

麗山高中 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數（弧度量、三角函數的圖形、和差角與倍角半角公式、正餘弦的疊合） · 多選題 3 題（21 分）、填充題 7 題 10 格（60 分，每格 6 分）、混合題 2 題組 4 小題（19 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/lssh-114a-g11a-1

第壹部分：選擇（填）題（占 81 分） | 一、多選題（占 21 分）說明：第 1 題至第 3 題，每題 7 分。（7-5-2-0）

1 下列敘述何者正確？

- (1) $\sin(90 - \theta) = \cos \theta$
- (2) $(\cos \pi, \sin 10)$ 在第二象限
- (3) 20（徑）的最小正同界角為 $20 - 4\pi$ （徑）
- (4) $\sin(\pi^2) < 0$
- (5) 若一扇形的周長等於其所在圓的圓周長，則此扇形的圓心角為 $2\pi - 2$ （徑）

2 下列敘述何者正確？

- (1) 將函數 $y = \cos 2x$ 的圖形向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位，可得函數 $y = \sin 2x$ 的圖形
- (2) 將函數 $y = \cos x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位，再水平伸縮 $\frac{1}{2}$ 倍，可得函數 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ 的圖形
- (3) 函數 $y = |\tan x|$ 的週期是 $\frac{\pi}{2}$
- (4) 若 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$ ，則 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$
- (5) 方程式 $\cos x = \frac{x}{2}$ 只有 1 個實數解

3 關於函數 $f(x) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) - 3$ 的圖形，下列敘述何者正確？

- (1) $f(x)$ 之最大值為 2，最小值為 -2
- (2) $f\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) = f(x)$ 恆成立
- (3) 與 y 軸的交點為 $(0, \sqrt{3} - 3)$
- (4) 對稱於鉛直線 $x = -\frac{4\pi}{9}$
- (5) 可由 $y = 4\cos^2\left(\frac{3x}{2}\right)$ 的圖形經過適當（左右、上下）平移得到

二、填充題（占 60 分）說明：第 4 題至第 10 題，每格 6 分。

4 設 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ， $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ ，且 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ， $\tan \beta = -\frac{1}{2}$ ，則 $\alpha + \beta =$ _____ 徑。



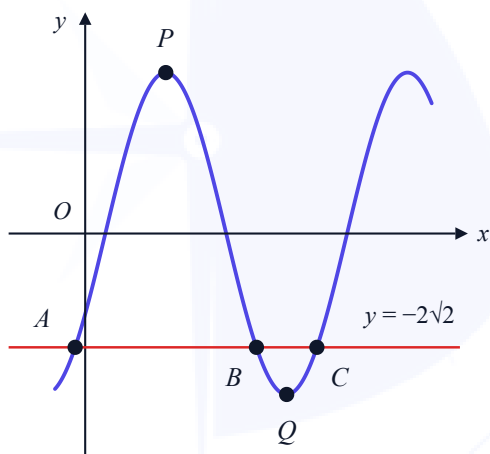
勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/lssh-114a-g11a-1

- 5 設 $a < 0$ ，且兩直線 $L_1: ax - 3y + 12 = 0$ 與 $L_2: 2x - y - 1 = 0$ 的銳夾角為 45° ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 6 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B = 2\angle A$ ，且 $\sin A = \frac{1}{3}$ ，求 (1) $\tan B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(2) $\cos C = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 7 已知 $a > 0, \omega > 0$ ，函數 $f(x) = a \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的部分圖形通過最高點 $P(2, 4)$ 及最低點 $Q(5, -4)$ ，且與直線 $y = -2\sqrt{2}$ 交於 A, B, C 三點，如圖。求：(1) 數對 $(a, \omega) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(2) C 點的 x 坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

