

高雄中學 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數（和差角與倍角公式、正餘弦的疊合、三角函數的圖形與極值） · 多選題 2 題（12 分）、填充題 10 題共 14 格（68 分，依答對格數累進計分）、非選擇題 2 題（20 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/kshs-114a-g11a-1

一、多選題（每題 6 分，共 12 分；各選項獨立判定，答錯 1 個選項得 4 分，答錯 2 個選項得 2 分，答錯多於 2 個選項或未作答得 0 分）

1 下列何者正確？

- (A) 對於任意實數 α 、 β ，等式 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha - \cos \beta$ 都成立
- (B) 對於任意實數 α 、 β ，等式 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha - \cos \beta$ 都不成立
- (C) 存在無窮多個實數 α 、 β ，使等式 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha - \cos \beta$ 成立
- (D) 僅有有限多個實數 α 、 β ，使等式 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha - \cos \beta$ 成立
- (E) x 、 y 為實數， $\sin(x + y) \sin(x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y$ 恆成立

2 令 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ， $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ，且 $\tan \alpha = \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta}$ ，下列選項何者正確？

- (A) $\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4} > 0$
- (B) $3\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$
- (C) $3\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
- (D) $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$
- (E) $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

二、填充題（共 14 格，占 68 分，依答對格數累進計分；答案須化至最簡）

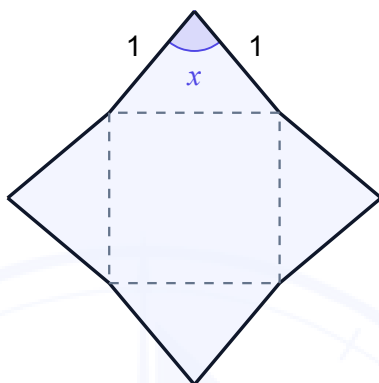
3 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ ，方程式 $\sin |x| - |\sin x| = k$ 恰有四個彼此相異的實數解，求出實數 k 的範圍。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/kshs-114a-g11a-1

- 4 一八邊形是由腰長為 1，頂角為 x (x 為實數) 的四個等腰三角形及它們的四個底邊構成之正方形所組成，試問當 x 為多少時，這八邊形的面積最大？



- 5 設 x 為實數，求出函數 $y = \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x + 1}$ 的值域。

- 6 已知函數 $f(x) = \sin x$ ，存在 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ 滿足 $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 6\pi$ ，且 $|f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \dots + |f(x_{m-1}) - f(x_m)| = 12$ ，其中 $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$ ，試求出 m 的最小值。

- 7 已知 $x, y \in \mathbb{R}$ ，且 $x^2 + 2xy + 2y^2 = 4$ ，求出 xy 的最大值。

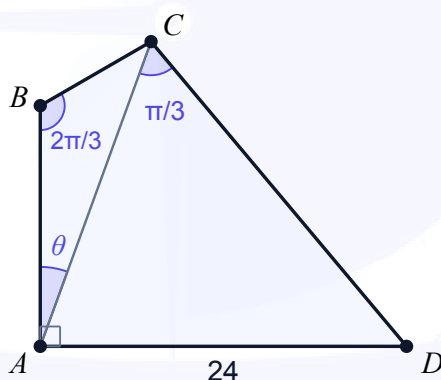
- 8 已知 $f(x) = \sqrt{3} \cos\left(\frac{x\pi}{r} + \varphi\right)$ ，其中 $r > 0$ ， $f(x)$ 為奇函數， φ 的最小正值為 φ_0 。(1) 求出 φ_0 的值。(2) 若函數 $f(x) = \sqrt{3} \cos\left(\frac{x\pi}{r} + \varphi_0\right)$ ，其中 $r > 0$ ， $f(x)$ 的圖形至少有一個最大值點和一個最小值點在圓 $x^2 + y^2 = r^2$ 內或圓 $x^2 + y^2 = r^2$ 上，求 r 的取值範圍。



