

高雄女中 114 學年度上學期 高一第一次段考



御藍教育

範圍：數與式（實數、絕對值、指數、常用對數） · 是非題 5 題（5 分）、單選題 5 題（20 分）、多選題 3 題（15 分）、填充題 15 題（60 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/kghs-114a-g10-1

一、是非題（每題 1 分，共 5 分）

- 1 $0.\overline{9} = 0.9999 \dots < 1$ 。
- 2 若 $0 < a < 1$ ，則 $a + \frac{1}{a}$ 的最小值為 2。
- 3 $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$ 。
- 4 $8^{\frac{1}{3}}$ 和 $8^{\frac{-1}{3}}$ 互為倒數。
- 5 $\log 10 = 10^0$ 。

二、單選題：（共 20 分）

- 6 設 $a = \sqrt{5} - \sqrt{13}$ ， $b = \sqrt{6} - \sqrt{14}$ ， $c = \sqrt{7} - \sqrt{15}$ ，請選出正確的大小關係。
(A) $a < b < c$
(B) $b < c < a$
(C) $c < b < a$
(D) $b < a < c$
(E) $a < c < b$
- 7 設 $A(3\pi)$ 、 $B(7\pi)$ 為數線上兩點，若 P 在 $\overline{AB}$ 外且 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 5$ ，試求 P 的坐標。
(A) 0
(B) π
(C) 2π
(D) 8π
(E) 9π



8 不等式 $|x + 2| + |x - 4| \leq 12$ 有幾個整數解？

- (A) 9
- (B) 10
- (C) 11
- (D) 12
- (E) 13

9 本校的校訂必修課程以「聯合國永續發展目標（簡稱 SDGs）」為主軸。在「氣候行動」方面，我國自主承諾 2030 年溫室氣體排放量相當於 2005 年的排放量再減 20%。假設我國每年依固定比率（當年和前一年排放量的比）逐年減少溫室氣體排放量。若要達到這個承諾，則這 25 年間，我國每年需減少溫室氣體排放量應接近下列哪一個選項？（利用 $0.8^{0.04} \approx 0.9911$ ）

- (A) 0.35%
- (B) 0.89%
- (C) 1.76%
- (D) 2.48%
- (E) 3.96%

10 已知最大質數（截至 2024 年 10 月）為 $2^{136279841} - 1$ 。若想印出此質數至少需要多少張 A4 紙？假定每張 A4 紙可印出 3000 個數字。在下列選項中，選出最接近的張數。

- (A) 700
- (B) 3800
- (C) 6900
- (D) 14000
- (E) 25000

三、多選題：（共 15 分）

11 已知 a 、 b 、 c 、 d 皆為有理數， p 、 q 均為無理數。試選出正確的選項（應選 2 項）。

- (A) $\frac{a}{b}$ 是有理數
- (B) $a + bp$ 為無理數
- (C) 若 $p + q$ 為有理數，則 pq 為有理數
- (D) 若 $a + bp = c + dp$ ，則 $a = c$ 且 $b = d$
- (E) 若 $p \neq q$ ，則 p 與 q 之間存在無限多個有理數，也存在無限多個無理數



- 12 若 a 、 b 均為正實數，已知 $3^a > 1$ 、 $3^b > 1$ 且 $a + b = 2$ ，試選出可能是 $3^a + 3^b$ 之值的選項。(應選 2 項)
- (A) 3
(B) 4
(C) 6
(D) 8
(E) 10
- 13 考慮計算機上的 $\sqrt{\quad}$ (取正平方根) 與 $\log$ (取常用對數) 按鈕。已知此計算機一按下 $\sqrt{\quad}$ 鍵或 $\log$ 鍵，就會把計算數值呈現在螢幕上。假設目前計算機螢幕上顯示的數字為 20251141015。試選出正確的選項 (應選 3 項)
- (A) 按一下 $\log$ 鍵，螢幕顯示的數字 A 的範圍為 $10 \leq A < 11$
(B) 按一下 $\sqrt{\quad}$ 鍵再按 $\log$ 鍵，螢幕顯示數字 B 的範圍為 $5 \leq B < 6$
(C) 按兩下 $\log$ 鍵，螢幕顯示數字 C 的範圍為 $0 \leq C < 1$
(D) 若按 m 次 $\sqrt{\quad}$ 鍵之後，螢幕顯示數字 $D < 10$ ，則 m 至少為 5
(E) 若按了第 n 次 $\log$ 鍵時，螢幕顯示數字 E 的範圍為 $0 \leq E < 1$ ，則 n 至少為 3

