

雄中 114 學年度上學期 高一第一次段考



御藍教育

範圍：數與式（實數、絕對值）、集合與邏輯、函數初步 · 單選題 3 題（12 分）、多選題 3 題（18 分）、填充題 10 題（60 分）、證明與作圖題 2 題（10 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/ksks-114a-g10-1

一、單選題（每題 4 分，共 12 分）

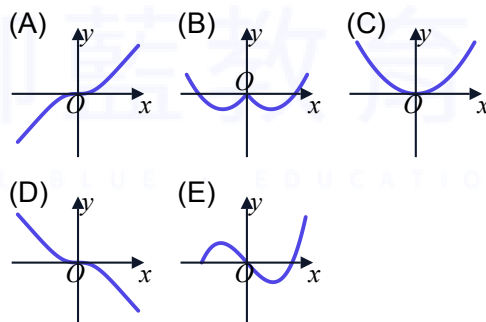
1 比較 $a = 1.\overline{02}$ ， $b = \frac{103}{101}$ ， $c = \frac{51}{50}$ 的大小？

- (A) $a > b > c$
- (B) $a > c > b$
- (C) $b > a > c$
- (D) $b > c > a$
- (E) $c > a > b$

2 設 $A = \{x \mid x^2 + ax + b = 0\}$ ， $B = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ ，若 $A \cup B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ ，則滿足條件的實數數對 (a, b) 共有多少個？

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 0

3 下列何者最有可能是函數 $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ 的圖形的一部分？



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/ksks-114a-g10-1

二、多選題 (每題 6 分, 共 18 分)

4 設函數 $f(x) = |x - 2|$, $g(x) = |x - 5|$, $x \in \mathbb{R}$, 下列各選項何者正確?

- (A) 函數 $h(x) = f(x + 2)$ 為偶函數
- (B) $f(x) + g(x)$ 的最小值為 3
- (C) $k \in \mathbb{R}$, 若 $f(x) + g(x) < k$ 無實數解, 則 $k < 3$
- (D) 滿足 $f(g(x)) = 3$ 的 x 值共有 4 個
- (E) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, f(x) > g(x)\} = \left(\frac{7}{2}, \infty\right)$

5 下列各敘述何者正確? (下列各選項為獨立敘述, 互不相關)

- (A) $1 \in \{\{1\}, 2\}$
- (B) 設 x, y 為實數, 「若 $x > 0$, 則 $y < 1$ 」成立, 則「若 $y > 1$, 則 $x \leq 1$ 」成立
- (C) A, B 為宇集合 U 中的兩個集合, 則 $(A \cap B)' \cap (A \cup B)' = A' - B$
- (D) 集合 $C = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leq 1\}$, $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| \leq 1\}$, 則 $C - D = [1, 2]$
- (E) 設 p, q, r 為三個敘述, 若「 $(p \vee q) \rightarrow r$ 」為假, 則「 $r \rightarrow (p \wedge q)$ 」為真

6 下列各敘述何者正確? (下列各選項為獨立敘述, 互不相關)

- (A) a, b 為實數, 若 $a + b, ab$ 皆為有理數, 則 $a^3 + b^3$ 必為有理數
- (B) a 為實數, 若 a^5 與 a^7 皆為有理數, 則 a^9 必為有理數
- (C) 可用尺規作圖在數線上找到 $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ 的位置
- (D) 循環小數的平方根為 $\sqrt{0.\overline{4}} = 0.\overline{2}$
- (E) 若 a, b 皆為無理數, 且 $a < b$, 則在 a, b 之間不一定找得到一個有理數

三、填充題 (共 60 分)

7 從 210 到 500 的自然數中, 是 7 的倍數但不是 3 的倍數者共有 ____ 個。

8 設 x 為整數, 若命題「若 $2 < |x - 1| < 4$, 則 $x > 0$ 」為假, 求 x 值 = ____。

9 K 中 1 年 25 班人數共有 36 人, 調查開學考的國文、英文、數學三科的成績, 發現國文及格者 26 人, 英文及格者 21 人, 國文或英文及格者 34 人, 數學或英文及格者 27 人, 數學與英文均及格者 12 人, 數學與國文均及格者 12 人, 且沒有人三科均不及格, 數學、國文、英文三科均及格者共有 ____ 人。



10 實數值函數 $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x}$ 的最大定義域為 ____。

11 設 a, b 為實數，若式 $|ax - 4| < b$ 的解為 $-5 < x < 1$ ，則數對 $(a, b) =$ ____。

12 設 a, b 為有理數，若 $\sqrt{7 + \sqrt{48}}$ 為方程式 $x^2 + ax + b = 0$ 的一根，則數對 $(a, b) =$ ____。

