

岡山高中 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數（弧度量與扇形、三角函數的圖形、和差角與倍角半角公式、正餘弦的疊合） · 多重選擇題
4 題、填充題 18 題、混合題 1 題組 3 小題，共 25 題（流傳版本未印配分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/kssh-114a-g11a-1

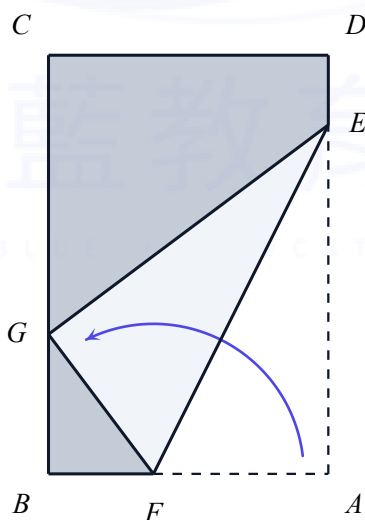
一、多重選擇題

1 下列敘述，何者正確？

- (A) $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
- (B) $\cos 2\theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$
- (C) $\sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}}$
- (D) $\cos 122.5^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 245^\circ}{2}}$
- (E) $\tan 15^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}$

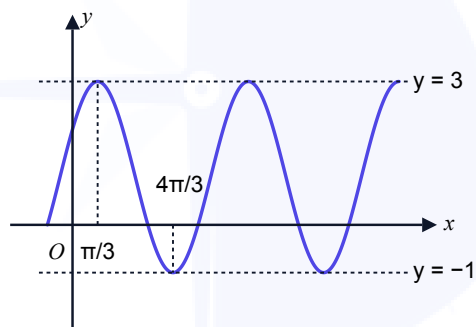
2 如圖，將矩形紙張 $ABCD$ 的右下角沿 $\overline{EF}$ 摺起，恰使得 A 點落在 $\overline{BC}$ 邊的 G 點上，已知 $\overline{AF} = 5$ 、 $\overline{BF} = 3$ ，設 $\angle AEF = \theta$ ，下列何者正確？

- (A) $\angle BFG = 2\theta$
- (B) $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$
- (C) $\cos 2\theta = \frac{4}{5}$
- (D) $\overline{AE} = 10$
- (E) $\overline{AE} = 12$



- 3 小華在摩天輪某車廂到達最低點時進入乘坐，假設此車廂 t 秒後距離地面的高度為 $h = f(t) = 40 \sin\left(\frac{\pi}{600}t + \frac{3\pi}{2}\right) + 80$ 公尺，則下列何者正確？
- (A) 車廂離地面最高為 80 公尺
 (B) 車廂離地面最低為 40 公尺
 (C) $t = 600$ 時此車廂來到摩天輪的最高點
 (D) 摩天輪轉一圈的週期為 1200π 秒
 (E) 直線 $t = 600$ 為此函數圖形的對稱軸

- 4 圖是函數 $y = a \sin x + b \cos x + c$ 圖形的一部分，下列何者正確？
- (A) 此函數的週期為 2π
 (B) 此函數的振幅為 2
 (C) $a = \sqrt{3}$
 (D) $b = \sqrt{3}$
 (E) $c = 2$



二、填充題（卷面題號 1~18，本頁接續編為第 5~22 題）

- 5 $f(x) = 3 \sin x + 4$ ，則 $f(x)$ 的最大值為 ____。

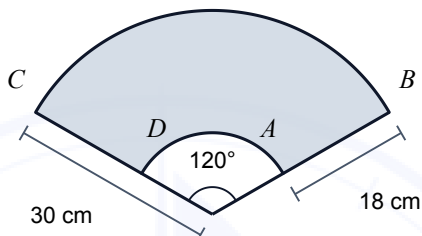
- 6 已知一扇形半徑為 12 公分，圓心角為 60° ，試求此扇形的弧長為 ____。