四、填充題：(共 15 題，佔 60 分)

- 14 將有理數 $\frac{61}{495}$ 化為小數後，小數點後第 2025 位為 _____。
- 15 一正最簡分數，分子與分母的和為 15，若將其化為小數 (依四捨五入法取至小數點後兩位) 得 0.36，則此分數的分子與分母之差為 _____。
- 16 已知 a 、 b 為實數，若方程式 $2|x - a| + b = 5$ 的解為 $x = 1$ 或 3 ，則 $a + b =$ _____。
- 17 已知 a 、 b 為實數，若不等式 $|ax + 1| > b$ 的解為 $x < -2$ 或 $x > 4$ ，則 $a + b =$ _____。



- 18 設 $K、G、H、S$ 為 $1 \sim 9$ 的阿拉伯數字且均相異，若 $\sqrt{KGHS} = KS$ ，則 $K - G - H - S =$ _____。

- 19 設 $\sqrt{4 - \sqrt{7}} = a + b$ ，其中 a 為正整數， $0 \leq b < 1$ ，求 $\frac{1}{a+b} + \frac{b}{b+1}$ 的值為 _____。

- 20 設 a 為正實數，且 a 的小數部分為 b ，若 $a^2 + b^2 = 5$ ，則 $(a+b)^2 =$ _____。

- 21 若 $a > 4$ ，則 $a + \frac{1}{a-4}$ 的最小值為 _____。

- 22 設 $\triangle ABC$ 是一個面積為 $33.\bar{3}$ 的直角三角形， $\angle B = 90^\circ$ ，點 $D、E$ 分別在 $\overline{AB}、\overline{BC}$ 上且 $\overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 4$ ， $\overline{BE} : \overline{EC} = 3 : 2$ ，試求 $\overline{DE}$ 的最小值為 _____。

- 23 試求 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\pi-1} \times 2^{\pi+1} + (2 - \sqrt{3})^{-\log \pi} \left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\right)^{\log \pi} =$ _____。

- 24 設 $A(3 \times 10^8)、B(6 \times 10^{23})$ 為數線上兩點，若 P 在 $A、B$ 兩點之間且 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ ，將 P 的坐標以科學記號表示為 $p \times 10^n$ ，其中 $1 \leq p < 10$ ， n 是整數，則 p 的整數部份為 _____。

- 25 曾經有一位日本小學的校長製作了一個「0.99 法則」的標語：「每天都只比前一天偷懶 1%，一年後的能力會退步到低於原來的 3%。」(即 $0.99^{365} < 0.03$) 若依「0.99 法則」，假設某人上高中後，每天都只比前一天偷懶 1%，則最快幾個月後，他的能力就會退步到低於剛上高中時的一半？(利用 $10^{-0.3010} \approx 0.5$ ， $10^{-0.004} \approx 0.99$)



26 若 $x = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ ，則 $10^{\log(x^3 - 3x^2 + 9x)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

27 若 A 、 B 為正實數，已知 $\log A = 0.8$ ， $\log B = 1.4$ ，則 AB^2 的整數部份為 位數。

28 根據班佛法則 (Benford's law)：銀行存款金額最高位數字是 n 的比例約為 $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ，那麼銀行存款金額最高位數字不超過 4 的比例約為 成 (四捨五入至個位數)。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/kghs-114a-g10-1

答案一覽

是非題：1=正確、2=錯誤

1	2	3	4	5
2	2	2	1	1

第 6 題 (A)

第 7 題 (C)

第 8 題 (E)

第 9 題 (B)

第 10 題 (D)

第 11 題 (D)(E)

第 12 題 (C)(D)