13 在數線的正向上，有三點 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $P(8)$ ，已知 P 在線段 $\overline{AB}$ 上， $\overline{PA} : \overline{PB} = 1 : 2$ ，則 ab 的最大值 = ____。

14 解不等式 $|x - 1| + |x + 1| + 2|x + 2| < 8$ ，得解為 ____。

15 實數值函數 f 滿足 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right)(x^2 - x + 1)$ ，則 $f(x) =$ ____。

16 因式分解： $(x + y - 1)^3 - (x^3 + y^3) + 1 =$ ____。

四、證明與作圖題（共 10 分）

17 已知：「 n 為整數，則 n 為 3 的倍數 $\Leftrightarrow n^2$ 為 3 的倍數」。試證明 $\sqrt{3}$ 為無理數。



- 18 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，令函數 $f(x) = [x]$ ， $-2 \leq x \leq 2$ 。試作 $y = f(x)$ 的圖形。



御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/kshs-114a-g10-1

答案一覽

- 第 1 題 (B)
第 2 題 (C)
第 3 題 (A)
第 4 題 (A)(B)(E)
第 5 題 (B)(C)(E)
第 6 題 (A)(B)(C)
第 7 題 28
第 8 題 -2
第 9 題 8
第 10 題 $x \leq 2$ 且 $x \neq 0$
第 11 題 $(-2, 6)$
第 12 題 $(-4, 1)$
第 13 題 72
第 14 題 $-3 < x < 1$
第 15 題 $x^2 - 1$
第 16 題 $3(x+y)(x-1)(y-1)$
第 17 題 見詳解 (反證法)
第 18 題 四段水平線段 (左端實心、右端空心) 加一點 $(2, 2)$, 見詳解附圖

單選題：循環小數、解集合、函數圖形

- 1 答案 (B)。 $a = 1.020202\cdots$; $c = \frac{51}{50} = 1.02$; $b = \frac{103}{101} = 1 + \frac{2}{101}$, 而 $\frac{2}{101} < \frac{2}{100} = 0.02$, 所以 $b < 1.02 = c$ 。又 $a = 1.02 + 0.000202\cdots > c$ 。故 $a > c > b$ 。
 b 和 c 都寫成「1+ 一個小分數」, 比分母就好, 不用長除法。
- 2 答案 (C)。 $A \cup B$ 多出 $\frac{1}{3}$, 所以 $\frac{1}{3} \in A$; 又 $A \subseteq \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$, 且二次方程式最多兩個相異根。 A 只能是: $\{\frac{1}{3}\}$ (重根, $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$)、 $\{\frac{1}{3}, 1\}$ ($x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0$)、 $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$ ($x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$)。三種各對應一組 (a, b) , 共 3 個。
重根的情形 A 只有一個元素, 最容易漏掉。



- 3 答案 (A)。 $f(-x) = -f(x)$ ，圖形對原點對稱，刪去 (B)(C)。 $x > 0$ 時 $f(x) > 0$ ，刪去 (D)。 $f(x) = 0$ 只有 $x = 0$ ，刪去 (E)（它在 x 軸上還有其他交點）。另外 x 很小時 $f(x)$ 約為 x^3 ，所以原點附近很平； $f(x) = x - \frac{x}{x^2+1}$ ， x 很大時接近直線 $y = x$ ，與 (A) 相符。

