

宜蘭高中 114 學年度上學期 高二第一次段考

範圍：三角函數（弧度量、三角函數的圖形、和差角與倍角公式、正餘弦的疊合） · 單選題 2 題（10 分）、多選題 3 題（24 分）、填充題 10 題、混合題 1 題組 3 小題（16 分）；流傳版本的填充題印「占 60 分、每題 6 分」，但第壹部分標題印「占 84 分」，兩處相差 10 分，本頁照卷面文字呈現



御藍教育

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/ilsh-114a-g11a-1

第壹部分：選擇（填）題（占 84 分） | 一、單選題（占 10 分） | 說明：第 1 題至第 2 題，每題 5 分。

1 試問 $\sin 1 - \frac{1}{2}$ ， $\cos 2 - \frac{1}{2}$ ， $\tan 3 - \frac{1}{2}$ ， $\cos \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ ， $\sin \frac{\pi}{5} - \frac{1}{2}$ 這五個數值中有幾個正數？

- (1) 0
- (2) 1
- (3) 2
- (4) 3
- (5) 4

2 試問直線 $y = \frac{1}{2}x$ 與 $y = 3 \cos 2x$ 的圖形有幾個交點？

- (1) 4
- (2) 5
- (3) 6
- (4) 7
- (5) 8

二、多選題（占 24 分） | 說明：第 3 題至第 5 題，每題 8 分。（8-5-2-0）

3 已知函數 $f(x) = 3 \sin 2x + 1$ 。則下列選項哪些是正確的？

- (1) $f(0) = 2$
- (2) $f(x)$ 的週期為 π
- (3) $f(x)$ 的最小值為 -2
- (4) $y = f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x = \frac{3\pi}{4}$
- (5) $y = f(x)$ 的圖形經過平移後，可與 $y = \cos 2x$ 的圖形重合



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/ilsh-114a-g11a-1

4 下列哪些函數的週期為 2π ?

(1) $f(x) = \sin x - \cos x$

(2) $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

(3) $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$

(4) $f(x) = 3\sin \frac{x}{2} + 4\cos \frac{x}{2}$

(5) $f(x) = |\sin x + \cos x|$

5 下列何者的值大於 $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

(1) $2\sin 40^\circ \cos 40^\circ$

(2) $2\sin 70^\circ \cos 70^\circ$

(3) $2\cos^2 40^\circ - 1$

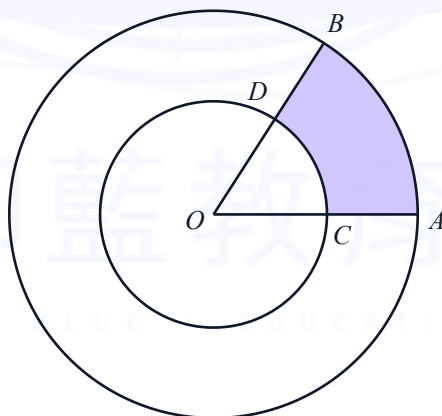
(4) $2\sin^2 40^\circ - 1$

(5) $\frac{2\tan 25^\circ}{1 - \tan^2 25^\circ}$

三、填充題 (占 60 分) | 說明：第 6 題至第 15 題，每題 6 分。(流傳版本此處印「第 7 題至第 16 題」，實際題號為第 6~15 題)

6 試求： $\cos 20^\circ \cos 25^\circ - \cos 65^\circ \cos 70^\circ = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

7 如圖，兩個同心圓的半徑分別是 5 和 9，且 $\widehat{CD}$ 的長度為 5，求塗色部分的面積為何？ $\underline{\hspace{1cm}}$ 。



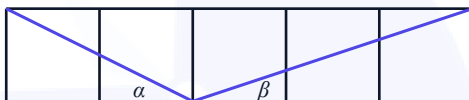
8 在 $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 範圍內，試問：不等式 $-\sqrt{3} \leq \tan x \leq 1$ 的解為 $\underline{\hspace{1cm}}$ 。