- 9 已知函數 $f(x) = 2\sin(\omega x)$ ，其中常數 $\omega > 0$ 。(1) 若 $y = f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上遞增，求 ω 的取值範圍。(2) 令 $\omega = 2$ ，將函數 $y = f(x)$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 個單位，再向上平移 1 個單位，得到函數 $y = g(x)$ 的圖形，區間 $[a, b]$ 滿足：「 $g(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 上至少含有 30 個實數解。」在所有滿足上述條件的 $[a, b]$ 中，求 $b - a$ 的最小值。

- 10 令 $f(x) = \cos x$ ， $\alpha \leq x \leq \alpha + \frac{\pi}{2}$ ，其中 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 。令 $f(x)$ 的最大值為 M (M 隨著 α 改變而改變)，最小值為 m (m 隨著 α 改變而改變)，求出 $M - m$ 的最大值。

- 11 凸四邊形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$ ， $\angle ACD = \frac{\pi}{3}$ ， $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$ ， $\overline{AD} = 24$ 公尺。設 $\angle BAC = \theta$ ， $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ 。(1) 試用 θ 表示 $\overline{AB}$ 的長為多少公尺？(2) $\overline{AB} + \overline{BC}$ 的最小值為多少公尺？(3) 承上題，此時 θ 為多少？



- 12 設 α, β 皆為實數，且滿足 $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，求出 $\sin(\alpha + \beta)$ 之值。

三、非選擇題 (共 20 分；前面小題縱使未被證出，也可被引用來解後面小題)

- 13 令 A, B, C 為一銳角 $\triangle ABC$ 的三內角，回答下列問題：(1) 令 α, β 為實數，利用 $\cos$ 的和差角公式，證明 $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha \cos \beta$ 。(2 分) (2) 證明 $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$ 。(4 分) (3) 求出 $\frac{\cos A}{\cos B \cos C} + \frac{\cos B}{\cos C \cos A} + \frac{\cos C}{\cos A \cos B}$ 的最小值並證明其為最小。(3 分) (4) 求出 $\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A$ 的最小值並證明其為最小。(3 分)



14

令 A 、 B 、 C 為一 $\triangle ABC$ 的三內角，滿足 $\tan A \tan C = \tan^2 B$ ，回答下列問題：(1) 證明 $\triangle ABC$ 為銳角三角形。(4 分) (2) 證明 $B \geq \frac{\pi}{3}$ 。(4 分)

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/kshs-114a-g11a-1

答案一覽

第 1 題 (C)(E)

第 2 題 (A)(D)

第 3 題 $-2 < k < 0$

第 4 題 $\frac{3\pi}{4}$

第 5 題 $\left\{ y \mid \frac{-\sqrt{2}-1}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}, y \neq -1 \right\}$

第 6 題 8

第 7 題 $2\sqrt{2}-2$

第 8 題 (1) $\frac{\pi}{2}$; (2) $r \geq 2$

第 9 題 (1) $0 < \omega \leq \frac{3}{4}$; (2) $\frac{43\pi}{3}$

第 10 題 $\sqrt{2}$

第 11 題 (1) $16 \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{3} \right)$; (2) $8\sqrt{3}+8$; (3) $\frac{\pi}{12}$

第 12 題 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

第 13 題 (1)(2) 見詳解 ; (3) 最小值 6 ; (4) 最小值 9

第 14 題 見詳解 (證明)

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code, 在網頁上勾你錯的題號, 馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前, 註冊後在首頁填上段考日期和範圍, 可以自己產生一份考前藍圖 PDF: 一份模擬卷、詳解, 還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解? 考完把題目頁拍照上傳, 收到會盡快做好放上來: royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)

多選題：和差角公式的判斷、倍角化簡

- 1 答案 (C)(E)。 (A) 錯：取 $\alpha = \beta = 0$, 左邊 $\cos 0 = 1$, 右邊 $1 - 1 = 0$ 。 (B) 錯：取 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 、 $\beta = \frac{\pi}{2}$, 左邊 $\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 右邊 $\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 等式成立。 (C) 對：把剛才的 α 換成 $\frac{\pi}{4} + 2n\pi$ (n 為整數), 兩邊的值都不變, 所以有無窮多組。 (D) 錯：與 (C) 相反。 (E) 對：左邊 $= (\sin x \cos y)^2 - (\cos x \sin y)^2 = \sin^2 x (1 - \sin^2 y) - (1 - \sin^2 x) \sin^2 y = \sin^2 x - \sin^2 y$ 。
- (A)(B) 是「全部成立 / 全部不成立」, 各舉一個反例就能否定 ; (C) 只要找到一組再利用週期。