多選題：絕對值函數、集合與邏輯、有理數

- 4 答案 (A)(B)(E)。 (A) 對： $h(x) = |x|$ ， $h(-x) = h(x)$ 。 (B) 對： $|x-2| + |x-5|$ 是 x 到 2、5 的距離和， $2 \leq x \leq 5$ 時最小，為 3。 (C) 錯： $f(x) + g(x) < k$ 無解 $\Leftrightarrow k \leq 3$ ， $k = 3$ 也無解，結論 $k < 3$ 不成立。 (D) 錯： $||x-5|-2| = 3$ 得 $|x-5| = 5$ 或 $|x-5| = -1$ （不合）， $x = 0$ 或 10，只有 2 個。 (E) 對： $|x-2| > |x-5|$ 表示 x 離 5 比離 2 近，即 $x > \frac{7}{2}$ 。
- 5 答案 (B)(C)(E)。 (A) 錯： $\{\{1\}, 2\}$ 的元素是 $\{1\}$ 和 2，1 不是它的元素。 (B) 對：原命題成立，逆否命題「若 $y \geq 1$ ，則 $x \leq 0$ 」也成立； $y > 1$ 時 $y \geq 1$ ，得 $x \leq 0$ ，當然 $x \leq 1$ 。 (C) 對： $(A \cup B)' \subseteq (A \cap B)'$ ，所以左邊 $= (A \cup B)' = A' \cap B' = A' - B$ 。 (D) 錯： $C = [0, 2]$ ， $D = [-1, 1]$ ， $C - D = (1, 2]$ ，1 屬於 D 要去掉。 (E) 對： $(p \vee q) \rightarrow r$ 為假，表示 $p \vee q$ 真且 r 假；前提 r 為假時 $r \rightarrow (p \wedge q)$ 必為真。
- 6 答案 (A)(B)(C)。 (A) 對： $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ ，由有理數的四則運算封閉性，是有理數。 (B) 對： $a = 0$ 時顯然； $a \neq 0$ 時 $a^9 = \frac{(a^7)^2}{a^5}$ ，是有理數。 (C) 對： $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ ， $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 都能用直角三角形作出，相減也能作出。 (D) 錯： $0.\overline{4} = \frac{4}{9}$ ， $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = 0.\overline{6}$ ，不是 $0.\overline{2} = \frac{2}{9}$ 。 (E) 錯：任兩個相異實數之間一定有有理數（有理數的稠密性）。

填充 7~11：計數、命題、排容、定義域與絕對值

- 7 7 的倍數： $210 = 7 \times 30$ 到 $497 = 7 \times 71$ ，共 $71 - 30 + 1 = 42$ 個。其中 21 的倍數（同時是 3 的倍數）： $210 = 21 \times 10$ 到 $483 = 21 \times 23$ ，共 14 個。答案 $42 - 14 = 28$ 。
- 8 「若 P 則 Q 」為假，表示 P 成立而 Q 不成立： $2 < |x-1| < 4$ 且 $x \leq 0$ 。 x 是整數， $|x-1| = 3$ ， $x = 4$ 或 -2 ；再要 $x \leq 0$ ，得 $x = -2$ 。
- 9 設國文、英文、數學及格的集合為 C 、 E 、 M 。 $n(C \cap E) = 26 + 21 - 34 = 13$ ； $n(M) = n(M \cup E) - n(E) + n(M \cap E) = 27 - 21 + 12 = 18$ 。沒有人三科都不及格， $n(C \cup E \cup M) = 36$ 。由排容原理： $36 = 26 + 21 + 18 - 13 - 12 - 12 + n(C \cap E \cap M)$ ，得 $n(C \cap E \cap M) = 8$ 。
- 10 根號內不可為負： $2 - x \geq 0$ ， $x \leq 2$ ；分母不可為 0： $x \neq 0$ 。最大定義域為 $\{x \mid x \leq 2, x \neq 0\}$ 。
- 11 有解表示 $b > 0$ ，不等式化為 $4 - b < ax < 4 + b$ 。若 $a > 0$ ，解為 $\frac{4-b}{a} < x < \frac{4+b}{a}$ ，兩式相加得 $\frac{8}{a} = -4$ ， $a = -2$ ，矛盾。所以 $a < 0$ ，解為 $\frac{4+b}{a} < x < \frac{4-b}{a}$ ； $\frac{4+b}{a} = -5$ 、 $\frac{4-b}{a} = 1$ ，相加得 $\frac{8}{a} = -4$ ， $a = -2$ ，再得 $b = 6$ 。答案 $(-2, 6)$ 。

除以負數不等號要反向，所以 $a < 0$ 時左右兩端要對調。



填充 12~16：雙重根號、分點與算幾、分段討論、代換、因式分解

12 $\sqrt{7+\sqrt{48}} = \sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$ 。代入： $(2+\sqrt{3})^2 + a(2+\sqrt{3}) + b = 0$ ，即 $(7+2a+b) + (4+a)\sqrt{3} = 0$ 。 a, b 為有理數而 $\sqrt{3}$ 是無理數，所以 $4+a=0$ 且 $7+2a+b=0$ ，得 $a=-4, b=1$ 。

13 「數線的正向上」表示 $a > 0, b > 0$ 。 P 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{PA}:\overline{PB} = 1:2$ ，由分點公式 $8 = \frac{2a+b}{3}$ ，即 $2a+b=24$ 。由算幾不等式 $\frac{2a+b}{2} \geq \sqrt{2a \cdot b}$ ， $12 \geq \sqrt{2ab}$ ， $ab \leq 72$ ；等號在 $2a=b=12$ ，即 $a=6, b=12$ 時成立。最大值 72。