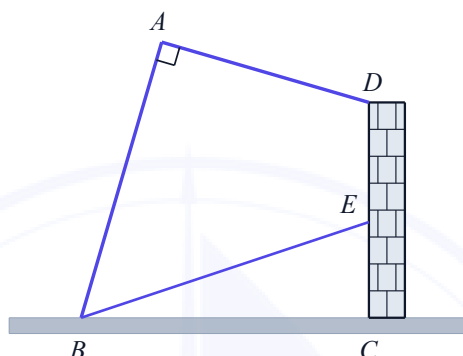


御藍教育

ROYAL BLUE • EDUCATION

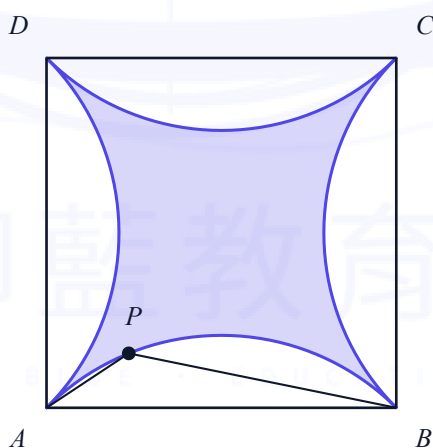


- 8 某露營區有一特殊帳篷，利用垂直地面的石板牆搭設，石板牆高 $\overline{CD} = 3$ 公尺， B 點距離石板牆為 4 公尺，帳篷骨架尺寸為 $\overline{AB} = 4$ 公尺， $\overline{AD} = 3$ 公尺，且 $\angle A = 90^\circ$ ，如圖所示，求：(1) 若在 A 處掛一盞露營燈，則 A 點距離地面的高度為 ____ 公尺。(2) 若要架設一燈條 $\overline{BE}$ ， E 點固定於石板牆 $\overline{CD}$ 上，且 $\angle EBC = \frac{1}{4}\angle ABC$ ，則燈條 $\overline{BE}$ 長度為 ____ 公尺。



- 9 在 $0 \leq x \leq 4\pi$ 範圍內，求方程式 $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}$ 的實數解個數為 ____ 個。

- 10 如圖，邊長為 10 公分的正方形 $ABCD$ ，向內作四個等弧， P 為弧上一點，若 $\angle APB = \frac{3\pi}{4}$ ，則塗色部分面積為 ____ 平方公分。



第貳部分：混合題（占 19 分）說明：本部分共有 2 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切



勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

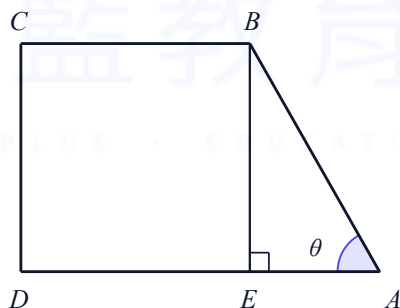
第 11–12 題為題組 設函數 $y = 2\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 4\sin x$ ，在 $0 \leq x \leq \pi$ 的範圍內，試求

- 11 若 y 可表示成 $y = r \cos(x - \alpha)$ ，其中 $r > 0$ ， $0 < \alpha < 2\pi$ ，則數對 $(r, \alpha) = ?$ （非選擇題，4 分）

- 12 不等式 $2\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 4\sin x < 1$ 之解為何？（非選擇題，5 分）

第 13–14 題為題組 直角三角形 ABE 中， $\angle BEA = 90^\circ$ ，現以 $\overline{BE}$ 為邊做一正方形 $BCDE$ ，形成四邊形 $ABCD$ ，如圖

- 13 若 $\overline{AB} = 4$ ， $\angle BAE = \theta$ ，則四邊形 $ABCD$ 面積的最大值為何？（非選擇題，7 分）



14 承 13 題，當四邊形 $ABCD$ 面積的最大時，此時 $\sin 2\theta = ?$ (非選擇題，3 分)



御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/lssh-114a-g11a-1

答案一覽

第 1 題 (4)(5)

第 2 題 (1)(2)(5)

第 3 題 (2)(4)(5)

第 4 題 $\frac{11\pi}{4}$

第 5 題 -9

第 6 題 (1) $\frac{4\sqrt{2}}{7}$; (2) $-\frac{10\sqrt{2}}{27}$

第 7 題 (1) $(4, \frac{\pi}{3})$; (2) $\frac{23}{4}$

第 8 題 (1) $\frac{96}{25}$; (2) $\frac{4\sqrt{10}}{3}$

第 9 題 2

第 10 題 $200 - 50\pi$

第 11 題 $(2, \frac{11\pi}{6})$

第 12 題 $\frac{\pi}{6} < x \leq \pi$

第 13 題 $8 + 4\sqrt{5}$

第 14 題 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。（不用註冊）
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit（可以先把姓名、座號遮掉）



