

高雄女中 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數（弧度量、三角函數的圖形、和差角與倍角半角公式、正餘弦的疊合） · 是非題 6 題（12 分）、多選題 3 題（18 分）、填充題 14 格（70 分）。原卷各大題題號各自從 1 起算，本頁依序連號：第 1~6 題是非、第 7~9 題多選、第 10~23 題填充

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/kghs-114a-g11a-1

一、是非題（一題 2 分，共 12 分，正確請畫 ○，錯誤請畫 ×）

- 1 $\frac{3}{\pi}$ 弧度等於 $\frac{1}{60}$ 度。
- 2 正弦函數 $y = \sin x$ 的圖形對稱於點 $(\pi, 0)$ 。
- 3 將 $y = \sin 2x$ 的圖形向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位，再以 y 軸為基準線，水平伸縮為原本的 $\frac{1}{2}$ 倍，可得圖形為 $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)$ 。
- 4 設 $0 \leq x \leq 114\pi$ ，則函數 $y = \tan x$ 和直線 $y = x$ 的圖形共有 114 個交點。
- 5 $\sin \pi^2 < \cos 3$ 。
- 6 函數 $y = \cos |2x|$ 的週期為 $\frac{\pi}{2}$ 。

二、多選題（一題 6 分，共 18 分，錯一個選項得 4 分，錯兩個選項得 2 分，其餘情況得 0 分）

- 7 設一扇形圓心角為 θ ，半徑為 r ，周長為 P ，面積為 A ，則下列選項哪些正確？

- (A) 若 $P = 20$ 且 $\theta = 2$ ，則 $r = 10$
- (B) 若 $P = 20$ 且 $\theta = 3$ ，則 $A = 24$
- (C) 若 $P = 20$ ，則 A 的最大值為 25
- (D) 若 $A = 50$ ，則當 P 有最小值，此時 $\theta = 2$
- (E) 若 $A = 50$ ，則 P 的最小值為 $10\sqrt{2}$

- 8 已知 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ 且 $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ ，則下列選項哪些正確？

- (A) $\cos \theta = \frac{4}{5}$
- (B) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$
- (C) $\sin 2\theta = \frac{-24}{25}$
- (D) $\tan \frac{\theta}{2} = -3$
- (E) $\cos \frac{5\theta}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{250}$



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/kghs-114a-g11a-1

9 考慮函數 $f(x) = |\sin x|$ 的圖形中，其中 x 為任意實數，則下列選項哪些正確？

(A) $f(x)$ 的週期為 $\frac{\pi}{2}$

(B) 直線 $x = 2025\pi$ 是 $f(x)$ 之圖形的對稱軸

(C) $f(x)$ 的最大值 1

(D) $f(4) > f(5)$

(E) 兩函數 $f(x) = |\sin x|$ 和 $g(x) = \frac{1}{100}x^2$ 的圖形共有 11 個交點

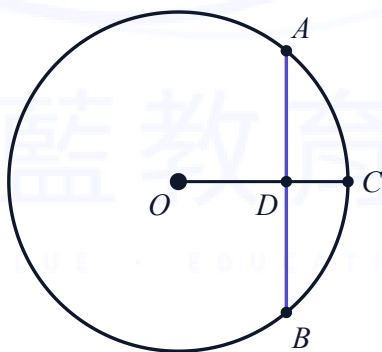
三、填充題（一格 5 分，共 70 分）

10 化簡 $\frac{\cos \frac{11\pi}{3}}{1 - \sin \frac{4\pi}{3}} + \frac{2}{1 + \tan\left(\frac{-\pi}{6}\right)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11 函數 $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 6\sqrt{2}\cos x - 2$ 的最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

12 已知 α 為第二象限角， β 為第三象限角，且 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ， $\tan \beta = \frac{5}{12}$ ，則 $\sin(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13 如圖為半徑 $\sqrt{2}$ 的圓，圓心為 O ，若弦 $\overline{AB}$ 垂直 $\overline{OC}$ 於 D ，則 $\overline{AB} + \overline{OD}$ 的最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 14 函數 $f(x) = \pi \sin(kx)$ 的圖形中，其中 $k > 0$ 。若取兩個相鄰的最高點及一個最低點形成正三角形，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

