

蘭陽女中 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數（弧度量、三角函數的圖形、和差角與倍角半角公式、正餘弦的疊合） · 單選題 5 題（15 分）、多選題 4 題（32 分）、填充題 9 題共 11 格（53 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/lygsh-114a-g11a-1

一、單選題（占 15 分）說明：第 1 題至第 5 題，每題 3 分。

1 有一個扇形半徑為 r ，圓心角為 θ ，若此扇形的周長為 10，面積為 6，則數對 (r, θ) 為何？

- (1) (2, 3)
- (2) (2, 2)
- (3) (3, 3)
- (4) (3, 2)
- (5) (4, 1)

2 試問有多少個實數 x 滿足 $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x + \sin \frac{\pi}{2}$ 且 $0 \leq x < \pi$ ？

- (1) 1 個
- (2) 2 個
- (3) 3 個
- (4) 4 個
- (5) 5 個（含）以上

3 設 $-2\pi \leq x \leq 4\pi$ ，則方程式 $\cos x = -\frac{1}{9}$ 的所有解之和為何？

- (1) 2π
- (2) 4π
- (3) 6π
- (4) 8π
- (5) 10π

4 若 n 為正整數，且函數 $f(x) = 2\sin\left(\frac{nx}{4} - \pi\right) + 3$ 的週期不大於 1，則 n 的最小值為何？

- (1) 23
- (2) 24
- (3) 25
- (4) 26
- (5) 27

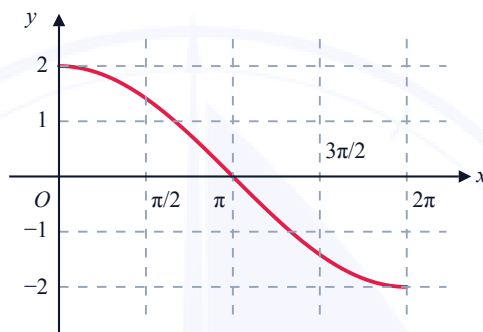


勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/lygsh-114a-g11a-1

5 圖為何種函數的部分圖形？

- (1) $y = 2 \cos \frac{x}{2}$
- (2) $y = \cos \frac{x}{2}$
- (3) $y = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$
- (4) $y = 2 \cos x$
- (5) $y = 2 \cos 2x$



二、多選題 (占 32 分) 說明：第 6 題至第 9 題，每題 8 分。(8-5-2-0)

6 選出所有正確的選項。

- (1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$
- (2) $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \theta$
- (3) $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$
- (4) $\sin(\pi - \theta) = -\sin \theta$
- (5) $\sin \pi^2 > \cos \pi^2$

7 令 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ ，試選出正確的選項。

- (1) 鉛直線 $x = \frac{7\pi}{6}$ 為 $y = f(x)$ 圖形的對稱軸
- (2) $y = f(x)$ 的圖形必對稱 y 軸
- (3) 在區間 $[0, 2\pi)$ 中有兩個實數 x 滿足 $f(x) = \sqrt{3}$
- (4) 在區間 $[0, 2\pi)$ 中滿足 $f(x) = \frac{1}{3}$ 的所有實數 x 之和不超過 2π
- (5) $y = f(x)$ 的圖形可由 $y = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$ 的圖形經適當 (左右、上下) 平移得到



8 下列各選項函數圖形中，何者的週期為 π ？

(1) $y = \sin 2x$

(2) $y = \cos \frac{x}{2}$

(3) $y = \tan x$

(4) $y = \sin 2x - \cos 2x$

(5) $y = |\sin x|$

9 若 $\sin \theta, \cos \theta$ 為方程式 $5x^2 - 7x + \frac{12}{5} = 0$ 的兩根，且知 $45^\circ < \theta < 90^\circ$ ，則下列哪些選項正確？

(1) $\sin \theta = \frac{4}{5}$

(2) $\sin 2\theta = \frac{24}{25}$

(3) $\cos(\theta + 60^\circ) = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$