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/lssh-114a-g11a-1

多選題 (第 1~3 題)：弧度的判讀、圖形的平移伸縮、餘弦型函數的性質

- 1 答案 (4)(5)。(1) 錯：角度沒有寫度的記號，90 是 90 徑；餘角關係要寫成 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$ 才成立。取 $\theta = 0$ ： $\sin 90 \approx 0.894$ ，不是 $\cos 0 = 1$ 。(2) 錯： $\cos \pi = -1$ ； $3\pi \approx 9.42 < 10 < \frac{7\pi}{2} \approx 11.0$ ，10 徑在第三象限， $\sin 10 < 0$ ，點的兩個坐標都是負的，在第三象限。(3) 錯： $6\pi \approx 18.85 < 20 < 8\pi \approx 25.13$ ，所以最小正同界角是 $20 - 6\pi \approx 1.15$ ； $20 - 4\pi \approx 7.43$ 比 2π 大。(4) 對： $3 < \pi < 3.5$ ，各乘 π 得 $3\pi < \pi^2 < \frac{7\pi}{2}$ ， π^2 徑在第三象限，正弦為負。(5) 對：設半徑 r 、圓心角 θ ，周長 $2r + r\theta = 2\pi r$ ，得 $\theta = 2\pi - 2$ 。
- 估弧度角的象限時，拿它和 $\frac{\pi}{2}$ 的整數倍比大小；扇形的周長要加兩條半徑。

- 2 答案 (1)(2)(5)。(1) 對：向右平移 $\frac{\pi}{4}$ ，把 x 換成 $x - \frac{\pi}{4}$ ，得 $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2x$ 。(2) 對：向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 得 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ；再水平伸縮 $\frac{1}{2}$ 倍，把 x 換成 $2x$ ，得 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ 。(3) 錯： $y = \tan x$ 的週期是 π ，取絕對值只是把 x 軸下方的部分翻上來，每一段的形狀仍然每隔 π 才重複，週期是 π 。例如 $\left|\tan \frac{\pi}{4}\right| = 1$ ，而 $\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right| = 1$ ，但 $\left|\tan \frac{\pi}{6}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 、 $\left|\tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)\right| = \sqrt{3}$ 不相等。(4) 錯：這段範圍包含 $x = \pi$ ， $\cos \pi = -1$ ，所以 $-1 \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$ 。(5) 對：看 $y = \cos x$ 與直線 $y = \frac{x}{2}$ 的交點。 $|x| > 2$ 時 $\left|\frac{x}{2}\right| > 1$ ，沒有交點。 $0 \leq x \leq 2$ 時， $\cos x$ 由 1 遞減到 $\cos 2 < 0$ ， $\frac{x}{2}$ 由 0 遞增到 1，恰交 1 點。 $-2 \leq x < 0$ 時 $\frac{x}{2} < 0$ ，要相交必須 $\cos x < 0$ ，即 $-2 \leq x < -\frac{\pi}{2}$ ；這時 $\frac{x}{2} < -\frac{\pi}{4} \approx -0.785$ ，而 $\cos x \geq \cos 2 \approx -0.416$ ，不會相等。所以只有 1 個實數解。
- (2) 是先平移再伸縮，伸縮只把 x 換成 $2x$ ，括號裡的 $\frac{\pi}{2}$ 不必再乘 2。(4) 求值域要看整段範圍裡有沒有經過最高點或最低點，不能只代兩個端點。

- 3 答案 (2)(4)(5)。(1) 錯： $-1 \leq \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$ ，所以最大值 $2 - 3 = -1$ ，最小值 $-2 - 3 = -5$ 。(2) 對：週期是 $\frac{2\pi}{3}$ 。(3) 錯： $f(0) = 2\cos \frac{\pi}{3} - 3 = 1 - 3 = -2$ ，交點是 $(0, -2)$ 。(4) 對：餘弦型函數的圖形對稱於通過最高點或最低點的鉛直線； $f\left(-\frac{4\pi}{9}\right) = 2\cos\left(-\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - 3 = 2\cos(-\pi) - 3 = -5$ ，是最小值。(5) 對：由二倍角公式 $4\cos^2 \frac{3x}{2} = 2(1 + \cos 3x) = 2\cos 3x + 2$ ；而 $f(x) = 2\cos 3\left(x + \frac{\pi}{9}\right) - 3$ ，把 $y = 2\cos 3x + 2$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{9}$ 、再向下平移 5 單位就得到。
- (1) 的 2 與 -2 是沒有算上「-3」的結果；(3) 的 $\sqrt{3}$ 是把 $\cos \frac{\pi}{3}$ 算成 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。(5) 只有平移、沒有伸縮，所以兩個函數的振幅（都是 2）與週期（都是 $\frac{2\pi}{3}$ ）要先相同。