勾你錯的題號, 看錯在哪幾章, 註冊後直接從那幾章開始練

網頁版 : royalblue-education.com/school-exams/kshs-114a-g11a-1

- 2 答案 (A)(D)。 $1 + \sin \beta = 1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right)$ ， $\cos \beta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right)$ ，相除得 $\tan \alpha = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right)} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right)$ 。 α 與 $\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$ 都在 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 之間，所以 $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$ ，即 $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ ，(D) 對。 $\alpha > \frac{\pi}{4}$ ，所以 $\tan \alpha > 1 = \tan \frac{\pi}{4}$ ，(A) 對。(B) 錯： $3\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + \alpha > \frac{\pi}{2}$ 。(C)(E) 錯： $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2\beta > \frac{\pi}{2}$ ， $3\alpha + \beta$ 更大。
- 最後一步用到「正切在 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 之間是一對一」，所以要先確認兩個角都在這個範圍內。

填充 3~7：圖形與解的個數、疊合求極值

- 3 令 $g(x) = \sin |x| - |\sin x|$ ， $g(-x) = g(x)$ ，圖形對稱於 y 軸，先看 $0 \leq x \leq 2\pi$ 。 $0 \leq x \leq \pi$ 時 $\sin x \geq 0$ ， $g(x) = \sin x - \sin x = 0$ ； $\pi < x \leq 2\pi$ 時 $\sin x \leq 0$ ， $g(x) = \sin x + \sin x = 2 \sin x$ ，由 0 降到 -2 ($x = \frac{3\pi}{2}$) 再回到 0。所以在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上： $k = 0$ 有無窮多個解， $-2 < k < 0$ 恰有 2 個解， $k = -2$ 恰有 1 個解，其餘無解。左半邊對稱，個數加倍，恰有四個相異實數解的條件是 $-2 < k < 0$ 。
- 流傳的兩份版本中，一份題幹印作「整數解」，另一份印作「實數解」；後者才與簡答 $-2 < k < 0$ 相符，本頁採後者（整數 x 只有 -6 到 6 ，湊不出恰四個解）。
- 4 等腰三角形兩腰為 1、夾角 x ($0 < x < \pi$)，面積 $\frac{1}{2} \sin x$ ，底邊長 $2 \sin \frac{x}{2}$ ，也就是正方形的邊長。八邊形面積 $= \left(2 \sin \frac{x}{2} \right)^2 + 4 \times \frac{1}{2} \sin x = 2(1 - \cos x) + 2 \sin x = 2 + 2\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$ 。 $-\frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$ ，當 $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ，即 $x = \frac{3\pi}{4}$ 時面積最大（最大值 $2 + 2\sqrt{2}$ ）。
- $4 \sin^2 \frac{x}{2}$ 用半角公式換成 $2(1 - \cos x)$ ，整個式子才會變成 $\sin x$ 、 $\cos x$ 的一次式，可以疊合。
- 5 令 $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ ，則 $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ ，且 $t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ ， $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$ 。分母不可為 0，所以 $t \neq -1$ 。 $y = \frac{t^2 - 1}{2(t + 1)} = \frac{t - 1}{2}$ 。 t 由 $-\sqrt{2}$ 到 $\sqrt{2}$ 時， y 由 $\frac{-\sqrt{2} - 1}{2}$ 到 $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ ，再去掉 $t = -1$ 對應的 $y = -1$ 。值域為 $\frac{-\sqrt{2} - 1}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ 且 $y \neq -1$ 。
- $t = -1$ 落在 $-\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{2}$ 之間，約分之前要先把它排除，值域中間會少一個點。
- 6 每一項 $|f(x_i) - f(x_{i+1})| \leq 2$ ，等於 2 只發生在一個點的函數值是 1、另一個是 -1 。在 $0 \leq x \leq 6\pi$ 內， $\sin x = \pm 1$ 的點只有 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, \frac{11\pi}{2}$ 共 6 個。若 $m = 7$ ，共 6 項，總和要到 12 必須每項都是 2，需要 7 個函數值為 ± 1 的點，辦不到； $m < 7$ 時總和小於 12。取 $0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, 6\pi$ 共 8 個點，總和 $= 1 + 2 \times 5 + 1 = 12$ 。所以 m 的最小值為 8。
- 流傳的兩份版本中，一份把點列寫成「 $\dots, x_n$ 」，另一份寫 x_m ，與後文一致，本頁採後者。頭尾兩段 (0 到 $\frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{11\pi}{2}$ 到 6π) 各只貢獻 1，不可漏掉兩個端點。
- 7 配方： $(x + y)^2 + y^2 = 4$ 。令 $x + y = 2 \cos \theta$ ， $y = 2 \sin \theta$ ，則 $x = 2 \cos \theta - 2 \sin \theta$ 。 $xy = 4 \sin \theta \cos \theta - 4 \sin^2 \theta = 2 \sin 2\theta - 2(1 - \cos 2\theta) = 2\sqrt{2} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right) - 2$ 。 θ 可取任意實數，所以 xy 的最大值為 $2\sqrt{2} - 2$ 。
- 流傳的兩份版本中，一份題幹印作「最小值」，另一份印作「最大值」；後者才與簡答 $2\sqrt{2} - 2$ 相符，本頁採後者（同一個式子的最小值是 $-2\sqrt{2} - 2$ ）。