- 7 試求 $\cos 77^\circ \cos 17^\circ + \sin 77^\circ \sin 17^\circ =$ ____。



- 8 已知 θ 為銳角，且 $\sin \theta = \frac{12}{13}$ ，試求 $\cos 2\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 9 如圖，此摺扇完全打開時，圓心角為 120° ，試求扇面的面積 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

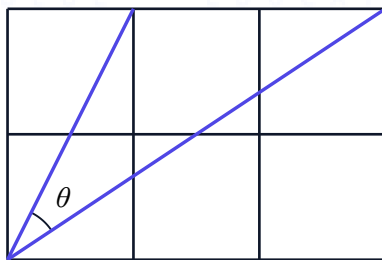


- 10 設 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ， $0^\circ < \beta < 180^\circ$ ，且 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ， $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ ，試求 $\sin(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 11 已知 θ 為第二象限角且 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ，則 $\tan 2\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

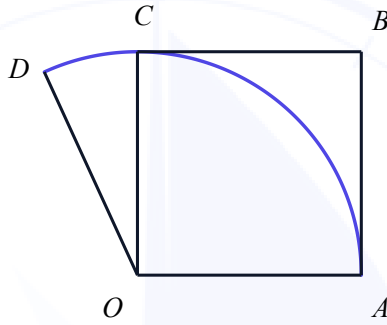
- 12 已知 $0 \leq x \leq \pi$ 且 $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$ ， $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 13 圖中的小方格都是邊長為 1 的正方形，求 $\tan \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 14 方程式 $12 \sin x - x = 0$ 共有 ____ 個實數解。

- 15 以正方形 $OABC$ 的 O 為圓心， $\overline{OA}$ 為半徑，作弧 $\widehat{ACD}$ 。已知正方形 $OABC$ 面積為 64， $\widehat{ACD}$ 弧長為 16，試求扇形 COD 面積 ____。



- 16 試求 $y = 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 2$ 的最大值為 ____。

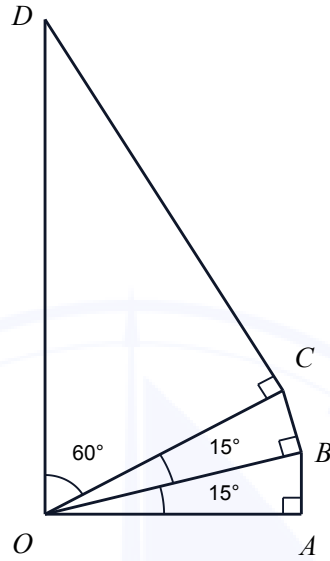
- 17 直線 $L_1: x - 2y = 0$ ，現以原點為中心，將 L_1 逆時針旋轉 45° 後的直線方程式為 ____。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



- 18 如圖，若 $\overline{OD} = 24$ ，試求 $\overline{AB}$ 的長度為 ____。



- 19 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 範圍內，滿足 $\sin x = -\frac{1}{3}$ 的解為 $x = \alpha, \beta$ ，求 $\alpha + \beta =$ ____。

- 20 若 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ ，求 $\sin 2\theta =$ ____。

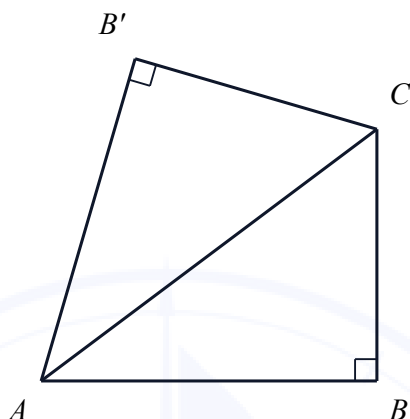
- 21 滿足 $0 < x < 2\pi$ ，求不等式： $\cos x < \cos 2x$ 的解為 ____。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