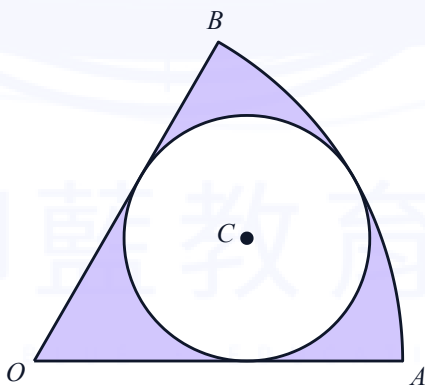
- 9 在 $0 \leq x \leq \pi$ 範圍內，函數 $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x + 9$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，試求數對 (M, m) _____。

- 10 設 $a > 0, b > 0$ 。已知函數 $f(x) = a \cos bx + k$ 的週期為 $\frac{2\pi}{5}$ ，最大值為 3，且 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸其中一個交點為 $(\frac{\pi}{15}, 0)$ ，試求函數 $f(x)$ 的最小值為 _____。

- 11 圖中的圖形由五個相同的正方形所組成，試求： $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} =$ _____。



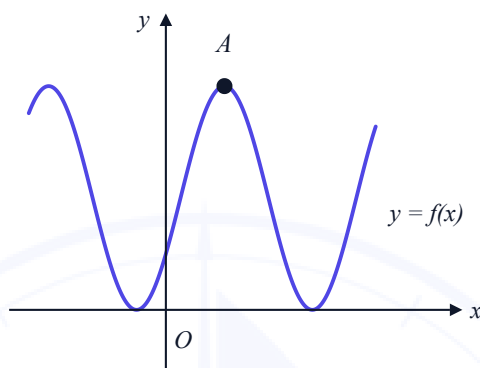
- 12 如圖所示，圓 C 為扇形 AOB 的內切圓，其中扇形 AOB 的圓心角 $\angle AOB = 60^\circ$ 。試求：圖中的「陰影區域面積」與「內切圓 C 面積」的比值 = _____。



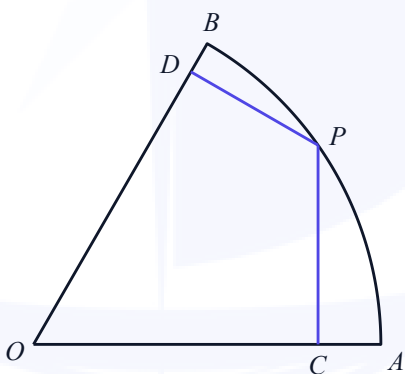
- 13 設 $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ ，且 $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ ， $\cos(\alpha + \beta) = \frac{-4}{5}$ ，試求 $\sin \beta =$ _____。



- 14 給定函數 $f(x) = 3\sin^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) + \cos^2 x + k$ 。若 $y = f(x)$ 的部分圖形如右圖，其中 $A(a, 4)$ 點為其中一個最高點，試求數對 $(a, k) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 15 如圖，已知扇形 AOB 的圓心角為 $\frac{\pi}{3}$ ，半徑為 2， P 為 $\widehat{AB}$ 上的動點， $\overline{PC} \perp \overline{OA}$ 於 C 點， $\overline{PD} \perp \overline{OB}$ 於 D 點，試求：四邊形 $PCOD$ 的最大面積 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



第貳部分：混合題（占 16 分） | 說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

16–18 題組 給定函數 $f(x) = 2\cos x(k\sin x + \cos x) + c$ ，其中 $k > 0$ 。已知 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸相切且通過點 $(\pi, 3)$ ；另一方面，方程式 $f(x) = 4$ 的最小正實根為 α 。試回答下列各小題：



16 試求 $c = ?$ (單選題, 4 分)

- (1) 1
- (2) 2
- (3) 3
- (4) 4
- (5) 5

17 試求 $k = ?$ (非選擇題, 6 分)

18 試求 $\cos 2\alpha = ?$ (非選擇題, 6 分)

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/ilsh-114a-g11a-1

答案一覽

第 1 題 (4)

第 2 題 (4)

第 3 題 (2)(3)(4)

第 4 題 (1)(2)

第 5 題 (1)(5)

第 6 題 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

第 7 題 28

第 8 題 $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

第 9 題 (11, 8)