看到 $a \sin \theta + b \cos \theta$ 就疊合；看到 $\sin^2$ 、 $\sin \theta \cos \theta$ 先用倍角公式降成一次，再疊合。

填充 8~12：圖形性質、區間極值、正弦定理、和差角

- 8 (1) 奇函數必有 $f(0) = 0$ ，即 $\sqrt{3} \cos \varphi = 0$ ， $\varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n 為整數)；此時 $f(x) = \pm \sqrt{3} \sin \frac{x\pi}{r}$ 確實是奇函數。最小正值 $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ 。(2) $f(x) = \sqrt{3} \cos \left(\frac{x\pi}{r} + \frac{\pi}{2} \right) = -\sqrt{3} \sin \frac{x\pi}{r}$ ，週期 $2r$ 。最大值點在 $x = -\frac{r}{2} + 2nr$ ，最小值點在 $x = \frac{r}{2} + 2nr$ ；離原點最近的是 $\left(-\frac{r}{2}, \sqrt{3}\right)$ 與 $\left(\frac{r}{2}, -\sqrt{3}\right)$ ，到原點的距離平方都是 $\frac{r^2}{4} + 3$ 。條件為 $\frac{r^2}{4} + 3 \leq r^2$ ， $r^2 \geq 4$ ，得 $r \geq 2$ 。

- 9 (1) $\omega > 0$ ， $2 \sin(\omega x)$ 包含 0 的遞增區間是 $\left[-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}\right]$ 。要 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 落在其中： $\frac{\pi}{2\omega} \geq \frac{2\pi}{3}$ 且 $\frac{\pi}{2\omega} \geq \frac{\pi}{4}$ ，得 $0 < \omega \leq \frac{3}{4}$ 。(2) $g(x) = 2 \sin 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$ 。由 $g(x) = 0$ 即 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ ， $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi$ 或 $\frac{11\pi}{6} + 2n\pi$ ， $x = \frac{5\pi}{12} + n\pi$ 或 $\frac{3\pi}{4} + n\pi$ 。相鄰兩根的間距依序是 $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \dots$ 。30 個根之間有 29 段間距，從短的那段開始：15 段 $\frac{\pi}{3}$ 加 14 段 $\frac{2\pi}{3}$ ， $b - a$ 的最小值 $= 5\pi + \frac{28\pi}{3} = \frac{43\pi}{3}$ 。