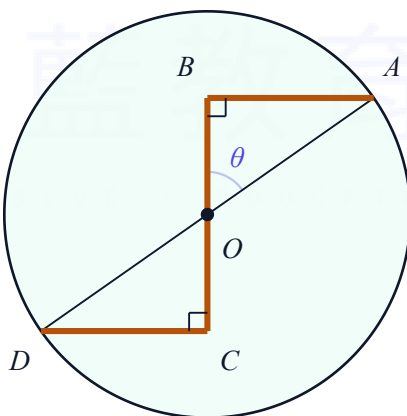
- 22 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 3$ ，若以 $\overline{AC}$ 為軸將 $\triangle ABC$ 翻轉得共平面的 $\triangle AB'C$ ，則 B' 點到 $\overline{AB}$ 的距離為 _____ 公尺。



四、混合題（卷面小題 (1)~(3)，本頁編為第 23~25 題）

23-25 題組 如圖，圓形花園的半徑為 100 公尺，主人打算在花園內建造一個轉兩個直角彎的折線造型步道（如圖的粗線 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ ），其中 O 點為圓心， $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ 且 $\overline{OB} = \overline{OC}$ ，試回答下列問題。

- 23 若 $\angle AOB = \theta$ ，則步道總長 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} =$
- (A) 200
- (B) $50 \sin \theta + 50 \cos \theta$
- (C) $100 \sin \theta + 100 \cos \theta$
- (D) $100 \sin \theta + 100 \cos \theta + 100$
- (E) $200 \sin \theta + 200 \cos \theta$



- 24 步道總長最長為多少公尺？



25 步道總長最長時， $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 的長度分別為多少公尺？

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/kssh-114a-g11a-1

答案一覽

第 1 題 (A)(C)(E)

第 2 題 (A)(B)(D)

第 3 題 (B)(C)(E)

第 4 題 (A)(B)(C)

第 5 題 7

第 6 題 4π (公分)

第 7 題 $\frac{1}{2}$

第 8 題 $-\frac{119}{169}$

第 9 題 252π (平方公分)

第 10 題 $-\frac{63}{65}$

第 11 題 $\frac{24}{7}$

第 12 題 0 或 $\frac{2\pi}{3}$

第 13 題 $\frac{4}{7}$

第 14 題 7

第 15 題 $64 - 16\pi$

第 16 題 1

第 17 題 $3x - y = 0$

第 18 題 3

第 19 題 3π

第 20 題 $-\frac{8}{9}$

第 21 題 $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$

第 22 題 $\frac{96}{25}$

第 23 題 (E)

第 24 題 $200\sqrt{2}$ 公尺

第 25 題 $\overline{AB} = 50\sqrt{2}$ 公尺, $\overline{BC} = 100\sqrt{2}$ 公尺



對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)