(4) $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

(5) $\sin 3\theta + \cos 3\theta = -\frac{73}{125}$

三、填充題（占 53 分）說明：第 10 題至第 17 題，每格 5 分；第 18 題，每格 3 分。（本頁填充題一格一題：第 10~12 題為原卷第 10 題的 (1)(2)(3)，第 13~20 題為原卷第 11~18 題）

原卷第 10 題 化簡求值

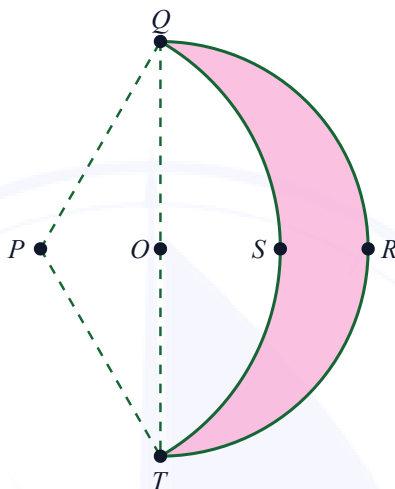
10 (1) 求 $\frac{\sin 36^\circ}{\sin 12^\circ} - \frac{\cos 36^\circ}{\cos 12^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11 (2) 求 $\cos \frac{\pi}{8} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（原卷的答案格式為 $\frac{\sqrt{\bigcirc} + \sqrt{\bigcirc}}{\bigcirc}$ ）

12 (3) 求 $-\frac{1}{\cos 80^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 13 設計師為天文館設計以不銹鋼片製成的月亮形狀，其中有一款設計圖如右圖所示：圖中，圓弧 QRT 是一個以 O 點為圓心、 $\overline{QT}$ 為直徑的半圓， $\overline{QT} = 2\sqrt{3}$ 。圓弧 QST 的圓心在 P 點， $\overline{PQ} = \overline{PT} = 2$ 。圓弧 QRT 與圓弧 QST 所圍出的塗色區域 $QRTSQ$ 即為某一天所見的月亮形狀。設此塗色區域的面積為 a （四捨五入至整數），則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 14 已知 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ ，求 $\sin 2\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 15 已知 $f(x) = 5 \cos x - 12 \sin x$ ，且當 $x = \theta$ 時，有最大值 M ，求 $M + \sin \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 16 求方程式 $5 \sin x - x = 0$ 的實根個數有 個。

- 17 若 $y = \sin(x - h)$ 的圖形經平移後可與 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的圖形重合，若 $0 \leq h < 8\pi$ ，則 h 的值有 個。

- 18 已知 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$ ，若函數 $f(x) = \sin^2 x - 2 \cos x + 1$ 的最大值 a 與最小值 b ，求 $a + 4b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



19 若 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，且 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ，求 $\tan 2\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

20 已知平面上直角 $\triangle ABC$ 的三邊長 $\overline{AB} = \sqrt{5}$ ， $\overline{AC} = 1$ ， $\overline{BC} = 2$ 。若分別以 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 為底邊在 $\triangle ABC$ 的外部作頂角等於 120° 的等腰三角形 $\triangle MAB$ 與 $\triangle NAC$ ，則 $\overline{MN}^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡根式；原卷的答案格式為 $\frac{\bigcirc + \bigcirc\sqrt{\bigcirc}}{\bigcirc}$)

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/lygsh-114a-g11a-1

答案一覽

第 1 題 (1)

第 2 題 (1)

第 3 題 (3)

第 4 題 (4)

第 5 題 (1)

第 6 題 (2)(3)(5)

第 7 題 (1)(3)(5)

第 8 題 (1)(3)(4)(5)

第 9 題 (1)(2)(3)(5)

第 10 題 2

第 11 題 $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

第 12 題 -4

第 13 題 2

第 14 題 $\frac{8}{9}$

第 15 題 $\frac{157}{13}$

第 16 題 3

第 17 題 4

第 18 題 6

第 19 題 $\frac{24}{7}$

第 20 題 $\frac{5+2\sqrt{3}}{3}$

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。（不用註冊）
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit（可以先把姓名、座號遮掉）