第 13 題 (A)(B)(E)

第 14 題 3

第 15 題 7

第 16 題 5

第 17 題 2

第 18 題 0

第 19 題 1

第 20 題 6

第 21 題 6

第 22 題 8

第 23 題 5

第 24 題 4

第 25 題 3

第 26 題 9

第 27 題 4

第 28 題 7



對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)

是非 1~5：循環小數、算幾不等式的等號、分數指數與 log 的定義

1. 2 設 $x = 0.\bar{9}$ ，則 $10x = 9.\bar{9}$ ，兩式相減得 $9x = 9$ ， $x = 1$ 。所以 $0.\bar{9} = 1$ ，不是小於 1。答 ×。
也可以從 $\frac{1}{3} = 0.\bar{3}$ 兩邊同乘 3 得到 $1 = 0.\bar{9}$ 。
2. 2 由算幾不等式 $a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$ ，等號要 $a = \frac{1}{a}$ ，也就是 $a = 1$ 才成立。但題目限制 $0 < a < 1$ ，取不到 $a = 1$ ，所以 $a + \frac{1}{a}$ 恆大於 2，2 不是它的最小值（這個範圍內沒有最小值）。答 ×。
用算幾不等式求極值，一定要檢查等號成立的條件在不在題目給的範圍內。
3. 2 $\sqrt[3]{-8} = -2$ 是對的，因為 $(-2)^3 = -8$ 。但分數指數 $a^{\frac{1}{n}}$ 只對底數 $a > 0$ 定義， $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 這個寫法沒有意義，所以中間那個等號不成立。答 ×。
如果允許負數當底數，會出現 $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = 2$ 這種矛盾，所以規定底數要是正數。
4. 1 $8^{\frac{1}{3}} \times 8^{-\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 8^0 = 1$ ，兩數相乘等於 1，互為倒數。(實際上 $8^{\frac{1}{3}} = 2$ ， $8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ 。) 答 ○。
5. 1 $\log 10$ 是「10 的幾次方等於 10」的那個次方，所以 $\log 10 = 1$ ；而 $10^0 = 1$ 。兩邊都是 1。答 ○。

是非題考的都是定義的邊界：等號取不取得到、底數能不能是負數、log 到底在問什麼。

單選 6~10：根式比大小、外分點、絕對值的和、固定比率與位數

6. 三個數都是負數，先有理化分子： $a = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{13})(\sqrt{5} + \sqrt{13})}{\sqrt{5} + \sqrt{13}} = \frac{-8}{\sqrt{5} + \sqrt{13}}$ ，同理 $b = \frac{-8}{\sqrt{6} + \sqrt{14}}$ ， $c = \frac{-8}{\sqrt{7} + \sqrt{15}}$ 。分母 $\sqrt{5} + \sqrt{13} < \sqrt{6} + \sqrt{14} < \sqrt{7} + \sqrt{15}$ ，所以 $\frac{-8}{\sqrt{5} + \sqrt{13}} > \frac{-8}{\sqrt{6} + \sqrt{14}} > \frac{-8}{\sqrt{7} + \sqrt{15}}$ ，加上負號後不等號反向： $a < b < c$ 。選 (A)。
三個數根號裡的差都是 8，才能用同一個分子來比。
7. $\overline{AB} = 7\pi - 3\pi = 4\pi$ 。 P 在線段外且 $\overline{AP} < \overline{BP}$ ，所以 P 在 A 的左邊，這時 $\overline{BP} - \overline{AP} = \overline{AB} = 4\pi$ 。設 $\overline{AP} = t$ ，則 $\overline{BP} = 5t$ ， $5t - t = 4\pi$ ， $t = \pi$ 。 P 的坐標是 $3\pi - \pi = 2\pi$ 。選 (C)。
若 P 在 B 的右邊，會是 $\overline{AP} > \overline{BP}$ ，與 1:5 不合。
8. $|x + 2| + |x - 4|$ 是數線上 x 到 -2 與到 4 的距離和。 x 在 -2 和 4 之間時，距離和固定是 6； x 每往外走 1 單位，距離和增加 2。要距離和不超過 12，可以往外走 $\frac{12-6}{2} = 3$ 單位，所以 $-5 \leq x \leq 7$ 。整數解有 $7 - (-5) + 1 = 13$ 個。選 (E)。