第 10 題 -9

第 11 題 $\frac{7}{5}$

第 12 題 $\frac{1}{2}$

第 13 題 $\frac{63}{65}$

第 14 題 $(\frac{\pi}{3}, 0)$

第 15 題 $\sqrt{3}$

第 16 題 (1)

第 17 題 $k = \sqrt{3}$

第 18 題 $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/ilsh-114a-g11a-1

單選題 (第 1~2 題)：弧度角估值、用圖形數交點

- 1 答案 (4)。1 弧度約 57.3° ，逐一判斷： $\sin 1 \approx \sin 57.3^\circ > \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ，所以 $\sin 1 - \frac{1}{2} > 0$ 。2 弧度約 114.6° ，在第二象限， $\cos 2 < 0$ ，所以 $\cos 2 - \frac{1}{2} < 0$ 。3 弧度約 171.9° ，在第二象限， $\tan 3 < 0$ ，所以 $\tan 3 - \frac{1}{2} < 0$ 。 $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707 > \frac{1}{2}$ 。 $\sin \frac{\pi}{5} = \sin 36^\circ > \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 。正數有第一、四、五個，共 3 個。

1、2、3 沒有寫度的記號，單位是弧度； $\frac{\pi}{5}$ 弧度是 36° ，比 30° 大一點，正弦值就比 $\frac{1}{2}$ 大一點。

- 2 答案 (4)。 $y = 3 \cos 2x$ 的值介於 -3 與 3 之間，直線 $y = \frac{1}{2}x$ 只有在 $-6 \leq x \leq 6$ 時落在這個範圍內。 $y = 3 \cos 2x$ 的週期是 π ，最高點在 $x = 0, \pm\pi, \pm2\pi$ ，最低點在 $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}$ 。 $x > 0$ (直線在 x 軸上方，只會和曲線在 x 軸上方的部分相交)： $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 這段曲線由 3 降到 0、直線由 0 上升，交 1 點；以 $x = \pi$ 為頂的那一段 ($\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$)，頂點高度 3 大於直線在該處的高度 $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ ，兩側各交 1 點，共 2 點；以 $x = 2\pi$ 為頂的那一段從 $x = \frac{7\pi}{4} \approx 5.50$ 開始，在 $5.50 \leq x \leq 6$ 之間曲線最高只到 $3 \cos 12 \approx 2.53$ ，而直線至少是 $\frac{7\pi}{8} \approx 2.75$ ，沒有交點。所以 $x > 0$ 有 3 個。 $x < 0$ (直線在 x 軸下方，只會和曲線在 x 軸下方的部分相交)：以 $x = -\frac{\pi}{2}$ 為底的那一段，直線高度 $-\frac{\pi}{4} \approx -0.79$ 比底部 -3 高，交 2 點；以 $x = -\frac{3\pi}{2}$ 為底的那一段，直線高度 $-\frac{3\pi}{4} \approx -2.36$ 仍比 -3 高，交 2 點；再往左的下一段從 $x = -\frac{9\pi}{4} \approx -7.07$ 開始，已超出 -6 。所以 $x < 0$ 有 4 個。 $x = 0$ 時直線是 0、曲線是 3，不是交點。合計 $3 + 4 = 7$ 個。

$y = 3 \cos 2x$ 的圖形對稱於 y 軸，直線卻是左低右高，左右兩邊的交點個數不一樣，要分開數。右邊最後一段要確認：12 弧度比 $4\pi \approx 12.57$ 少 0.57 弧度，約 32.4° ， $\cos 12 = \cos 32.4^\circ \approx 0.844$ 。

多選題 (第 3~5 題)：正弦型函數的性質、疊合看週期、倍角公式比大小

- 3 答案 (2)(3)(4)。(1) 錯： $f(0) = 3 \sin 0 + 1 = 1$ 。(2) 對：週期 $= \frac{2\pi}{2} = \pi$ 。(3) 對： $\sin 2x$ 最小為 -1 ， $f(x)$ 的最小值為 $3 \times (-1) + 1 = -2$ 。(4) 對： $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3 \sin \frac{3\pi}{2} + 1 = -2$ ，是最低點；正弦型函數的圖形對稱於通過最高點或最低點的鉛直線。(5) 錯：平移不改變圖形的形狀， $y = f(x)$ 的振幅是 3 (最高 4、最低 -2 ，相差 6)， $y = \cos 2x$ 的振幅是 1 (最高與最低相差 2)，無法重合。