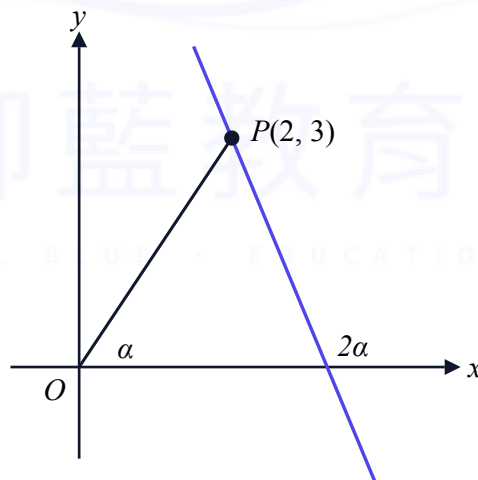
- 15 設 a, b 為正實數且 c, d 為實數，其中 $0 < c < \pi$ ，若 $y = a \sin(bx + c) + d$ 的週期為 $\frac{2\pi}{5}$ ，當 $x = -\frac{\pi}{20}$ 時， y 有最大值 3；當 $x = \frac{3\pi}{20}$ 時， y 有最小值 -1，求數對 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 16 求不等式 $\cos(x + \pi) \geq \cos x + \cos \pi$ 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 範圍內的解為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 17 若 $\sin(-\theta) \cos(2\pi - \theta) + \cos \theta \sin(\pi + \theta) = \frac{2}{3}$ ，且 $\sin \theta < 0$ ，則 $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

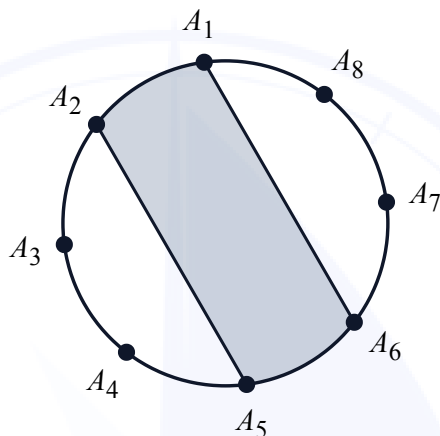
- 18 若 $ab > 0$ ，且函數 $f(x) = (a \cos x + b \sin x) \cos x$ 有最大值 4 及最小值 -1，則 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 19 如右圖， O 為原點， $P(2, 3)$ ， $\overline{OP}$ 與 x 軸正向夾角為 α ，則過 P 點且與 x 軸正向夾角為 2α 的直線方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(將答案表示成 $ax + by + c = 0$ 的形式)



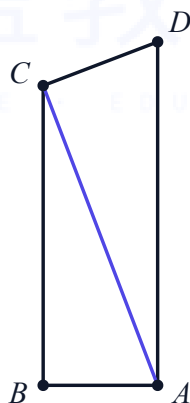
- 20 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的範圍內，求 $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ 的所有實數解之和為 ____。

- 21 如右圖， $A_1, A_2, \dots, A_8$ 八個點將圓的圓周八等分，並連接 $\overline{A_1A_6}$ 及 $\overline{A_2A_5}$ ，已知鋪色區域的周長為 $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}$ ，則鋪色區域的面積為 ____。



- 22 設 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos 2x}$ ， $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \cos 2x}$ ，且 $h(x) = f(x) + g(x)$ ，對於任何實數 x ，若 $h(x)$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則數對 $(M, m) =$ ____。

- 23 如右圖，已知 $\angle ABC = \angle ACD = \angle BAD = \frac{\pi}{2}$ ， $\tan \angle CAD < 1$ ，且 $\overline{AB} = 1$ 、 $\overline{AD} = 3$ ，則四邊形 $ABCD$ 的面積為 ____。






御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/kghs-114a-g11a-1

答案一覽

是非題：1 = 正確、2 = 錯誤

1 2	2 1	3 1	4 1	5 2	6 2
--------	--------	--------	--------	--------	--------

第 7 題 (B)(C)(D)

第 8 題 (A)(C)(E)

第 9 題 (B)(C)(E)