- 9 設每年的排放量是前一年的 r 倍。從 2005 年到 2030 年共 25 年，要 $r^{25} = 1 - 20\% = 0.8$ ，所以 $r = 0.8^{\frac{1}{25}} = 0.8^{0.04} \approx 0.9911$ 。每年是前一年的 99.11%，也就是每年減少 $1 - 0.9911 = 0.0089 = 0.89\%$ 。選 (B)。

不能用 $20\% \div 25 = 0.8\%$ ；每年減少的量是以「前一年」為基準，不是以 2005 年為基準。

- 10 用 $2 \approx 10^{0.3010}$ ： $2^{136279841} \approx 10^{0.3010 \times 136279841} \approx 10^{41020232.1}$ ，介於 $10^{41020232}$ 和 $10^{41020233}$ 之間，是 41020233 位數，約 4.1×10^7 位。2 的次方個位數不是 0，減 1 之後位數不變。需要的張數約為 $\frac{4.1 \times 10^7}{3000} \approx 1.37 \times 10^4$ ，最接近 14000。選 (D)。

題目沒有印 $\log 2$ 的近似值，要自己記得 $\log 2 \approx 0.3010$ 。

「每年依固定比率」「連按幾次」這類題目，先寫成某個數的次方，再用指數律或 10 的次方處理。

多選 11~13：有理數與無理數、指數和的範圍、根號鍵與 log 鍵

- 11 (A) 錯： $b = 0$ 時 $\frac{a}{b}$ 沒有意義。(B) 錯： $b = 0$ 時 $a + bp = a$ 是有理數。(C) 錯：取 $p = \sqrt{2}$ 、 $q = 1 - \sqrt{2}$ ， $p + q = 1$ 是有理數，但 $pq = \sqrt{2} - 2$ 是無理數。(D) 對：移項得 $a - c = (d - b)p$ ；若 $d \neq b$ ，則 $p = \frac{a - c}{d - b}$ 是有理數，矛盾，所以 $b = d$ ，進而 $a = c$ 。(E) 對：任意兩個相異實數之間都有無限多個有理數，也有無限多個無理數。選 (D)(E)。

(A)、(B) 都是「係數可能是 0」的陷阱；題目只說 b 是有理數，沒說 $b \neq 0$ 。

- 12 a 、 b 是正數且 $a + b = 2$ ，所以 $0 < a < 2$ 。令 $t = 3^a$ ，則 $1 < t < 9$ ，而 $3^b = 3^{2-a} = \frac{9}{t}$ ，所求為 $t + \frac{9}{t}$ 。下界：由算幾不等式 $t + \frac{9}{t} \geq 2\sqrt{9} = 6$ ，等號在 $t = 3$ ($a = b = 1$) 時成立。上界： $t + \frac{9}{t} < 10$ 等價於 $t^2 - 10t + 9 < 0$ ，即 $(t - 1)(t - 9) < 0$ ，在 $1 < t < 9$ 時恆成立。所以 $6 \leq 3^a + 3^b < 10$ 。3、4 太小，10 取不到；6 在 $a = b = 1$ 時取到，8 在 $t = 4 + \sqrt{7}$ (介於 1 和 9 之間) 時取到。選 (C)(D)。

條件 $3^a > 1$ 、 $3^b > 1$ 就是 $a > 0$ 、 $b > 0$ 。10 對應 $a = 0$ 或 $b = 0$ ，題目規定是正實數，所以取不到。