A 在 B 的左邊或右邊，分點公式都是 $\frac{2a+b}{3}$ ，不必分情形。

14 分界點 $-2, -1, 1$ 。 $x \geq 1: 4x+4 < 8, x < 1$ ，無解。 $-1 \leq x < 1: 2x+6 < 8, x < 1$ ，得 $-1 \leq x < 1$ 。 $-2 \leq x < -1: 左邊 = 4 < 8$ 恆成立。 $x < -2: -4x-4 < 8, x > -3$ ，得 $-3 < x < -2$ 。合起來 $-3 < x < 1$ 。

每一段算完都要和該段的範圍取交集，最後再合併。

15 右邊 $= \frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2} = \frac{x^4+x^2+1}{x^2} = x^2+1+\frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 1$ 。令 $t = x + \frac{1}{x}$ ，得 $f(t) = t^2 - 1$ ，所以 $f(x) = x^2 - 1$ 。

嚴格來說 $x + \frac{1}{x}$ 只能取到 $|t| \geq 2$ 的值，題目要的是式子 $x^2 - 1$ 。

16 令 $s = x + y$ 。 $(s-1)^3 + 1$ 用立方和： $= s[(s-1)^2 - (s-1) + 1] = s(s^2 - 3s + 3)$ 。 $x^3 + y^3 = s(s^2 - 3xy)$ 。相減： $s(s^2 - 3s + 3 - s^2 + 3xy) = 3s(xy - x - y + 1) = 3(x+y)(x-1)(y-1)$ 。

把 $+1$ 和 $(x+y-1)^3$ 配成立方和，兩部分都會出現公因式 $x+y$ 。

證明與作圖 17~18

17 用反證法。假設 $\sqrt{3}$ 是有理數，可寫成 $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ ， p, q 為正整數且互質。平方得 $p^2 = 3q^2$ ，所以 p^2 是 3 的倍數，由已知 p 是 3 的倍數，設 $p = 3k$ (k 為正整數)。代回： $9k^2 = 3q^2$ ， $q^2 = 3k^2$ ，所以 q^2 是 3 的倍數，由已知 q 也是 3 的倍數。於是 p, q 有公因數 3，與互質矛盾。故 $\sqrt{3}$ 為無理數。

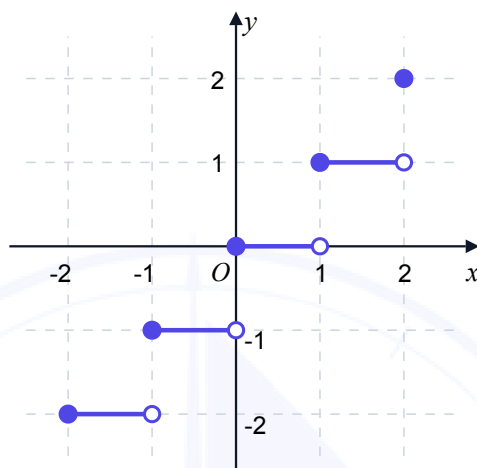
「互質」要在假設時就寫出來，最後的矛盾才有對象。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



- 18 依 $[x]$ 的定義分段： $-2 \leq x < -1$ 時 $f(x) = -2$ ； $-1 \leq x < 0$ 時 $f(x) = -1$ ； $0 \leq x < 1$ 時 $f(x) = 0$ ； $1 \leq x < 2$ 時 $f(x) = 1$ ； $x = 2$ 時 $f(2) = 2$ 。圖形是四條長度 1 的水平線段，每段左端點畫實心點（取得到）、右端點畫空心圈（取不到），最後在 $(2, 2)$ 畫一個實心點（見詳解附圖）。



$x = 2$ 那一點不可漏，也不可把 $y = 1$ 那段的右端 $(2, 1)$ 畫成實心。

證明題先寫出假設（含互質），每一步註明用到哪一條已知；作圖題端點取不取得到要用實心、空心分清楚。

你們學校的段考卷也想要詳解？考完把題目頁拍照或掃描上傳，我們收到後會盡快做好放上來，一樣免費下載。

上傳：royalblue-education.com/school-exams/submit（上傳前可以先把姓名、座號遮掉）

本卷題目取自雄中 114 學年度上學期高一第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

御藍教育

ROYAL BLUE • EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/kshs-114a-g10-1