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/lygsh-114a-g11a-1

單選題 (第 1~5 題)：扇形、解方程式、解的和、週期、讀圖

- 1 答案 (1)。周長是兩條半徑加弧長： $2r + r\theta = 10$ ；面積 $\frac{1}{2}r^2\theta = 6$ 。由第一式 $r\theta = 10 - 2r$ ，代入第二式： $\frac{1}{2}r(10 - 2r) = 6$ ， $r^2 - 5r + 6 = 0$ ， $r = 2$ 或 $r = 3$ 。 $r = 2$ 時 $\theta = \frac{10 - 4}{2} = 3$ ； $r = 3$ 時 $\theta = \frac{10 - 6}{3} = \frac{4}{3}$ 。選項中只有 (2, 3)。
(3, $\frac{4}{3}$) 也滿足題目的兩個條件，只是不在選項裡。選項 (4) 的 (3, 2) 周長是 $6 + 6 = 12$ ，不合。
- 2 答案 (1)。 $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ ， $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ，方程式就是 $\cos x = \sin x + 1$ 。 $x = 0$ 時左邊 1、右邊 $0 + 1 = 1$ ，成立。 $0 < x < \pi$ 時 $\sin x > 0$ ，右邊 $\sin x + 1 > 1$ ，但左邊 $\cos x < 1$ ，不可能相等。所以只有 $x = 0$ 這 1 個解。
也可以疊合： $\cos x - \sin x = 1$ 化為 $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 1$ ， $\frac{3\pi}{4} \leq x + \frac{3\pi}{4} < \frac{7\pi}{4}$ 內正弦值為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的角只有 $\frac{3\pi}{4}$ ，同樣得 $x = 0$ 。 $\sin(\alpha + \beta)$ 一般不等於 $\sin \alpha + \sin \beta$ ，這題是在問它「碰巧相等」的 x 。
- 3 答案 (3)。先看 $0 \leq x \leq 2\pi$ 這一個週期： $y = \cos x$ 的圖形對稱於直線 $x = \pi$ ，與水平線 $y = -\frac{1}{9}$ 交於兩點，這兩個解的平均是 π ，和為 2π 。同理， $-2\pi \leq x \leq 0$ 內的圖形對稱於 $x = -\pi$ ，兩個解的和為 -2π ； $2\pi \leq x \leq 4\pi$ 內對稱於 $x = 3\pi$ ，兩個解的和為 6π 。總和 $= -2\pi + 2\pi + 6\pi = 6\pi$ 。
三段的交界 $x = 0, 2\pi$ 處餘弦值是 1，不是解，不會重複計算。全部共 6 個解，不必求出每一個解的值。
- 4 答案 (4)。 x 的係數是 $\frac{n}{4}$ ，週期 $= 2\pi \div \frac{n}{4} = \frac{8\pi}{n}$ 。週期不大於 1： $\frac{8\pi}{n} \leq 1$ ， $n \geq 8\pi \approx 25.13$ 。 n 是正整數，最小為 26。
括號裡的 $-\pi$ 與後面的 $+3$ 只是平移，2 是振幅，都不影響週期。 8π 介於 25 與 26 之間， $n = 25$ 時週期 $\frac{8\pi}{25} \approx 1.005$ 還是比 1 大。
- 5 答案 (1)。圖形的最高點在 (0, 2)、最低點在 $x = 2\pi$ 處，高度 -2 ，所以振幅是 2，(2)(3) 不合。最高點到相鄰的最低點是半個週期，半個週期 $= 2\pi$ ，週期 $= 4\pi$ ； $y = 2\cos kx$ ($k > 0$) 的週期是 $\frac{2\pi}{k} = 4\pi$ ， $k = \frac{1}{2}$ 。所以是 $y = 2\cos \frac{x}{2}$ 。
檢查： $x = \pi$ 時 $2\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ，圖形確實在 $x = \pi$ 穿過 x 軸。(4) 的週期是 2π 、(5) 的週期是 π ，在 $x = 2\pi$ 都回到最高點。