多重選擇 1~4：公式的形式、摺紙、摩天輪與由圖形反推係數

- 1 答案 (A)(C)(E)。(A) 對：正弦的倍角公式。(B) 錯： $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ ，選項的正負號相反。(C) 對：半角公式 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ ，取 $\alpha = 45^\circ$ ，而 $\sin 22.5^\circ > 0$ ，開根號取正。(D) 錯： 122.5° 在第二象限， $\cos 122.5^\circ < 0$ ，應為 $-\sqrt{\frac{1 + \cos 245^\circ}{2}}$ 。(E) 對： $\frac{\sin 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ}{2 \cos^2 15^\circ} = \tan 15^\circ$ 。
流傳版本選項 (A) 印作「 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \sin$ 」，末尾多一個 $\sin$ ，依答案應為 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ 。半角公式開根號前要先看角在第幾象限，決定正負。
- 2 答案 (A)(B)(D)。摺起來的 $\triangle GEF$ 與原來的 $\triangle AEF$ 全等，所以 $\overline{FG} = \overline{FA} = 5$ ， $\angle GFE = \angle AFE$ 。直角三角形 AEF 中 $\angle A = 90^\circ$ ， $\angle AFE = 90^\circ - \theta$ ，因此 $\angle AFG = 2(90^\circ - \theta) = 180^\circ - 2\theta$ ， $\angle BFG = 180^\circ - \angle AFG = 2\theta$ ，(A) 對。直角三角形 BFG 中 $\cos 2\theta = \frac{\overline{BF}}{\overline{FG}} = \frac{3}{5}$ ，(B) 對、(C) 錯。由 $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = \frac{3}{5}$ 得 $\cos^2 \theta = \frac{4}{5}$ 、 $\sin^2 \theta = \frac{1}{5}$ ， θ 是銳角， $\tan \theta = \frac{1}{2}$ 。直角三角形 AEF 中 $\tan \theta = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}}$ ， $\overline{AE} = \frac{5}{1/2} = 10$ ，(D) 對、(E) 錯。
檢查： $\overline{BG} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ， $\overline{AB} = 8$ ；以 B 為原點， $G(0, 4)$ 、 $E(8, 10)$ ， $\overline{EG} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 = \overline{EA}$ ，與摺紙相符。
- 3 答案 (B)(C)(E)。正弦值在 -1 與 1 之間，所以 $40 \leq h \leq 120$ ：最高 120 公尺、最低 40 公尺，(A) 錯、(B) 對。(C) $t = 600$ 時角度為 $\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$ ， $\sin \frac{5\pi}{2} = 1$ ， $h = 120$ 是最高點，對。(D) 週期 = $2\pi \div \frac{\pi}{600} = 1200$ 秒，不是 1200π 秒，錯。(E) 正弦型圖形對稱於通過最高點（或最低點）的鉛直線， $t = 600$ 正是最高點的位置，對。
 $t = 0$ 時 $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ ， $h = 40$ ，與「在最低點進入乘坐」相符。
- 4 答案 (A)(B)(C)。由圖，最大值 3、最小值 -1 ： $c = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$ ，振幅 = $\frac{3 - (-1)}{2} = 2$ ，(B) 對、(E) 錯。相鄰的最高點 $x = \frac{\pi}{3}$ 與最低點 $x = \frac{4\pi}{3}$ 相距 π ，是半個週期，週期 2π ，(A) 對。把函數疊合成 $y = 2 \sin(x + \varphi) + 1$ ，最高點在 $x = \frac{\pi}{3}$ ： $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2}$ ， $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 。展開 $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin x \cos \frac{\pi}{6} + 2 \cos x \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ ，所以 $a = \sqrt{3}$ 、 $b = 1$ ，(C) 對、(D) 錯。
 c 是最大值與最小值的平均，不是振幅；振幅才是 2。

正弦型函數先看最大值與最小值：平均是上下平移，差的一半是振幅；最高點與最低點的橫向距離是半個週期。



填充 5~9：最大值、扇形與基本公式

- 5 $-1 \leq \sin x \leq 1$ ，所以 $1 \leq 3 \sin x + 4 \leq 7$ ，最大值為 7 ($\sin x = 1$ 時)。
- 6 $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ 弧度，弧長 = 半徑 $\times$ 圓心角 = $12 \times \frac{\pi}{3} = 4\pi$ (公分)。
弧長公式 $s = r\theta$ 的 θ 要用弧度。
- 7 這是餘弦差角公式 $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ 的右邊，原式 = $\cos(77^\circ - 17^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ 。
- 8 $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 1 - 2 \cdot \frac{144}{169} = -\frac{119}{169}$ 。
用 $1 - 2 \sin^2 \theta$ 這個形式不必先求 $\cos \theta$ 。
- 9 由圖，扇骨全長 30 公分，扇面寬 18 公分，所以扇面內緣的半徑是 $30 - 18 = 12$ 公分。 $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ 弧度。扇面面積 = 大扇形 - 小扇形 = $\frac{1}{2} \cdot 30^2 \cdot \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \frac{2\pi}{3} = 300\pi - 48\pi = 252\pi$ (平方公分)。
18 公分是扇面的寬度，不是小扇形的半徑；小扇形的半徑是 12 公分。

