2) = 5$ 是斜率等於 5，不是函數值等於 5。

7 答案 (4)。(1) 取 $x \neq a$ 時 $f(x) = \frac{1}{x-a}$ 、 $g(x) = -\frac{1}{x-a}$ ($f(a) = g(a) = 0$)，則 $f(x) + g(x) = 0$ ，極限存在，但 f 、 g 各自的極限都不存在，錯。(2) 取 $x \neq a$ 時 $f(x) = 1$ 、 $f(a) = 0$ ，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \neq f(a)$ ，錯。(3) 取 $x \geq a$ 時 $f(x) = 1$ 、 $x < a$ 時 $f(x) = -1$ ，則 $|f(x)| = 1$ ，極限存在，但 f 的左極限 -1 、右極限 1 不相等，錯。(4) $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x)$ ，兩個極限都存在，積的極限 $= 3 \cdot 0 = 0$ ，對。(5) 取 $g(x) = -1$ 、 $h(x) = 1$ ， f 同 (3) 的例子，則 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 且 g 、 h 的極限都存在，但 f 的極限不存在，錯。
 (5) 少了夾擠定理的關鍵條件： g 與 h 的極限要相等，才能把 f 夾到同一個值。(2) 的結論其實是「 f 在 $x = a$ 連續」，極限存在不保證連續。

判斷「若...則...」的極限敘述，先想能不能舉出反例；和、積的極限只有在各個極限都存在時才能拆開。

選填 8~12 (原卷 A~E)：循環小數、極限的計算、導數與可微分

8 $0.\bar{4} = 0.4 + 0.04 + 0.004 + \dots$ 是首項 0.4、公比 0.1 的無窮等比級數，和為 $\frac{0.4}{1-0.1} = \frac{4}{9}$ ，所以 $1.\bar{4} = \frac{13}{9}$ 。 $\frac{13}{9} \times 4 = \frac{52}{9} = 5 + \frac{7}{9} = 5.\bar{7}$ 。
 $\frac{7}{9} = 0.\bar{7}$ ，所以圓圈內填 7。

9 兩項各自發散，先通分。分母為 $n(n-1)$ ；分子 $n(n^2+2) - (n-1)(n^2-n+1) = (n^3+2n) - (n^3-2n^2+2n-1) = 2n^2+1$ 。原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n^2-n}$ ，分子分母同除以 n^2 ，得 $\frac{2+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}} \rightarrow 2$ 。
 不能把兩項分別看成「約等於 n 」就說相減是 0；差在次一級的項，要通分才看得出來。

10 第一個極限： x 在 1 附近為正， $|x| = x$ ，所以 $x \neq 1$ 時 $\frac{|x|-x}{|x|-1} = \frac{0}{x-1} = 0$ ，極限為 0。第二個極限： $x \rightarrow -1$ 時分母 $|x|+1 \rightarrow 2$ ，不為 0，直接代入： $\frac{1-3-4}{2} = -3$ 。兩者相加為 -3 。
 第一個極限的分子在 1 附近恆為 0，分母只是趨近 0 而不等於 0，所以函數值一直是 0，極限是 0，不是「不存在」。

11 x 在 -1 附近時 $x-1 < 0$ ， $|x-1| = 1-x$ ，所以在 -1 附近 $f(x) = x^2 - 5(1-x) = x^2 + 5x - 5$ 。微分得 $f'(x) = 2x + 5$ ， $f'(-1) = -2 + 5 = 3$ 。
 絕對值的折點在 $x = 1$ ，不在 $x = -1$ ；在 $x = -1$ 附近函數就是一個二次多項式，可以直接微分。



- 12 可微分必連續： $\lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - b) = a - b$ 要等於 $f(1) = 1 + 1 = 2$ ，所以 $a - b = 2$ 。再看兩側的斜率。右側： $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h)^3 + (1+h) - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^3 + 3h^2 + 4h}{h} = 4$ 。左側： $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{a(1+h) - b - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ah + (a - b - 2)}{h} = a$ 。兩側相等， $a = 4$ ， $b = a - 2 = 2$ 。 $(a, b) = (4, 2)$ 。
- 兩個條件都要用：先連續（函數值接得上），再左右斜率相等。下面那段是 $ax - b$ ，連續的條件是 $a - b = 2$ ，不是 $a + b = 2$ 。