多選題 (第 6~9 題)：角的換算、疊合後的性質、週期、倍角半角與和角

- 6 答案 (2)(3)(5)。(1) 錯： $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \theta - \sin \frac{\pi}{2} \sin \theta = -\sin \theta$ 。(2) 對： $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta \cos \frac{\pi}{2} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{2} = \sin \theta$ 。(3) 對： $\sin(\pi + \theta) = \sin \pi \cos \theta + \cos \pi \sin \theta = -\sin \theta$ 。(4) 錯： $\sin(\pi - \theta) = \sin \pi \cos \theta - \cos \pi \sin \theta = \sin \theta$ 。(5) 對： $\pi^2 \approx 9.87$ ， $3\pi \approx 9.42$ ，所以 $\pi^2 = 3\pi + t$ ，其中 $t = \pi(\pi - 3) \approx 0.445$ 。於是 $\sin \pi^2 = -\sin t$ ， $\cos \pi^2 = -\cos t$ 。 t 比 $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$ 小，所以 $0 < \sin t < \cos t$ ，乘以 -1 後 $-\sin t > -\cos t$ ，即 $\sin \pi^2 > \cos \pi^2$ 。
(5) 的 π^2 是弧度，約 9.87 徑，落在第三象限，正弦、餘弦都是負的；比的是兩個負數，絕對值小的比較大。實際值 $\sin \pi^2 \approx -0.430$ 、 $\cos \pi^2 \approx -0.903$ 。



7 答案 (1)(3)(5)。疊合： $f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 。(1) 對： $x = \frac{7\pi}{6}$ 時 $x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$ ， $f = -2$ 是最低點，通過最高點或最低點的鉛直線是對稱軸。(2) 錯： $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2$ ， $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$ ，兩者不相等。(3) 對： $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，而 $\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3}$ ，這個範圍內只有 $\frac{\pi}{3}$ 、 $\frac{2\pi}{3}$ ($\frac{7\pi}{3}$ 不含)，得 $x = 0$ 、 $\frac{\pi}{3}$ 兩個。(4) 錯： $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{6}$ 。設銳角 α 滿足 $\sin\alpha = \frac{1}{6}$ ；因為 $\frac{1}{6} < \frac{1}{2}$ ，所以 $\alpha < \frac{\pi}{6}$ 。在 $\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3}$ 內的解是 $x + \frac{\pi}{3} = \pi - \alpha$ 與 $2\pi + \alpha$ (α 本身小於 $\frac{\pi}{3}$ ，不在範圍內)，兩個 x 的和 $= (\pi - \alpha) + (2\pi + \alpha) - \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$ ，超過 2π 。(5) 對：由二倍角公式 $4\cos^2\frac{x}{2} = 2(1 + \cos x) = 2\cos x + 2$ ；而 $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 。把 $y = 2\cos x + 2$ 的圖形向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 、再向下平移 2 就是 $y = f(x)$ 。

(3)(4) 都要先把 x 的範圍換成整個角 $x + \frac{\pi}{3}$ 的範圍，再在那個範圍裡找角。(5) 兩個圖形的振幅都是 2、週期都是 2π ，才有可能只靠平移重合。

8 答案 (1)(3)(4)(5)。(1) 對：週期 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 。(2) 錯：週期 $2\pi \div \frac{1}{2} = 4\pi$ 。(3) 對：正切函數的週期是 π 。(4) 對：疊合 $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ ，週期 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 。(5) 對： $y = \sin x$ 的圖形把 x 軸下方的部分翻到上方後，每隔 π 重複一次。