- 13 螢幕上的數 $N = 20251141015$ 是 11 位數， $10^{10} \leq N < 10^{11}$ ，所以 $\log N$ 介於 10 和 11 之間；更精確地說 $N \approx 2.03 \times 10^{10} \approx 10^{10.3}$ 。(A) 對： $A = \log N$ ， $10 \leq A < 11$ 。(B) 對： $\sqrt{N} = N^{\frac{1}{2}} \approx 10^{5.15}$ ，所以 $B \approx 5.15$ 。(C) 錯： $C = \log A$ ，而 $10 \leq A < 11$ ，所以 $1 \leq C < 2$ 。(D) 錯：按 m 次根號鍵得到 $N^{\frac{1}{2m}} \approx 10^{\frac{10.3}{2m}}$ ，要小於 10 需要 $2^m > 10.3$ ， m 至少為 4 (按 3 次是 $10^{1.29}$ ，按 4 次是 $10^{0.64}$)。(E) 對：第 1 次顯示 A (介於 10 和 11)、第 2 次顯示 C (介於 1 和 2)，都不在 0 到 1 之間；第 3 次顯示 $\log C$ ，因為 $1 \leq C < 10$ ，所以 $0 \leq \log C < 1$ 。選 (A)(B)(E)。

按一次根號鍵，10 的次方除以 2；按一次 log 鍵，螢幕上變成原來那個數的「10 的次方」。

填充 14~18：循環小數、近似值、絕對值回推係數與數字謎

- 14 $\frac{61}{495} = \frac{122}{990} = \frac{99}{990} + \frac{23}{990} = 0.1 + 0.0\overline{23} = 0.1\overline{23} = 0.1232323\cdots$ 。小數點後第 1 位是 1，從第 2 位起「2、3」循環：偶數位是 2、第 3 位以後的奇數位是 3。2025 是奇數，所以第 2025 位是 3。

循環節不是從第 1 位開始，要先扣掉不循環的那一位再數。



- 15 四捨五入後是 0.36，表示原分數介於 0.355 和 0.365 之間，比 $\frac{1}{2}$ 小，所以分子小於分母。分子與分母的和是 15，逐一試： $\frac{3}{12} = 0.25$ ， $\frac{4}{11} = 0.3636\ldots$ ， $\frac{5}{10} = 0.5$ 。只有 $\frac{4}{11}$ 合乎條件，而且是最簡分數。分子與分母之差為 $11 - 4 = 7$ 。

也可以設分子為 k ，由 $0.355 \leq \frac{k}{15-k} < 0.365$ 解得 $3.92 < k < 4.02$ ，所以 $k = 4$ 。

- 16 方程式化成 $|x - a| = \frac{5-b}{2}$ ，解是數線上與 a 的距離等於 $\frac{5-b}{2}$ 的兩個點， a 是兩解的中點： $a = \frac{1+3}{2} = 2$ 。距離 $\frac{5-b}{2} = 3 - 2 = 1$ ，得 $b = 3$ 。 $a + b = 5$ 。

- 17 解是 $x < -2$ 或 $x > 4$ ，邊界 $x = -2$ 、 $x = 4$ 都滿足 $|ax + 1| = b$ ，所以 $|-2a + 1| = |4a + 1|$ 。若 $-2a + 1 = 4a + 1$ 則 $a = 0$ ，這時不等式與 x 無關，不合；所以 $-2a + 1 = -(4a + 1)$ ，得 $a = -1$ ， $b = |4a + 1| = 3$ 。驗算： $|-x + 1| > 3$ 就是 $|x - 1| > 3$ ，解為 $x < -2$ 或 $x > 4$ 。 $a + b = 2$ 。

$|ax + 1| > b$ 的解以 $x = -\frac{1}{a}$ 為中心；中心是 $\frac{-2+4}{2} = 1$ ，也可以直接得到 $a = -1$ 。

- 18 這裡 $KGHS$ 是四位數、 KS 是二位數，條件是 $(10K + S)^2 = 1000K + 100G + 10H + S$ 。個位數： S^2 的個位數要等於 S ，在 $1 \sim 9$ 中只有 $S = 1, 5, 6$ 。千位數： $K \leq 7$ 時 $(10K + S)^2 < (10K + 10)^2 = 100(K + 1)^2 \leq 1000K$ ，千位數不到 K ； $K = 8$ 時最大是 $86^2 = 7396 < 8000$ ，也不合；所以 $K = 9$ 。逐一算： $91^2 = 8281$ （千位不是 9）、 $95^2 = 9025$ （ $G = 0$ 不合）、 $96^2 = 9216$ （合）。所以 $K = 9, G = 2, H = 1, S = 6$ ，四個數字相異， $K - G - H - S = 9 - 2 - 1 - 6 = 0$ 。