第 10 題 5

第 11 題 8

第 12 題 $-\frac{16}{65}$

第 13 題 $\sqrt{10}$

第 14 題 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

第 15 題 $\left(2, 5, \frac{3\pi}{4}, 1\right)$

第 16 題 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$

第 17 題 $-\frac{2\sqrt{15}}{9}$

第 18 題 7

第 19 題 $12x + 5y - 39 = 0$

第 20 題 $\frac{5\pi}{2}$

第 21 題 $\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\pi}{16}$

第 22 題 $(\sqrt{2}, 1)$

第 23 題 $\frac{9 + \sqrt{5}}{4}$

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/kghs-114a-g11a-1

是非題 1~6：弧度換算與三角函數的圖形

- 1 2 畫 $\times$ 。1 弧度 $= \frac{180}{\pi}$ 度，所以 $\frac{3}{\pi}$ 弧度 $= \frac{3}{\pi} \times \frac{180}{\pi} = \frac{540}{\pi^2}$ 度，大約 54.7 度，不是 $\frac{1}{60}$ 度。
反過來才對： $\frac{3}{\pi}$ 度 $= \frac{3}{\pi} \times \frac{\pi}{180} = \frac{1}{60}$ 弧度。
- 2 1 畫 $\circ$ 。取 $(\pi, 0)$ 兩側等距的兩點 $x = \pi + t$ 、 $x = \pi - t$ ： $\sin(\pi + t) = -\sin t$ ， $\sin(\pi - t) = \sin t$ ，兩個函數值互為相反數，所以圖形對稱於點 $(\pi, 0)$ 。事實上 $y = \sin x$ 與 x 軸的每個交點 $(k\pi, 0)$ 都是對稱中心。
- 3 1 畫 $\circ$ 。向右平移 $\frac{\pi}{4}$ ：把 x 換成 $x - \frac{\pi}{4}$ ，得 $y = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ 。再水平伸縮為 $\frac{1}{2}$ 倍：把 x 換成 $2x$ ，得 $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)$ 。
伸縮只把 x 換成 $2x$ ，後面的 $-\frac{\pi}{2}$ 不跟著乘 2。
- 4 1 畫 $\circ$ 。 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 這一段： $x = 0$ 是交點； $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 時 $\tan x > x$ ，沒有其他交點。之後 $y = \tan x$ 在每個區間 $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 各有一支由下往上的圖形，與直線 $y = x$ 各交一點；因為 $x > 0$ 時直線在 x 軸上方，交點落在 $\tan x > 0$ 的右半支，也就是 $k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$ 。 $k = 1, 2, \dots, 113$ 的交點都在 114π 以內，共 113 個； $k = 114$ 那一支的交點在 114π 右邊，不算。合計 $1 + 113 = 114$ 個。
兩個容易數錯的地方：原點算一個；最後一支在 $x \leq 114\pi$ 的部分 $\tan x \leq 0$ ，碰不到直線。
- 5 2 畫 $\times$ 。 $\pi^2 = 3\pi + \pi(\pi - 3)$ ，而 $\pi(\pi - 3) \approx 3.14 \times 0.14 \approx 0.44$ ，介於 0 與 $\frac{\pi}{6} \approx 0.52$ 之間，所以 $\sin \pi^2 = -\sin(\pi(\pi - 3)) > -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ 。另一方面 $\frac{5\pi}{6} \approx 2.62 < 3 < \pi$ ，餘弦在這一段遞減， $\cos 3 < \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。於是 $\cos 3 < -\frac{\sqrt{3}}{2} < -\frac{1}{2} < \sin \pi^2$ ，原式不成立。
估值： $\sin \pi^2 \approx -0.43$ ， $\cos 3 \approx -0.99$ 。
- 6 2 畫 $\times$ 。餘弦是偶函數， $\cos |2x| = \cos 2x$ ，週期是 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ ，不是 $\frac{\pi}{2}$ 。
絕對值在裡面 $(\cos |2x|)$ 圖形不變；絕對值在外面 $(|\cos 2x|)$ 週期才會減半成 $\frac{\pi}{2}$ 。