含絕對值的式子先看該點附近絕對值裡面的正負，把絕對值拿掉再算。

選填 13~17（原卷 F~J）：多項式的微分、切線、有理化與夾擠定理

- 13 先決定次數。若 $f(x)$ 是常數，由 $f(0) = 0$ 得 $f(x) = 0$ ，代入得 $-6 = 0$ ，不合。設 $f(x)$ 為 n 次（ $n \geq 1$ ）、首項係數 $c \neq 0$ ，比較 x^n 的係數： $nc - 3c = 0$ ，所以 $n = 3$ 。由 $f(0) = 0$ 設 $f(x) = px^3 + qx^2 + rx$ ， $f'(x) = 3px^2 + 2qx + r$ 。 $(x+1)f'(x) - 3f(x) - 6 = (3p - q)x^2 + (2q - 2r)x + (r - 6) = 0$ 對所有 x 成立，所以 $r = 6$ ， $q = 6$ ， $p = 2$ 。 $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x$ ， $f(1) = 14$ 。
- 驗算： $f'(x) = 6(x+1)^2$ ， $(x+1)f'(x) = 6(x+1)^3$ ；而 $3f(x) + 6 = 6x^3 + 18x^2 + 18x + 6 = 6(x+1)^3$ ，兩者相等。
- 14 P 在 x 軸上，也在切線 $y = 3x + 6$ 上，令 $y = 0$ 得 $x = -2$ ，所以 $P(-2, 0)$ 。 $f'(x) = x^2 + 2ax - 1$ ，切線斜率 $f'(-2) = 4 - 4a - 1 = 3$ ，得 $a = 0$ 。 P 在圖形上： $f(-2) = -\frac{8}{3} + 2 + b = 0$ ，得 $b = \frac{2}{3}$ 。 $a + b = \frac{2}{3}$ 。
- 15 $t \neq 0$ 時， $\frac{f(1+t^2) - f(1)}{t} = \frac{f(1+t^2) - f(1)}{t^2} \cdot t$ 。令 $h = t^2$ ， $t \rightarrow 0$ 時 $h \rightarrow 0$ ，前一個因式趨近 $f'(1)$ ；後一個因式 $t \rightarrow 0$ 。兩個極限都存在，所以原式 $= f'(1) \cdot 0 = 0$ 。
- 分子的增量是 t^2 ，分母卻只有 t ，要補成 t^2 才是導數的定義；多出來的 t 趨近 0，所以不論 $f'(1)$ 是多少，答案都是 0。
- 16 分子分母同乘以 $\sqrt{1+x^2} + (1+ax)$ ：分子變成 $(1+x^2) - (1+ax)^2 = (1-a^2)x^2 - 2ax$ ，原式 $= \frac{(1-a^2)x - 2a}{x(\sqrt{1+x^2} + 1+ax)}$ 。 $x \rightarrow 0$ 時分母趨近 $0 \cdot 2 = 0$ ，極限要存在，分子也要趨近 0： $-2a = 0$ ， $a = 0$ 。
- 此時原式 $= \frac{x}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$ ， $b = \frac{1}{2}$ 。 $a + b = \frac{1}{2}$ 。
- 直接代 $x = 0$ 分子分母都是 0，看不出 a 的條件；有理化並約掉一個 x 之後，才看得到分子剩下常數 $-2a$ 。
- 17 a_n 的第 k 項是 $\frac{k}{\sqrt{n^2+k}}$ （ $k = 1, 2, \dots, n$ ）。因為 $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$ ，所以 $\frac{k}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{k}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{k}{\sqrt{n^2+1}}$ 。對 $k = 1$ 到 n 相加， $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ，得 $\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^2+1}}$ ，同除以 n ： $\frac{n+1}{2\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{n+1}{2\sqrt{n^2+1}}$ 。左式分子分母同除以 n 得 $\frac{1+\frac{1}{n}}{2\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{1}{2}$ ，右式同理得 $\frac{1+\frac{1}{n}}{2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \rightarrow \frac{1}{2}$ 。由夾擠定理， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{2}$ 。
- 各項的分母不同，沒辦法直接加；把分母統一換成最大的 $\sqrt{n^2+n}$ 與最小的 $\sqrt{n^2+1}$ ，分子就能用 $1 + 2 + \dots + n$ 的公式。



分母趨近 0 而極限存在，分子一定也趨近 0；加不起來的和，用最大與最小的分母夾住。

混合題 18~20 (原卷混合題 (a)~(c))：由極限讀出導數、一次近似與切線

- 18 $x \rightarrow 1$ 時分母趨近 0 而極限存在，所以分子趨近 0； $f(x)$ 是多項式， $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + 5) = f(1) + 5 = 0$ ，得 $f(1) = -5$ 。於是 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$ ，所以 $f'(1) = 2$ 。 $f(x)$ 在 $x = 1$ 附近的一次近似為 $g(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = -5 + 2(x - 1) = 2x - 7$ 。

一次近似的圖形就是過 $(1, f(1))$ 的切線；這一小題不必先求出 a 、 b 。

- 19 由 (a)， $f(1) = -5$ 且 $f'(1) = 2$ 。 $f(1) = 1 + a + b - 17 = -5$ ，得 $a + b = 11$ 。 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ ， $f'(1) = 3 + 2a + b = 2$ ，得 $2a + b = -1$ 。兩式相減 $a = -12$ ， $b = 23$ 。所以 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 23x - 17$ 。

驗算： $f(x) + 5 = x^3 - 12x^2 + 23x - 12 = (x - 1)(x^2 - 11x + 12)$ ， $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 11x + 12) = 2$ ，與題目的條件相符。

- 20 $h(x)$ 與 $g(x)$ 斜率相同，設 $h(x) = 2x + k$ ， $k \neq -7$ 。 $y = h(x)$ 與 $y = f(x)$ 相切，切點的 x 坐標 t 滿足 $f'(t) = 2$ ： $3t^2 - 24t + 23 = 2$ ， $t^2 - 8t + 7 = 0$ ， $t = 1$ 或 $t = 7$ 。 $t = 1$ 時切線就是 $y = g(x)$ ，與「相異」不合。 $t = 7$ 時 $f(7) = 343 - 588 + 161 - 17 = -101$ ，切線為 $y = -101 + 2(x - 7) = 2x - 115$ 。所以 $h(x) = 2x - 115$ 。

驗算： $f(x) - (2x - 115) = x^3 - 12x^2 + 21x + 98 = (x - 7)^2(x + 2)$ ，在 $x = 7$ 有重根，確實相切。

看到分母趨近 0 的極限等於定值，先讀出函數值，再把整個極限認成導數。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自興大附中 114 學年度上學期高三第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE • EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/nchush-114a-g12jia-1