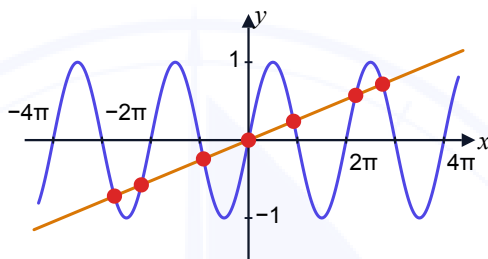
扇形的弧長是 $r\theta$ 、面積是 $\frac{1}{2}r^2\theta$ ， θ 一律用弧度；環狀的扇面用大扇形減小扇形。

填充 10~14：和差角、倍角、疊合與圖形交點

- 10 α 、 β 都在 0° 與 180° 之間，正弦為正： $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ， $\sin \beta = \frac{12}{13}$ 。 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) - \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} = -\frac{15}{65} - \frac{48}{65} = -\frac{63}{65}$ 。
- 11 第二象限角的餘弦為負： $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ ， $\tan \theta = -\frac{4}{3}$ 。 $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{-\frac{8}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = \frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{7}{9}} = \frac{24}{7}$ 。
檢查： $\sin 2\theta = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$ ， $\cos 2\theta = 1 - 2 \cdot \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$ ，相除得 $\frac{24}{7}$ 。
- 12 左邊 = $2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$ ，所以 $\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$ 。 $0 \leq x \leq \pi$ 時 $\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$ ，這個範圍內 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ ，得 $x = 0$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ 。
代回檢查： $x = 0$ 時 $0 + 1 = 1$ ； $x = \frac{2\pi}{3}$ 時 $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = 1$ 。端點 $x = 0$ 也是解，不要漏掉。
- 13 以左下角為頂點，設較陡的線段與底邊的夾角為 α 、較平的線段與底邊的夾角為 β 。較陡的線段向右 1 格、向上 2 格， $\tan \alpha = 2$ ；較平的線段向右 3 格、向上 2 格， $\tan \beta = \frac{2}{3}$ 。 $\theta = \alpha - \beta$ ， $\tan \theta = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{4}{7}$ 。



- 14 方程式即 $\sin x = \frac{x}{12}$ ，看 $y = \sin x$ 與直線 $y = \frac{x}{12}$ 的交點個數。因為 $-1 \leq \sin x \leq 1$ ，交點只會在 $-12 \leq x \leq 12$ ，而 $3\pi \approx 9.42 < 12 < 4\pi \approx 12.57$ 。 $x > 0$ 時正弦圖形在 $0 < x < \pi$ 與 $2\pi < x < 3\pi$ 兩段在 x 軸上方： $0 < x < \pi$ 這段，原點附近正弦圖形比直線陡、在直線上方，到 $x = \pi$ 時 $0 < \frac{\pi}{12}$ 落到直線下方，有 1 個交點； $2\pi < x < 3\pi$ 這段，兩端正弦值為 0、低於直線，頂點 $x = \frac{5\pi}{2}$ 處直線的高度 $\frac{5\pi}{24} \approx 0.65 < 1$ ，正弦圖形高於直線，有 2 個交點； $3\pi < x < 4\pi$ 時正弦值為負，而 $x \geq 4\pi$ 時直線已超過 1，都沒有交點。 $x > 0$ 共 3 個。兩個圖形都對稱於原點， $x < 0$ 也有 3 個，再加上 $x = 0$ ，共 7 個。