(5) 兩者週期相同，但振幅不同；平移只能移動位置，不能改變高低差。

- 4 答案 (1)(2)。(1) 對： $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ，週期 2π 。(2) 對： $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，週期 2π 。(3) 錯： $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，週期 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 。(4) 錯： $3 \sin \frac{x}{2} + 4 \cos \frac{x}{2} = 5 \sin\left(\frac{x}{2} + \theta\right)$ (其中 $\cos \theta = \frac{3}{5}$ 、 $\sin \theta = \frac{4}{5}$)，週期 $\frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$ 。(5) 錯： $|\sin x + \cos x| = \sqrt{2} \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right|$ ，把 x 軸下方的部分翻上來後每隔 π 就重複，週期是 π 。

同一個角的正弦與餘弦疊合後仍是同一個角的正弦，週期只看 x 的係數；加上絕對值後週期減半。



- 5 答案 (1)(5)。 $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ \approx 0.866$ 。(1) $2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ = \sin 80^\circ$ ，正弦在 0° 到 90° 遞增， $\sin 80^\circ > \sin 60^\circ$ ，對。(2) $2 \sin 70^\circ \cos 70^\circ = \sin 140^\circ = \sin 40^\circ < \sin 60^\circ$ ，錯。(3) $2 \cos^2 40^\circ - 1 = \cos 80^\circ = \sin 10^\circ < \sin 60^\circ$ ，錯。(4) $2 \sin^2 40^\circ - 1 = -(1 - 2 \sin^2 40^\circ) = -\cos 80^\circ < 0$ ，錯。(5) $\frac{2 \tan 25^\circ}{1 - \tan^2 25^\circ} = \tan 50^\circ > \tan 45^\circ = 1 > \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，對。
- (2) 的 $\sin 140^\circ$ 要先換回銳角 $\sin 40^\circ$ 再比；(4) 與二倍角公式 $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$ 差一個負號。

填充題 (第 6~10 題)：和角公式、環形扇形、正切不等式、疊合求極值、餘弦型函數定係數

- 6 用餘角把後兩個換成正弦： $\cos 65^\circ = \sin 25^\circ$ ， $\cos 70^\circ = \sin 20^\circ$ 。原式 $= \cos 20^\circ \cos 25^\circ - \sin 20^\circ \sin 25^\circ = \cos(20^\circ + 25^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。
- $65^\circ + 25^\circ = 90^\circ$ 、 $70^\circ + 20^\circ = 90^\circ$ ，換完剛好是餘弦和角公式的形狀。
- 7 C 、 D 在半徑 5 的小圓上。設圓心角 $\angle COD = \theta$ 徑，弧長 $= 5\theta = 5$ ，所以 $\theta = 1$ 。塗色部分是大扇形 OAB 減去小扇形 OCD ，兩者圓心角都是 1 徑：面積 $= \frac{1}{2} \times 9^2 \times 1 - \frac{1}{2} \times 5^2 \times 1 = \frac{81 - 25}{2} = 28$ 。
- 弧長公式 $s = r\theta$ 與扇形面積公式 $\frac{1}{2}r^2\theta$ 的 θ 都要用弧度。
- 8 $y = \tan x$ 在 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 這一段是遞增的。 $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ ， $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ ，所以 $-\sqrt{3} \leq \tan x \leq 1$ 的解是 $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 。
- 因為遞增，不等號的方向不用改，兩端的等號也都保留。
- 9 疊合： $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ， $f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 9$ 。 $0 \leq x \leq \pi$ 時 $\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$ 。這段角度包含 $\frac{\pi}{2}$ ，正弦最大是 1；最小出現在右端 $\frac{7\pi}{6}$ ，值為 $-\frac{1}{2}$ 。所以 $M = 2 \times 1 + 9 = 11$ ， $m = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 9 = 8$ ， $(M, m) = (11, 8)$ 。
- 角度範圍到不了 $\frac{3\pi}{2}$ ，正弦取不到 -1 ，最小值不是 $9 - 2 = 7$ 。驗算： $f(\pi) = 0 - 1 + 9 = 8$ 。
- 10 $b > 0$ ，週期 $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{5}$ ， $b = 5$ 。 $a > 0$ ，最大值 $a + k = 3$ 。圖形通過 $\left(\frac{\pi}{15}, 0\right)$ ： $a \cos\left(5 \times \frac{\pi}{15}\right) + k = a \cos \frac{\pi}{3} + k = \frac{a}{2} + k = 0$ 。兩式相減得 $\frac{a}{2} = 3$ ， $a = 6$ ， $k = -3$ 。最小值 $= -a + k = -6 - 3 = -9$ 。
 $f(x) = 6 \cos 5x - 3$ 。最大值 3、最小值 -9 ，中間的 $k = -3$ 是兩者的平均。