絕對值方程式和不等式的解，在數線上都以某個點為中心左右對稱；先找中心，再找距離。

填充 19~23：整數部分與小數部分、算幾不等式、指數律

- 19 $2 < \sqrt{7} < 3$ ，所以 $1 < 4 - \sqrt{7} < 2$ ，開根號後 $1 < \sqrt{4 - \sqrt{7}} < 2$ ，整數部分 $a = 1$ 。把 $a = 1$ 代入所求： $\frac{1}{1+b} + \frac{b}{b+1} = \frac{1+b}{1+b} = 1$ 。

不必把 b 求出來。若要求， $\sqrt{4 - \sqrt{7}} = \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14} - \sqrt{2}}{2}$ ， $b = \frac{\sqrt{14} - \sqrt{2}}{2} - 1$ 。

- 20 設 a 的整數部分為 n （ n 是非負整數），則 $a = n + b$ ， $0 \leq b < 1$ 。由 $a^2 \leq a^2 + b^2 = 5$ 知 $a < 3$ ，所以 $n \leq 2$ 。 $n = 0$ ： $2b^2 = 5$ ， $b > 1$ ，不合。 $n = 1$ ： $(1+b)^2 + b^2 = 5$ ， $b^2 + b - 2 = 0$ ， $b = 1$ 或 -2 ，不合。 $n = 2$ ： $(2+b)^2 + b^2 = 5$ ， $2b^2 + 4b - 1 = 0$ ， $b = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2} \approx 0.22$ ，合。這時 $a + b = 2 + 2b = \sqrt{6}$ ， $(a + b)^2 = 6$ 。

$n = 1$ 時解出 $b = 1$ ，但小數部分必須小於 1，所以不合。

- 21 $a > 4$ 時 $a - 4 > 0$ 。把式子改寫成 $a + \frac{1}{a-4} = (a-4) + \frac{1}{a-4} + 4$ ，由算幾不等式 $(a-4) + \frac{1}{a-4} \geq 2\sqrt{(a-4) \cdot \frac{1}{a-4}} = 2$ ，所以原式 ≥ 6 。等號在 $a - 4 = \frac{1}{a-4}$ ，即 $a = 5$ 時成立（合於 $a > 4$ ）。最小值為 6。

直接對 a 和 $\frac{1}{a-4}$ 用算幾不等式，乘積不是定值，求不出最小值；要先湊出 $a - 4$ 。



- 22 $33.\bar{3} = \frac{100}{3}$ 。設 $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$, 面積 $\frac{1}{2}xy = \frac{100}{3}$, $xy = \frac{200}{3}$ 。 $\overline{DB} = \frac{4}{5}x$, $\overline{BE} = \frac{3}{5}y$, $\angle B = 90^\circ$, 由畢氏定理 $\overline{DE}^2 = \frac{16}{25}x^2 + \frac{9}{25}y^2$ 。由算幾不等式 $\frac{16}{25}x^2 + \frac{9}{25}y^2 \geq 2\sqrt{\frac{16}{25}x^2 \cdot \frac{9}{25}y^2} = \frac{24}{25}xy = \frac{24}{25} \cdot \frac{200}{3} = 64$ 。等號在 $\frac{4}{5}x = \frac{3}{5}y$ (即 $\overline{DB} = \overline{BE} = 4\sqrt{2}$) 時成立, 所以 $\overline{DE}$ 的最小值為 8。
等號成立時 $x = 5\sqrt{2}$, $y = \frac{20\sqrt{2}}{3}$, 確實滿足 $xy = \frac{200}{3}$ 。