填充題 (第 4~6 題)：正切的和差角公式、兩直線夾角、二倍角

- 4 α 在第二象限， $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ，所以 $\cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ ， $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$ 。 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{-\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = -1$ 。把兩個範圍相加： $2\pi < \alpha + \beta < 3\pi$ 。這個範圍內正切值為 -1 的角只有 $2\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$ ，所以 $\alpha + \beta = \frac{11\pi}{4}$ 。
- 只知道 $\tan(\alpha + \beta) = -1$ 還不夠， $\frac{3\pi}{4}$ 、 $\frac{7\pi}{4}$ 、 $\frac{11\pi}{4}$ 的正切都是 -1，要用角的範圍決定是哪一個。



- 5 L_1 的斜率 $m_1 = \frac{a}{3}$, L_2 的斜率 $m_2 = 2$ 。設兩直線的斜角為 θ_1 、 θ_2 , 則 $\tan \theta_1 = m_1$ 、 $\tan \theta_2 = 2$ 。兩直線的夾角是 45° 與 135° , 所以 $\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{m_1 - 2}{1 + 2m_1} = \pm 1$ 。取 $1: m_1 - 2 = 1 + 2m_1$, $m_1 = -3$, $a = -9$ 。取 $-1: m_1 - 2 = -1 - 2m_1$, $m_1 = \frac{1}{3}$, $a = 1$, 與 $a < 0$ 不合。所以 $a = -9$ 。
- 驗算: $m_1 = -3$ 時 $\frac{-3 - 2}{1 + 2 \times (-3)} = \frac{-5}{-5} = 1$ 。兩種正負號都要解, 再用 $a < 0$ 篩選。

- 6 $\angle B = 2\angle A < 180^\circ$, 所以 A 是銳角: $\cos A = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan A = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 。(1) $\tan B = \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{8}{7} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$ 。(2) $\sin B = 2 \sin A \cos A = \frac{4\sqrt{2}}{9}$, $\cos B = 1 - 2 \sin^2 A = \frac{7}{9}$ 。 $C = 180^\circ - (A + B)$, 所以 $\cos C = -\cos(A + B) = -(\cos A \cos B - \sin A \sin B) = -\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{7}{9} - \frac{1}{3} \times \frac{4\sqrt{2}}{9}\right) = -\frac{14\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{27} = -\frac{10\sqrt{2}}{27}$ 。
- 流傳版本題幹印作 $\tan A = \frac{1}{3}$, 但照這個條件算出的是 $\tan B = \frac{3}{4}$ 、 $\cos C = -\frac{9\sqrt{10}}{50}$, 與流傳版本的參考答案 $\frac{4\sqrt{2}}{7}$ 、 $-\frac{10\sqrt{2}}{27}$ 對不上; 兩格參考答案都與 $\sin A = \frac{1}{3}$ 完全吻合, 依答案應為 $\sin A = \frac{1}{3}$, 本頁題幹已照此修正。
 $\cos C < 0$ 表示 C 是鈍角 ($A \approx 19.5^\circ$, $B \approx 38.9^\circ$, $C \approx 121.6^\circ$)。