(5) 也可以用式子看： $|\sin(x + \pi)| = |-\sin x| = |\sin x|$ 。

9 答案 (1)(2)(3)(5)。方程式兩邊乘以 5： $25x^2 - 35x + 12 = 0$ ， $(5x - 3)(5x - 4) = 0$ ， $x = \frac{3}{5}$ 或 $\frac{4}{5}$ 。 $45^\circ < \theta < 90^\circ$ 時 $\sin\theta > \cos\theta$ ，所以 $\sin\theta = \frac{4}{5}$ 、 $\cos\theta = \frac{3}{5}$ ，(1) 對。(2) 對： $\sin 2\theta = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$ 。(3) 對： $\cos(\theta + 60^\circ) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} - \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$ 。(4) 錯： $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2} = \frac{4}{5}$ ， $\frac{\theta}{2}$ 是銳角， $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。(5) 對： $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$ 。 $\sin 3\theta = \sin 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta = \frac{24}{125} - \frac{28}{125} = -\frac{4}{125}$ ； $\cos 3\theta = \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta = -\frac{21}{125} - \frac{96}{125} = -\frac{117}{125}$ 。相加得 $-\frac{73}{125}$ 。

(4) 的 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 是 $\sin\frac{\theta}{2}$ 的值 ($\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{2} = \frac{1}{5}$)。(5) 把 3θ 拆成 $2\theta + \theta$ 用和角公式就可以算，不必另外背公式。

填充題 原卷第 10 題 (本頁第 10~12 題)：通分、半角、疊合

10 通分：原式 $= \frac{\sin 36^\circ \cos 12^\circ - \cos 36^\circ \sin 12^\circ}{\sin 12^\circ \cos 12^\circ}$ 。分子是正弦的差角公式，等於 $\sin(36^\circ - 12^\circ) = \sin 24^\circ$ ；分母由二倍角公式 $\sin 12^\circ \cos 12^\circ = \frac{1}{2} \sin 24^\circ$ 。所以原式 $= \frac{\sin 24^\circ}{\frac{1}{2} \sin 24^\circ} = 2$ 。

11 $\frac{\pi}{8}$ 是 $\frac{\pi}{4}$ 的一半。由半角公式 $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ 。 $\frac{\pi}{8}$ 是銳角，餘弦為正，所以 $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ 。

三個格子依序填 2、2、2。數值約 0.924，比 $\cos\frac{\pi}{4} \approx 0.707$ 大，合理。



- 12 通分：原式 = $\frac{\sqrt{3}\cos 80^\circ - \sin 80^\circ}{\sin 80^\circ \cos 80^\circ}$ 。分子 = $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 80^\circ - \frac{1}{2}\sin 80^\circ\right) = 2(\sin 60^\circ \cos 80^\circ - \cos 60^\circ \sin 80^\circ) = 2\sin(60^\circ - 80^\circ) = -2\sin 20^\circ$ 。分母 = $\frac{1}{2}\sin 160^\circ = \frac{1}{2}\sin 20^\circ$ 。所以原式 = $\frac{-2\sin 20^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ} = -4$ 。
- $\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$ ，分子分母才能約掉。分子是 $60^\circ - 80^\circ$ ，是負角，答案帶負號。

兩個分式相加減、分母是同一個角的正弦與餘弦時，先通分：分母變成二倍角的一半，分子用和差角公式或疊合成單一正弦。

填充題 原卷第 11~14 題（本頁第 13~16 題）：月形面積、二倍角、疊合的最大值、數實根

- 13 半圓的半徑 $\overline{OQ} = \sqrt{3}$ ，面積 = $\frac{1}{2}\pi(\sqrt{3})^2 = \frac{3\pi}{2}$ 。 $\overline{PQ} = \overline{PT}$ ， O 是 $\overline{QT}$ 中點，所以 $\overline{PO} \perp \overline{QT}$ 。直角三角形 POQ 中 $\overline{PQ} = 2$ 、 $\overline{OQ} = \sqrt{3}$ ，得 $\overline{PO} = 1$ ， $\sin \angle OPQ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\angle OPQ = \frac{\pi}{3}$ ，所以 $\angle QPT = \frac{2\pi}{3}$ 。以 P 為圓心的扇形 $PQST$ 面積 = $\frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ ； $\triangle PQT$ 面積 = $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$ 。弦 $\overline{QT}$ 與弧 QST 之間的弓形面積 = $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$ 。月形 = 半圓 - 弓形 = $\frac{3\pi}{2} - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \approx 0.524 + 1.732 = 2.256$ ，四捨五入得 $a = 2$ 。