原點本身是一個交點，要算一次，也只算一次。

疊合之後先寫出新角的範圍，再在範圍內找角；數實數解的個數就畫兩個圖形數交點。

填充 15~18：扇形面積、降次疊合、直線旋轉與連續直角三角形

- 15 正方形面積 64，邊長 8，所以半徑 $\overline{OA} = 8$ 。扇形 AOD （弧 $\widehat{ACD}$ 所對）的面積 $= \frac{1}{2} \times \text{半徑} \times \text{弧長} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 = 64$ ；扇形 AOC 的圓心角是直角，面積 $= \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 8^2 = 16\pi$ 。扇形 COD 面積 $= 64 - 16\pi$ 。

也可以先求圓心角： $\angle AOD = \frac{16}{8} = 2$ 弧度， $\angle COD = 2 - \frac{\pi}{2}$ ，面積 $= \frac{1}{2} \cdot 8^2 \cdot \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) = 64 - 16\pi$ （約 13.7）。

- 16 用倍角公式 $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ 、 $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$ ： $y = \sqrt{3} \sin 2x + (1 + \cos 2x) - 2 = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x - 1$ 。疊合： $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，所以 $y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$ ，最大值為 $2 - 1 = 1$ 。

x 沒有限制範圍， $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 取得到 1（例如 $x = \frac{\pi}{6}$ ）。

- 17 L_1 的斜率為 $\frac{1}{2}$ ，設 L_1 的斜角為 α ， $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ 。逆時針旋轉 45° 後斜角變成 $\alpha + 45^\circ$ ，新斜率 $= \tan(\alpha + 45^\circ) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$ 。 L_1 通過原點，以原點為中心旋轉後仍通過原點，所以新直線為 $y = 3x$ ，即 $3x - y = 0$ 。

旋轉中心在直線上，旋轉後的直線才一定通過同一點。

- 18 由圖， $\angle AOB = \angle BOC = 15^\circ$ 、 $\angle COD = 60^\circ$ ，直角分別在 A 、 B 、 C 。直角三角形 OCD ： $\overline{OC} = \overline{OD} \cos 60^\circ = 12$ 。直角三角形 OBC ： $\overline{OB} = \overline{OC} \cos 15^\circ = 12 \cos 15^\circ$ 。直角三角形 OAB ： $\overline{AB} = \overline{OB} \sin 15^\circ = 12 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = 6 \sin 30^\circ = 3$ 。

流傳版本題幹印作「若 $\overline{OD} = 24$ 」，依答案應為 $\overline{OD} = 24$ 。最後一步用倍角公式 $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ$ ，不必求出 $\sin 15^\circ$ 的值。



看到 $\sin x \cos x$ 與 $\cos^2 x$ 就用倍角公式降成 $2x$ 的一次式，再疊合。

填充 19~22：方程式的解、平方關係、不等式與翻轉

- 19 $\sin x = -\frac{1}{3} < 0$ ，解在第三、四象限。設銳角 φ 滿足 $\sin \varphi = \frac{1}{3}$ ，則兩解為 $\pi + \varphi$ 與 $2\pi - \varphi$ ， $\alpha + \beta = (\pi + \varphi) + (2\pi - \varphi) = 3\pi$ 。

從圖形看： $y = \sin x$ 在 $\pi \leq x \leq 2\pi$ 這一段對稱於直線 $x = \frac{3\pi}{2}$ ，兩解的平均是 $\frac{3\pi}{2}$ ，和就是 3π 。

- 20 兩邊平方： $\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$ ，即 $1 + \sin 2\theta = \frac{1}{9}$ ， $\sin 2\theta = -\frac{8}{9}$ 。

- 21 用 $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ ，不等式化為 $2 \cos^2 x - \cos x - 1 > 0$ ，即 $(2 \cos x + 1)(\cos x - 1) > 0$ 。 $0 < x < 2\pi$ 時 $\cos x < 1$ ， $\cos x - 1 < 0$ ，所以需要 $2 \cos x + 1 < 0$ ，即 $\cos x < -\frac{1}{2}$ 。在 $0 < x < 2\pi$ 內， $\cos x = -\frac{1}{2}$ 的角是 $\frac{2\pi}{3}$ 與 $\frac{4\pi}{3}$ ，兩者之間餘弦值更小，所以 $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$ 。