圖形題先寫出代數關係再判斷：對稱中心看 $f(a+t) = -f(a-t)$ ，平移伸縮只對 x 本身代換，數交點要把頭尾兩段單獨檢查。

多選題 7~9：扇形、倍角半角、 $y = |\sin x|$ 的圖形

- 7 答案 (B)(C)(D)。扇形弧長 $r\theta$ ，所以 $P = 2r + r\theta$ ， $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ 。(A) 錯： $r(2+2) = 20$ ， $r = 5$ 。(B) 對： $r(2+3) = 20$ ， $r = 4$ ， $A = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 3 = 24$ 。(C) 對： $r\theta = 20 - 2r$ ， $A = \frac{1}{2}r(20 - 2r) = -(r - 5)^2 + 25$ ， $r = 5$ (此時 $\theta = 2$) 時最大值 25。(D) 對、(E) 錯： $A = 50$ 得 $r\theta = \frac{100}{r}$ ， $P = 2r + \frac{100}{r} \geq 2\sqrt{2r \cdot \frac{100}{r}} = 20\sqrt{2}$ ，等號在 $2r = \frac{100}{r}$ ，即 $r^2 = 50$ 時成立，此時 $\theta = \frac{100}{r^2} = 2$ 。最小值是 $20\sqrt{2}$ ，不是 $10\sqrt{2}$ 。
周長固定求面積最大、面積固定求周長最小，等號都發生在 $\theta = 2$ (弧長等於兩條半徑的和)。



- 8 答案 (A)(C)(E)。θ 在第四象限， $\cos \theta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ ，(A) 對。(B) 錯： $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta - \sin \theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ 。(C) 對： $\sin 2\theta = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{4}{5} = -\frac{24}{25}$ 。(D) 錯： $\frac{3\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \pi$ 在第二象限， $\cos \frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ ， $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ，所以 $\tan \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{3}$ 。(E) 對： $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = \frac{7}{25}$ ， $\cos \frac{5\theta}{2} = \cos\left(2\theta + \frac{\theta}{2}\right) = \frac{7}{25} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) - \left(-\frac{24}{25}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{25\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{250}$ 。
半角公式的正負號由 $\frac{\theta}{2}$ 所在象限決定，要先把 θ 的範圍除以 2。

- 9 答案 (B)(C)(E)。(A) 錯： $|\sin(x + \pi)| = |-\sin x| = |\sin x|$ ，週期是 π；而 $f(0) = 0$ 、 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ， $\frac{\pi}{2}$ 不是週期。(B) 對： $f(2025\pi + t) = |\sin t| = f(2025\pi - t)$ 。(C) 對： $0 \leq |\sin x| \leq 1$ ， $x = \frac{\pi}{2}$ 時取到 1。(D) 錯： $f(4) = \sin(4 - \pi)$ ， $f(5) = \sin(2\pi - 5)$ ，而 $4 - \pi \approx 0.86$ 、 $2\pi - 5 \approx 1.28$ 都在 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 之間，正弦在這一段遞增，所以 $f(4) < f(5)$ 。(E) 對：兩個圖形都對稱於 y 軸，且 $x = 0$ 是交點，只要數 $x > 0$ 的部分。交點要滿足 $\frac{x^2}{100} \leq 1$ ，即 $x \leq 10$ ，而 $3\pi \approx 9.42 < 10$ 。在 $0 < x \leq \pi$ ：拋物線從原點緩慢上升，只在右半段與圖形交 1 點。在 $\pi < x \leq 2\pi$ 與 $2\pi < x \leq 3\pi$ ：頂點處 $g\left(\frac{3\pi}{2}\right) \approx 0.22$ 、 $g\left(\frac{5\pi}{2}\right) \approx 0.62$ 都小於 1，兩段各交 2 點。在 $3\pi < x \leq 10$ ： $g(x) > 0.88$ ，但 $f(x) \leq \sin(10 - 3\pi) \approx 0.54$ ，沒有交點。所以 $x > 0$ 有 5 個， $x < 0$ 也有 5 個，加上原點共 11 個。
流傳的兩份版本中，一份選項 (E) 印作 $g(x) = \frac{1}{100}x$ ，另一份印作 $g(x) = \frac{1}{100}x^2$ 。照前者，交點有 64 個，(E) 不成立；照後者，交點恰為 11 個，與參考答案相符，本頁採後者。