流傳版本題幹印作「 $\overline{OT} = 2\sqrt{3}$ 」，但這樣 $\overline{PT} = 2$ 會比 $\overline{OT}$ 短，直角三角形 POT 的斜邊比一股短，不可能；依附圖比例與參考答案應為 $\overline{QT} = 2\sqrt{3}$ ，本頁題幹已照此寫。扇形面積公式 $\frac{1}{2}r^2\theta$ 的 θ 要用弧度。

- 14 兩邊平方： $\sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$ ，即 $1 - \sin 2\theta = \frac{1}{9}$ ，所以 $\sin 2\theta = \frac{8}{9}$ 。

- 15 $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ 。疊合： $f(x) = -12\sin x + 5\cos x = 13\left(-\frac{12}{13}\sin x + \frac{5}{13}\cos x\right) = 13\sin(x + \beta)$ ，其中 $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ 、 $\sin \beta = \frac{5}{13}$ 。最大值 $M = 13$ ，發生在 $\theta + \beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (k 為整數) 時，此時 $\sin \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos \beta = -\frac{12}{13}$ 。所以 $M + \sin \theta = 13 - \frac{12}{13} = \frac{157}{13}$ 。

驗算：同樣可得 $\cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin \beta = \frac{5}{13}$ ，代回 $f(\theta) = 5 \times \frac{5}{13} - 12 \times \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{169}{13} = 13$ 。 $\sin \theta$ 是負的：要讓 $-12\sin x$ 這一項變大， $\sin x$ 必須取負值。

- 16 改寫成 $\sin x = \frac{x}{5}$ ，數 $y = \sin x$ 與直線 $y = \frac{x}{5}$ 的交點。正弦值介於 -1 與 1 之間，只需看 $-5 \leq x \leq 5$ 。 $x = 0$ 是一個解。 $x > 0$ 時：在 $0 < x < \pi$ 這個山峰，正弦圖形是向上凸的弧，直線 $y = \frac{x}{5}$ 從原點出發時在弧的下方（例如 $x = 1$ 時 $\sin 1 \approx 0.84 > 0.2$ ），到 $x = \pi$ 時直線高度 $\frac{\pi}{5} > 0 = \sin \pi$ 已經在上方，中間恰好穿出 1 次； $\pi \leq x \leq 5$ 時 $\sin x \leq 0$ 而直線為正，沒有交點；下一個山峰從 $2\pi \approx 6.28$ 才開始，已超過 5。所以正的解有 1 個。兩邊都是奇函數，負的解也有 1 個。合計 $1 + 1 + 1 = 3$ 個。

「山峰內恰好 1 個正的交點」可以用數值確認： $x = 2$ 時 $\sin 2 \approx 0.909 > 0.4$ ， $x = 3$ 時 $\sin 3 \approx 0.141 < 0.6$ ，交點在 2 與 3 之間（約 2.596）。別忘了把 $x = 0$ 算進去。



填充題 原卷第 15~18 題 (本頁第 17~20 題)：平移重合、範圍內的極值、正切二倍角、和角配餘弦定理

- 17 兩個圖形重合，表示對所有 x 都有 $\sin(x-h) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 。正弦函數的週期是 2π ，所以兩個角只能相差 2π 的整數倍： $-h = \frac{\pi}{4} - 2k\pi$ ，即 $h = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (k 為整數)。 $0 \leq h < 8\pi$ 時 $k = 1, 2, 3, 4$ ， $h = \frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \frac{23\pi}{4}, \frac{31\pi}{4}$ ，共 4 個。