填充題 (第 7~8 題): 由圖形決定函數、二倍角與半角的應用

- 7 (1) 最大值是 4 且 $a > 0$, 所以 $a = 4$ 。由圖, P 、 Q 是相鄰的最高點與最低點, 相距半個週期: $\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega} = 5 - 2 = 3$, $\omega = \frac{\pi}{3}$ 。檢查: $f(2) = 4 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 4 \sin \frac{\pi}{2} = 4$, $f(5) = 4 \sin \frac{3\pi}{2} = -4$, 符合。 $(a, \omega) = \left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ 。(2) 解 $4 \sin\left(\frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = -2\sqrt{2}$, 即 $\sin\left(\frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。 Q 對應的角是 $\frac{3\pi}{2}$, C 是 Q 右邊第一個交點, 對應的角是 $\frac{7\pi}{4}$: $\frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{23\pi}{12}$, $x = \frac{23}{4}$ 。
- 流傳版本題幹印作 $f(x) = a \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$; 照這個式子, 取 $\omega = \frac{\pi}{3}$ 時 $f(2) = 4 \sin \frac{5\pi}{6} = 2$, P 不是最高點, 而且沒有任何 ω 能讓 P 、 Q 同時是最高點與最低點。依流傳版本的參考答案 $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ 、 $\frac{23}{4}$ 與附圖, 應為 $a \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$, 本頁題幹已照此修正。另外兩個交點: A 對應的角是 $-\frac{\pi}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$; B 對應 $\frac{5\pi}{4}$, $x = \frac{17}{4}$, B 、 C 對稱於直線 $x = 5$ 。
- 8 連 $\overline{BD}$ 。直角三角形 BCD 的兩股是 $\overline{BC} = 4$ 、 $\overline{CD} = 3$, 直角三角形 BAD 的兩股是 $\overline{AB} = 4$ 、 $\overline{AD} = 3$, 兩個三角形全等, $\overline{BD} = 5$ 。設 $\angle DBC = \varphi$, 則 $\angle ABD = \varphi$, $\sin \varphi = \frac{3}{5}$, $\cos \varphi = \frac{4}{5}$, $\angle ABC = 2\varphi$ 。(1) A 離地面的高度 $= \overline{AB} \sin 2\varphi = 4 \times 2 \sin \varphi \cos \varphi = 4 \times \frac{24}{25} = \frac{96}{25}$ 公尺。(2) $\angle EBC = \frac{1}{4} \times 2\varphi = \frac{\varphi}{2}$ 。由半角公式 $\cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos \varphi}{2} = \frac{9}{10}$, $\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ 。直角三角形 EBC 中 $\overline{BE} = \frac{\overline{BC}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$ 公尺。
- $\angle ABC$ 的四分之一剛好是 $\angle DBC$ 的一半, 所以第 (1) 小題用二倍角、第 (2) 小題用半角。檢查: $\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3}$, $\overline{CE} = \frac{4}{3} < 3$, E 確實在牆 $\overline{CD}$ 上。



填充題 (第 9~10 題) : 換元後數解的個數、弓形面積

- 9 令 $t = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$ ，平方得 $t^2 = 1 + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 1 + \sin x$ ，所以 $\sin x = t^2 - 1$ 。方程式變成 $t = t^2 - 1 - \frac{1}{2}$ ，即 $2t^2 - 2t - 3 = 0$ ， $t = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$ 。疊合： $t = \sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ ，所以 $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ 。
 $\frac{1 + \sqrt{7}}{2} \approx 1.82 > \sqrt{2}$ 不合； $\frac{1 - \sqrt{7}}{2} \approx -0.82$ 可以。於是 $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \approx -0.58$ 。 $0 \leq x \leq 4\pi$ 時， $\frac{\pi}{4} \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4}$ ，剛好是一個完整的週期；正弦值等於一個介於 -1 與 0 之間的數，在一個週期內有 2 個角 (第三、第四象限各一個)。所以有 2 個實數解。

兩個 t 值要先用 $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ 篩掉一個；範圍 $0 \leq x \leq 4\pi$ 對半角 $\frac{x}{2}$ 來說只是一個週期。

- 10 先看 $\overline{AB}$ 邊上那段弧所在的圓。圓周角 $\angle APB = \frac{3\pi}{4}$ ，它所對的弧 (不含 P 的那一段) 的圓心角是 $2 \times \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ ，所以含 P 的弧 AB 的圓心角是 $2\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ 。設半徑 r ，兩條半徑與弦 $\overline{AB}$ 圍成等腰直角三角形， $r = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$ 。弦 $\overline{AB}$ 與弧圍成的弓形面積 = 扇形 - 三角形 = $\frac{1}{2}r^2 \times \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}r^2 = \frac{25\pi}{2} - 25$ 。四個弓形一樣大，塗色部分 = $100 - 4\left(\frac{25\pi}{2} - 25\right) = 200 - 50\pi$ 平方公分。