填充 10~14：函數值化簡、疊合求極值、和角公式

- 10 $\cos \frac{11\pi}{3} = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ， $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ 。第一項 = $\frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$ ；第二項 = $\frac{2}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) = 3 + \sqrt{3}$ 。相加得 5。
- 11 $2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x$ ，所以 $f(x) = \sqrt{2}\sin x - 7\sqrt{2}\cos x - 2$ 。疊合後振幅為 $\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (7\sqrt{2})^2} = \sqrt{100} = 10$ ，最大值 $10 - 2 = 8$ 。
兩項的角不同 ($x - \frac{\pi}{4}$ 與 x)，要先用差角公式展開成同一個角才能疊合。
- 12 α 在第二象限： $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ 。β 在第三象限且 $\tan \beta = \frac{5}{12}$ ： $\sin \beta = -\frac{5}{13}$ ， $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ 。 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{-36 + 20}{65} = -\frac{16}{65}$ 。
- 13 設 $\angle AOC = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)。直角三角形 AOD 中 $\overline{OA} = \sqrt{2}$ ，所以 $\overline{AD} = \sqrt{2}\sin \theta$ ， $\overline{OD} = \sqrt{2}\cos \theta$ ；過圓心且垂直弦的線段平分弦， $\overline{AB} = 2\sqrt{2}\sin \theta$ 。 $\overline{AB} + \overline{OD} = \sqrt{2}(2\sin \theta + \cos \theta) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}\sin(\theta + \varphi)$ ，其中 φ 為銳角且 $\tan \varphi = \frac{1}{2}$ 。取 $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ (在範圍內) 時最大，最大值 $\sqrt{10}$ 。
此時 $\tan \theta = 2$ ，即 $\overline{AD} = 2\overline{OD}$ 。



- 14 最高點的 y 坐標是 π ，最低點是 $-\pi$ 。相鄰兩個最高點相距一個週期 $\frac{2\pi}{k}$ ，這是正三角形的邊長；兩個最高點之間的最低點恰在中間，它到這條邊的距離 2π 是正三角形的高。所以 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\pi}{k} = 2\pi$ ， $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

填充 15~19：決定係數、不等式、降次疊合、倍角與斜率

- 15 週期 $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{5}$ ， $b = 5$ 。 $a > 0$ ，最大值 $a + d = 3$ 、最小值 $-a + d = -1$ ，得 $a = 2$ ， $d = 1$ 。 $x = -\frac{\pi}{20}$ 時取最大值： $5 \cdot \left(-\frac{\pi}{20}\right) + c = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ， $c = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$ ；由 $0 < c < \pi$ 得 $c = \frac{3\pi}{4}$ 。檢查： $x = \frac{3\pi}{20}$ 時 $5x + c = \frac{3\pi}{2}$ ，確實取最小值。答案 $\left(2, 5, \frac{3\pi}{4}, 1\right)$ 。
- 16 $\cos(x + \pi) = -\cos x$ ， $\cos \pi = -1$ ，不等式化為 $-\cos x \geq \cos x - 1$ ，即 $\cos x \leq \frac{1}{2}$ 。在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 內， $\cos x = \frac{1}{2}$ 的解是 $x = \frac{\pi}{3}$ 、 $\frac{5\pi}{3}$ ，兩者之間餘弦值較小，所以解為 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$ 。
 $\cos(x + \pi)$ 不能拆成 $\cos x + \cos \pi$ ，這題正是在比較這兩個式子。
- 17 $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ ， $\cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$ ， $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$ ，左式 $= -2\sin \theta \cos \theta = \frac{2}{3}$ ，得 $\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{3}$ 。 $\sin \theta < 0$ ，所以 $\cos \theta > 0$ ， $\sin \theta - \cos \theta < 0$ 。 $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2\sin \theta \cos \theta = \frac{5}{3}$ ， $\sin \theta - \cos \theta = -\frac{\sqrt{15}}{3}$ 。由立方差公式， $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta = (\sin \theta - \cos \theta)(1 + \sin \theta \cos \theta) = -\frac{\sqrt{15}}{3} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{2\sqrt{15}}{9}$ 。
- 18 $f(x) = a \cos^2 x + b \sin x \cos x = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}(a \cos 2x + b \sin 2x)$ 。疊合後最大值 $\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = 4$ ，最小值 $\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = -1$ 。兩式相加得 $a = 3$ ，相減得 $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$ ， $b = \pm 4$ 。由 $ab > 0$ 取 $b = 4$ ， $a + b = 7$ 。
先用倍角公式把 $\cos^2 x$ 、 $\sin x \cos x$ 降成 $2x$ 的一次式，才能疊合。
- 19 $\tan \alpha$ 是 $\overline{OP}$ 的斜率 $\frac{3}{2}$ 。所求直線的斜率是 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{3}{1 - \frac{9}{4}} = -\frac{12}{5}$ 。過 $P(2, 3)$ ： $y - 3 = -\frac{12}{5}(x - 2)$ ，整理得 $12x + 5y - 39 = 0$ 。
 α 超過 $\frac{\pi}{4}$ ，所以 2α 是鈍角，斜率為負，與圖形相符。