題幹照流傳版本所印。 $y = \sin(x-h)$ 本身就是 $y = \sin x$ 向右平移 h 的圖形，本題依參考答案的 4 個，解讀為「 $y = \sin x$ 的圖形向右平移 h 後 (即 $y = \sin(x-h)$) 與 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的圖形重合」。 $k = 0$ 時 $h = -\frac{\pi}{4}$ 是負的， $k = 5$ 時 $h = \frac{39\pi}{4}$ 超過 8π ，都不合。

- 18 把 $\sin^2 x$ 換成 $1 - \cos^2 x$ ： $f(x) = -\cos^2 x - 2\cos x + 2$ 。令 $t = \cos x$ ， $f = -t^2 - 2t + 2 = -(t+1)^2 + 3$ 。 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$ 時，餘弦從 $\frac{1}{2}$ 降到 $x = \pi$ 的 -1 ，再回升到 $\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，所以 $-1 \leq t \leq \frac{1}{2}$ 。拋物線開口向下、頂點在 $t = -1$ ，正好在範圍的左端： $t = -1$ 時最大值 $a = 3$ ； $t = \frac{1}{2}$ 時最小值 $b = -\frac{9}{4} + 3 = \frac{3}{4}$ 。 $a + 4b = 3 + 3 = 6$ 。

t 的範圍要看整段 x ：範圍內包含 $x = \pi$ ，所以 t 的最小值是 -1 ，不是端點 $\frac{7\pi}{6}$ 的 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

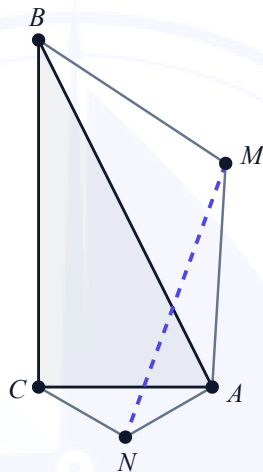
- 19 θ 是銳角， $\cos \theta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ ， $\tan \theta = \frac{3}{4}$ 。由正切的二倍角公式 $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{3}{2} \times \frac{16}{7} = \frac{24}{7}$ 。
也可以用 $\sin 2\theta = \frac{24}{25}$ 、 $\cos 2\theta = \frac{7}{25}$ 相除，結果相同。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



20 $1^2 + 2^2 = (\sqrt{5})^2$ ，直角在 C ，所以 $\cos A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 、 $\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (A 指 $\angle BAC$)。頂角 120° 的等腰三角形，兩個底角都是 30° ，腰長 $= \frac{\text{底邊的一半}}{\cos 30^\circ} = \frac{\text{底邊}}{\sqrt{3}}$ ，所以 $\overline{AM} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ 、 $\overline{AN} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 。兩個等腰三角形都作在外側， $\angle MAN = \angle MAB + \angle BAC + \angle CAN = 30^\circ + A + 30^\circ = A + 60^\circ$ 。由和角公式 $\cos(A + 60^\circ) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ 。在 $\triangle AMN$ 用餘弦定理： $\overline{MN}^2 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} - 2 \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1 - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = 2 - \frac{1 - 2\sqrt{3}}{3} = \frac{5 + 2\sqrt{3}}{3}$ 。



$A \approx 63.4^\circ$ ， $\angle MAN \approx 123.4^\circ$ ，小於 180° ，三個角可以直接相加。四個格子依序填 5、2、3、3。也可以用坐標驗算：取 $C(0,0)$ 、 $A(1,0)$ 、 $B(0,2)$ ，則 $N\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ 、 $M\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ ， $\overline{MN}^2 = \frac{1}{3} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{5 + 2\sqrt{3}}{3}$ 。

把 x 的範圍換成「整個角」或「 $\cos x$ 」的範圍之後再找極值與解；範圍中間如果經過最高點或最低點，極值就不在端點。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自蘭陽女中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/lygsh-114a-g11a-1