$[a, b]$ 的兩端剛好取在根上最省；29 是奇數，第一段選短的那一種，短的才會多一段。

- 10 若 $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq 0$ ：區間 $\left[\alpha, \alpha + \frac{\pi}{2}\right]$ 包含 0， $M = 1$ ；兩端點的值 $\cos \alpha$ 與 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha$ 都不小於 0，所以 $m \geq 0$ ， $M - m \leq 1$ 。若 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ：區間落在 0 到 π 之間， $\cos x$ 遞減， $M = \cos \alpha$ ， $m = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha$ ， $M - m = \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ ，在 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 時為 $\sqrt{2}$ 。 $\sqrt{2} > 1$ ，所以 $M - m$ 的最大值為 $\sqrt{2}$ 。

流傳的兩份版本中，一份範圍印作 $\alpha \leq x < \alpha + \frac{\pi}{2}$ (右端不含)，另一份印作 $\alpha \leq x \leq \alpha + \frac{\pi}{2}$ ；右端不含時 $\alpha > 0$ 的情形取不到最小值，本頁採後者，與簡答 $\sqrt{2}$ 相符。

- 11 (1) $\triangle ACD$ 中 $\angle CAD = \frac{\pi}{2} - \theta$ ， $\angle ADC = \pi - \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \theta + \frac{\pi}{6}$ 。由正弦定理 $\frac{\overline{AC}}{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{24}{\sin \frac{\pi}{3}}$ ， $\overline{AC} = 16\sqrt{3} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ 。 $\triangle ABC$ 中 $\angle ACB = \frac{\pi}{3} - \theta$ ， $\frac{\overline{AB}}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} = \frac{\overline{AC}}{\sin \frac{2\pi}{3}}$ ， $\overline{AB} = 32 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$ 。因 $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ ，由倍角公式 $\overline{AB} = 16 \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ 。(2) 同理 $\overline{BC} = \frac{\overline{AC} \sin \theta}{\sin \frac{2\pi}{3}} = 32 \sin \theta \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 16\sqrt{3} \sin^2 \theta + 16 \sin \theta \cos \theta = 8\sqrt{3}(1 - \cos 2\theta) + 8 \sin 2\theta$ ；而 $\overline{AB} = 8 \sin 2\theta + 8\sqrt{3} \cos 2\theta$ 。相加得 $\overline{AB} + \overline{BC} = 16 \sin 2\theta + 8\sqrt{3}$ 。 $\frac{\pi}{6} \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{3}$ ， $\sin 2\theta$ 遞增，最小值在 $2\theta = \frac{\pi}{6}$ ： $16 \times \frac{1}{2} + 8\sqrt{3} = 8\sqrt{3} + 8$ 。(3) 此時 $\theta = \frac{\pi}{12}$ 。

流傳的兩份版本中，一份 (2) 印作 $\overline{AB} + \overline{AC}$ ，另一份印作 $\overline{AB} + \overline{BC}$ ；後者才與簡答 $8\sqrt{3} + 8$ 相符，本頁採後者 ($\overline{AB} + \overline{AC}$ 在 $\theta = \frac{\pi}{12}$ 時是 $16 + 8\sqrt{6}$)。附圖依題目條件重畫，取 $\theta = 20^\circ$ 示意。



- 12 兩式平方相加： $2 + 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$ ，得 $\cos(\alpha - \beta) = 0$ 。兩式相乘：
 $\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta + (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，即 $\frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。
 把 $2\alpha = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)$ 、 $2\beta = (\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)$ 用和差角公式展開相加， $\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 0$ 。所以 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。
 驗算： $\alpha = \frac{5\pi}{12}$ 、 $\beta = -\frac{\pi}{12}$ 滿足兩個條件， $\sin(\alpha + \beta) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

圖形題先把函數寫成 $A \sin(\omega x + \varphi) + k$ 的樣子，再讀週期、極值點與零點；幾何題用正弦定理把每一邊都寫成同一個角的式子。