填充 20~23：疊合解方程式、八等分圓、根式化簡、四邊形面積

- 20 $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，令 $t = x + \frac{\pi}{4}$ ，則 $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{9\pi}{4}$ ，且 $\sin t = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$ 。設銳角 φ 滿足 $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{6}$ ；因為 $\frac{\sqrt{2}}{6} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $\varphi < \frac{\pi}{4}$ 。 $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{6}$ 的解是 $t = \varphi + 2n\pi$ 或 $t = \pi - \varphi + 2n\pi$ ，落在範圍內的只有 $t = \pi - \varphi$ 與 $t = 2\pi + \varphi$ ($t = \varphi$ 小於 $\frac{\pi}{4}$ ，不合)。兩個 t 的和是 3π ，所以兩個 x 的和是 $3\pi - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$ 。
不必求出 φ ，但要用 $\varphi < \frac{\pi}{4}$ 判斷哪兩個解在範圍內；若誤取 $t = \varphi$ 與 $t = \pi - \varphi$ ，會得到 $\frac{\pi}{2}$ 。



- 21 設半徑為 r ，圓心為 O 。相鄰兩點所夾的圓心角是 $\frac{\pi}{4}$ 。鋪色區域的邊界是兩段弧 A_1A_2 、 A_5A_6 與兩條弦 $\overline{A_1A_6}$ 、 $\overline{A_2A_5}$ 。每段弧長 $\frac{\pi}{4}r$ ；兩條弦所對的圓心角都是 $\frac{3\pi}{4}$ ，弦長 $2r \sin \frac{3\pi}{8}$ ，而 $\sin \frac{3\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ ，弦長為 $r\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ 。周長 $= 2r \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}$ ，得 $r = \frac{1}{2}$ 。把 O 與四個點連起來，鋪色區域分成兩個圓心角 $\frac{\pi}{4}$ 的扇形與兩個頂角 $\frac{3\pi}{4}$ 的等腰三角形：面積 $= 2 \cdot \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{16} + \frac{\sqrt{2}}{8}$ 。

兩條弦互相平行、分別在圓心兩側，所以圓心在鋪色區域內，才能這樣分割。

- 22 由倍角公式 $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ 、 $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ ，得 $f(x) = |\sin x|$ ， $g(x) = |\cos x|$ ， $h(x) = |\sin x| + |\cos x| \geq 0$ 。平方： $h(x)^2 = 1 + 2|\sin x \cos x| = 1 + |\sin 2x|$ ，而 $0 \leq |\sin 2x| \leq 1$ ，所以 $1 \leq h(x)^2 \leq 2$ 。最大值 $M = \sqrt{2}$ （例如 $x = \frac{\pi}{4}$ ），最小值 $m = 1$ （例如 $x = 0$ ）。

$\sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$ ，絕對值不可省；省掉會把最小值算成 $-\sqrt{2}$ 。

- 23 設 $\angle CAD = \theta$ 。直角三角形 ACD （直角在 C ）中 $\overline{AD} = 3$ ，所以 $\overline{AC} = 3 \cos \theta$ ， $\overline{CD} = 3 \sin \theta$ 。因為 $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$ ， $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \theta$ ；直角三角形 ABC （直角在 B ）中 $\overline{AB} = \overline{AC} \sin \theta = 3 \sin \theta \cos \theta$ ， $\overline{BC} = \overline{AC} \cos \theta = 3 \cos^2 \theta$ 。由 $\overline{AB} = 1$ 得 $\sin 2\theta = \frac{2}{3}$ ； $\tan \theta < 1$ 表示 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ， 2θ 是銳角， $\cos 2\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 。面積 $= \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{CD} = \frac{3}{2} \cos^2 \theta + \frac{9}{2} \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4}(1 + \cos 2\theta) + \frac{9}{4} \sin 2\theta = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9 + \sqrt{5}}{4}$ 。

條件 $\tan \angle CAD < 1$ 用來決定 $\cos 2\theta$ 取正；若取負，面積會變成 $\frac{9 - \sqrt{5}}{4}$ 。

解出來的角或邊有兩種可能時，回頭找題目給的範圍條件（角的範圍、象限、不等式）來取捨，並把取捨的理由寫出來。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自高雄女中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/kghs-114a-g11a-1