- 23 前項: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\pi-1} = 2^{-(\pi-1)} = 2^{1-\pi}$, 所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\pi-1} \times 2^{\pi+1} = 2^{(1-\pi)+(\pi+1)} = 2^2 = 4$ 。後項: $7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$ 且 $2 - \sqrt{3} > 0$, 所以 $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$, 後項 $= (2 - \sqrt{3})^{-\log \pi} \times (2 - \sqrt{3})^{\log \pi} = (2 - \sqrt{3})^0 = 1$ 。合計 $4 + 1 = 5$ 。

$\log \pi$ 的值不用算, 兩個次方相加剛好是 0。

用算幾不等式求極值的三步: 湊成兩個正數、讓和或積是定值、檢查等號成立的條件取得到。

填充 24~28: 科學記號、指數不等式、立方根求值與 log 的意義

- 24 P 在 A 、 B 之間且 $\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 1$, 由分點公式 P 的坐標 $= \frac{1 \cdot (3 \times 10^8) + 2 \cdot (6 \times 10^{23})}{2 + 1} = 10^8 + 4 \times 10^{23}$ 。 10^8 只有 4×10^{23} 的 $\frac{1}{4 \times 10^{15}}$, 所以 P 的坐標是 $4.0000000000000001 \times 10^{23}$, $n = 23$, p 的整數部分是 4。

P 比較靠近 B , 所以 B 的坐標要乘上比較大的 2。

- 25 n 天後的能力是原來的 0.99^n 倍。要 $0.99^n < 0.5$, 用題目給的近似值改寫成 $(10^{-0.004})^n < 10^{-0.3010}$, 即 $10^{-0.004n} < 10^{-0.3010}$ 。指數愈小、數值愈小, 所以 $-0.004n < -0.3010$, $n > 75.25$, 最少要 76 天。兩個月最多 62 天, 還不到; 三個月至少 89 天, 已經超過 76 天。所以最快 3 個月後。
不等式兩邊同除以負數, 不等號要反向。

- 26 $10^{\log M} = M$, 所以要求的就是 $x^3 - 3x^2 + 9x$ 的值。令 $t = \sqrt[3]{2}$, 則 $t^3 = 2$, $x - 1 = t^2 - t = t(t - 1)$ 。
兩邊三次方: $(x - 1)^3 = t^3(t - 1)^3 = 2(t^3 - 3t^2 + 3t - 1) = 2[1 - 3(t^2 - t)] = 2[1 - 3(x - 1)] = 8 - 6x$ 。左邊展開 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 8 - 6x$, 移項得 $x^3 - 3x^2 + 9x = 9$ 。

另一個做法: $(1 + t)(1 - t + t^2) = 1 + t^3 = 3$, 所以 $x = \frac{3}{1 + t}$, $t = \frac{3}{x} - 1$, 再代入 $t^3 = 2$, 同樣得到 $x^3 - 3x^2 + 9x = 9$ 。

- 27 $A = 10^{0.8}$, $B = 10^{1.4}$, 所以 $AB^2 = 10^{0.8} \times (10^{1.4})^2 = 10^{0.8+2.8} = 10^{3.6}$ 。 $10^3 < 10^{3.6} < 10^4$, AB^2 介於 1000 和 10000 之間, 整數部分是 4 位數。

- 28 最高位數字不超過 4 就是最高位數字為 1、2、3、4, 比例是 $\log 2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \log \frac{5}{4}$ 。由 log 的意義, $10^{\log 2} \times 10^{\log \frac{3}{2}} \times 10^{\log \frac{4}{3}} \times 10^{\log \frac{5}{4}} = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} = 5$, 左邊用指數律合併就是 10 的「四個 log 相加」次方, 所以這四項的和等於 $\log 5$ 。又 $5 = \frac{10}{2} \approx \frac{10^1}{10^{0.3010}} = 10^{0.699}$, $\log 5 \approx 0.699$, 約 69.9%, 四捨五入後是 7 成。

連乘時前一項的分子和後一項的分母會約掉, 只剩 $\frac{5}{1}$ 。



看到 $\log$ 就先換回「10 的幾次方」： $\log A = 0.8$ 是 $A = 10^{0.8}$ ，之後全部用指數律算。



御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自高雄女中 114 學年度上學期高一第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/kghs-114a-g10-1