非選擇題 13~14：三角形內角的不等式證明

- 13 (1) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ ， $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ ，兩式相加即得 $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$ 。(2) 銳角三角形中 $\cos A$ 、 $\cos B$ 、 $\cos C$ 都是正數，且 $\cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$ 。由 (1)， $2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B) = -\cos C + \cos(A - B) \leq 1 - \cos C$ 。兩邊同乘 $\cos C > 0$ ： $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{2} \cos C (1 - \cos C)$ 。
 $\cos C$ 與 $1 - \cos C$ 都是正數，由算幾不等式 $\cos C (1 - \cos C) \leq \left(\frac{\cos C + 1 - \cos C}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$ 。所以 $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$ ；等號成立於 $A = B$ 且 $\cos C = \frac{1}{2}$ ，即正三角形。(3) 令 $P = \cos A \cos B \cos C$ ，由 (2) 知 $0 < P \leq \frac{1}{8}$ 。通分後所求 = $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}{P}$ 。在 (2) 的式子 $2 \cos A \cos B = -\cos C + \cos(A - B)$ 兩邊同乘 $\cos C = -\cos(A + B)$ ，得 $2P = -\cos^2 C - \cos(A + B) \cos(A - B)$ 。
 再用 (1) (取 $\alpha = A + B$ 、 $\beta = A - B$) 與倍角公式： $\cos(A + B) \cos(A - B) = \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) = \cos^2 A + \cos^2 B - 1$ 。所以 $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2P$ ，所求 = $\frac{1 - 2P}{P} = \frac{1}{P} - 2 \geq 8 - 2 = 6$ 。正三角形時每一項都是 $\frac{1/2}{1/4} = 2$ ，和為 6，等號成立，故最小值為 6。(4)
 $\tan B \tan C - 1 = \frac{\sin B \sin C - \cos B \cos C}{\cos B \cos C} = \frac{-\cos(B + C)}{\cos B \cos C} = \frac{\cos A}{\cos B \cos C}$ ，另外兩項同理。三式相加： $\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = \left(\frac{\cos A}{\cos B \cos C} + \frac{\cos B}{\cos C \cos A} + \frac{\cos C}{\cos A \cos B} \right) + 3 \geq 6 + 3 = 9$ 。正三角形時 $3 \times (\sqrt{3})^2 = 9$ ，等號成立，故最小值為 9。

「求最小值並證明」要寫兩件事：不等式對所有銳角三角形成立，而且等號真的取得到（這裡是正三角形）。

ROYAL BLUE • EDUCATION



14 令 $a = \tan A$, $c = \tan C$, $t = \tan B$; 題目的式子有意義, 所以三個角都不是 $\frac{\pi}{2}$, 且 $0 < B < \pi$ 使 $t \neq 0$ 。(1) $ac = t^2 > 0$, a, c 同號; 三角形最多一個鈍角, 所以 A, C 都是銳角, $a > 0, c > 0$ 。若 $ac = 1$, 則 $\tan A = \frac{1}{\tan C} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$, 得 $A + C = \frac{\pi}{2}$, $B = \frac{\pi}{2}$, 不合, 所以 $ac \neq 1$ 。由 $B = \pi - (A + C)$, $t = -\tan(A + C) = \frac{a + c}{ac - 1} = \frac{a + c}{t^2 - 1}$, 即 $t(t^2 - 1) = a + c > 0 \dots\dots(*)$ 。假設 $t < 0$: 由 $(*)$ 得 $t^2 < 1$, 於是 $a + c = |t|(1 - t^2) < |t| = \sqrt{ac}$; 但算幾不等式給出 $a + c \geq 2\sqrt{ac} > \sqrt{ac}$, 矛盾。所以 $t > 0$, B 也是銳角, $\triangle ABC$ 為銳角三角形。(2) 由 $(*)$ 與算幾不等式, $t(t^2 - 1) = a + c \geq 2\sqrt{ac} = 2t$ 。因 $t > 0$, 兩邊同除以 t : $t^2 - 1 \geq 2$, $t \geq \sqrt{3}$, 即 $\tan B \geq \tan \frac{\pi}{3}$ 。 B 是銳角, 正切在 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 之間遞增, 所以 $B \geq \frac{\pi}{3}$; 等號成立於 $a = c$, 即正三角形。

(1) 不能只說「 $\tan^2 B > 0$ 所以都是銳角」: $\tan A \tan C > 0$ 只保證 A, C 是銳角, B 要另外證。

三角形的內角和是 π , 所以 $\cos(A + B) = -\cos C$ 、 $\tan(A + C) = -\tan B$; 把三個角的式子換成兩個角, 再配上算幾不等式。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自高雄中學 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/kshs-114a-g11a-1