檢查： $x = \pi$ 時 $\cos \pi = -1 < \cos 2\pi = 1$ ，成立； $x = \frac{\pi}{2}$ 時 $0 < -1$ 不成立。

- 22 $\overline{AC} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ 。設 $\angle BAC = \varphi$ ， $\sin \varphi = \frac{3}{5}$ 、 $\cos \varphi = \frac{4}{5}$ 。以 $\overline{AC}$ 為軸翻轉後 $\overline{AB'} = \overline{AB} = 4$ ， $\angle B'AC = \varphi$ ，所以 $\angle B'AB = 2\varphi$ 。 B' 到 $\overline{AB}$ 的距離 $= \overline{AB'} \sin 2\varphi = 4 \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi = 4 \cdot 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{96}{25}$ 。

2φ 仍是銳角 ($\cos 2\varphi = \frac{7}{25} > 0$)， B' 到直線 AB 的垂足落在線段 $\overline{AB}$ 上。題幹的邊長沒有寫單位，答案的單位照題末所印的公尺。

翻轉、摺紙都是對稱：長度不變、角度變兩倍，接下來就是倍角公式。

混合題 23~25：把步道總長寫成 θ 的函數再疊合

- 23 答案 (E)。由圖， A 、 D 在圓周上， $\overline{OA} = \overline{OD} = 100$ ； O 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{OB} = \overline{OC}$ 。直角三角形 OAB ($\angle B = 90^\circ$ 、 $\angle AOB = \theta$)： $\overline{AB} = 100 \sin \theta$ ， $\overline{OB} = 100 \cos \theta$ 。所以 $\overline{BC} = 2\overline{OB} = 200 \cos \theta$ 。直角三角形 OCD ($\angle C = 90^\circ$)： $\overline{OC} = 100 \cos \theta$ 、 $\overline{OD} = 100$ ， $\overline{CD} = \sqrt{100^2 - (100 \cos \theta)^2} = 100 \sin \theta$ 。總長 $= 100 \sin \theta + 200 \cos \theta + 100 \sin \theta = 200 \sin \theta + 200 \cos \theta$ 。

流傳版本題幹印作「圖形花園」，依圖應為「圓形花園」；卷面上步道的形狀是用一個小圖示表示，本頁改用文字描述。兩個直角三角形 OAB 、 OCD 全等，所以 $\overline{CD} = \overline{AB}$ 。

- 24 總長 $L = 200(\sin \theta + \cos \theta)$ 。疊合： $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta \right) = \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ)$ ，

所以 $L = 200\sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ)$ 。 θ 是直角三角形的銳角， $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ， $45^\circ < \theta + 45^\circ < 135^\circ$ ，這個範圍包含 90° ，所以 $\sin(\theta + 45^\circ)$ 取得到 1， L 的最大值為 $200\sqrt{2}$ 公尺 (約 282.8 公尺)。

非選題要寫出疊合的式子，並說明 $\theta + 45^\circ$ 的範圍包含 90° ，最大值才取得到。

- 25 最大值發生在 $\theta + 45^\circ = 90^\circ$ ，即 $\theta = 45^\circ$ 。此時 $\overline{AB} = 100 \sin 45^\circ = 50\sqrt{2}$ 公尺， $\overline{BC} = 200 \cos 45^\circ = 100\sqrt{2}$ 公尺。

檢查： $\overline{CD} = \overline{AB} = 50\sqrt{2}$ ，三段相加 $50\sqrt{2} + 100\sqrt{2} + 50\sqrt{2} = 200\sqrt{2}$ ，與上一題相符。



先用一個角把每一段長度寫出來，總長變成 $a \sin\theta + b \cos\theta$ ，再疊合求最大值。



御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自岡山高中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/kssh-114a-g11a-1