$200 - 50\pi \approx 42.9$ 。圓周角 $\frac{3\pi}{4}$ 是鈍角，對的是大弧； P 所在的那段弧才是小弧，圓心角只有 $\frac{\pi}{2}$ 。

混合題 (第 11~14 題) : 疊合成餘弦、三角不等式、面積的最大值

- 11 用和角公式展開： $2\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = 3\sin x + \sqrt{3}\cos x$ ，所以 $y = \sqrt{3}\cos x - \sin x$ 。疊合： $y = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = 2\left(\cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 。
 要寫成 $r\cos(x - \alpha)$ 且 $0 < \alpha < 2\pi$ ： $-\alpha$ 與 $\frac{\pi}{6}$ 是同界角，取 $\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ 。 $(r, \alpha) = \left(2, \frac{11\pi}{6}\right)$ 。

題目要的是 $x - \alpha$ 的形式，而且 α 要是正的，所以不能寫 $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ ，也不是 $\frac{\pi}{6}$ 。檢查： $\cos \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ ， $2\cos\left(x - \frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$ 。

- 12 由第 11 題，不等式就是 $2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < 1$ ，即 $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$ 。 $0 \leq x \leq \pi$ 時 $\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$ 。餘弦在 $\frac{\pi}{6}$ 到 π 這段遞減， $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ，所以角大於 $\frac{\pi}{3}$ 之後餘弦值就小於 $\frac{1}{2}$ ； π 到 $\frac{7\pi}{6}$ 這段餘弦值是負的，也成立。因此 $\frac{\pi}{3} < x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$ ，各減 $\frac{\pi}{6}$ 得 $\frac{\pi}{6} < x \leq \pi$ 。

左端 $x = \frac{\pi}{6}$ 時 $y = 2\cos \frac{\pi}{3} = 1$ ，不小於 1，不含；右端 $x = \pi$ 時 $y = 2\cos \frac{7\pi}{6} = -\sqrt{3}$ ，要含。



- 13 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 。直角三角形 ABE 中 $\overline{BE} = 4 \sin \theta$, $\overline{AE} = 4 \cos \theta$ 。四邊形 $ABCD$ 由正方形 $BCDE$ 與三角形 ABE 合成，面積 $= \overline{BE}^2 + \frac{1}{2} \overline{AE} \times \overline{BE} = 16 \sin^2 \theta + 8 \sin \theta \cos \theta$ 。用 $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ 與 $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$ 降次：面積 $= 8(1 - \cos 2\theta) + 4 \sin 2\theta = 8 + 4 \sin 2\theta - 8 \cos 2\theta$ 。疊合：
 $4 \sin 2\theta - 8 \cos 2\theta = 4\sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \sin 2\theta - \frac{2}{\sqrt{5}} \cos 2\theta \right) = 4\sqrt{5} \sin(2\theta - \varphi)$ ，其中 $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 、 $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ， φ 是銳角。 $-\varphi < 2\theta - \varphi < \pi - \varphi$ ，這個範圍包含 $\frac{\pi}{2}$ ，所以正弦可以取到 1，面積的最大值是 $8 + 4\sqrt{5}$ 。

$8 + 4\sqrt{5} \approx 16.94$ 。平方項 $\sin^2 \theta$ 要先用倍角公式換成 $\cos 2\theta$ ，才能和 $\sin 2\theta$ 疊合；取最大值前要確認 $\frac{\pi}{2}$ 落在角的範圍內。

- 14 最大值發生在 $2\theta - \varphi = \frac{\pi}{2}$ ，即 $2\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$ 。所以 $\sin 2\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

同時 $\cos 2\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin \varphi = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，代回 $8 + 4 \sin 2\theta - 8 \cos 2\theta = 8 + \frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{16\sqrt{5}}{5} = 8 + 4\sqrt{5}$ ，與第 13 題一致。 2θ 是鈍角， $\theta \approx 58.3^\circ$ 。

看到 $a \sin x + b \cos x$ 先疊合成單一的正弦或餘弦，再把 x 的範圍換成整個角的範圍；有平方項或角不同時，先用倍角、和角公式整理成同一個角。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自麗山高中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE • EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/lssh-114a-g11a-1