填充題 (第 11~15 題)：方格圖的正切、扇形內切圓、拆角、降次疊合、面積的最大值

- 11 設正方形邊長為 1。兩條斜線的交點在底邊上，往左 2 格、往上 1 格到左上角，所以 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ；往右 3 格、往上 1 格到右上角，所以 $\tan \beta = \frac{1}{3}$ 。把分子、分母用和差角公式展開，再同除以 $\cos \alpha \cos \beta$ ：
$$\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{1 + \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{7}{5}。$$

也可以直接代值： $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 、 $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 、 $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 、 $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ，分子 $= \frac{7}{\sqrt{50}}$ 、分母 $= \frac{5}{\sqrt{50}}$ ，結果相同。



- 12 設內切圓半徑為 r 、扇形半徑為 R 。圓 C 與 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 都相切，所以 $\overline{OC}$ 平分 $\angle AOB$ ， $\overline{OC}$ 與 $\overline{OA}$ 夾 30° 。從 C 向 $\overline{OA}$ 作垂線（長度 r ），得 $\sin 30^\circ = \frac{r}{\overline{OC}}$ ， $\overline{OC} = 2r$ 。圓 C 又與圓弧內切，切點在 $\overline{OC}$ 的延長線上， $R = \overline{OC} + r = 3r$ 。扇形面積 $= \frac{1}{2}R^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \times 9r^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi r^2}{2}$ ，內切圓面積 $= \pi r^2$ ，陰影面積 $= \frac{3\pi r^2}{2} - \pi r^2 = \frac{\pi r^2}{2}$ 。比值 $= \frac{\pi r^2/2}{\pi r^2} = \frac{1}{2}$ 。
 60° 要換成 $\frac{\pi}{3}$ 弧度才能代扇形面積公式。關鍵是 $R = 3r$ ：圓心到 O 的距離 $2r$ 再加一個半徑。

- 13 α 是銳角， $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$ 。 $0 < \alpha + \beta < \pi$ ，正弦為正， $\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$ 。把 β 寫成 $(\alpha + \beta) - \alpha$ ： $\sin \beta = \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha = \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} - \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{12}{13} = \frac{15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{63}{65}$ 。
 $\cos(\alpha + \beta) < 0$ 表示 $\alpha + \beta$ 是鈍角，但正弦仍是正的；減去一個負的變成加。

- 14 先把平方項降次： $3 \sin^2 x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin^2 x = 1 + (1 - \cos 2x) = 2 - \cos 2x$ 。所以 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x + 2 + k = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + 2 + k = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) + 2 + k$ 。最大值 $= 2 + 2 + k = 4$ ，得 $k = 0$ 。最高點發生在 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ，即 $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$ （ n 為整數）；圖中 A 是 y 軸右側的第一個最高點，取 $n = 0$ ， $a = \frac{\pi}{3}$ 。 $(a, k) = \left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 。
 $k = 0$ 時最小值 $= -2 + 2 = 0$ ，圖形的最低點剛好落在 x 軸上，與附圖一致。 a 要靠圖來決定：圖上 A 與 y 軸之間沒有別的最高點。

- 15 設 $\angle AOP = \theta$ （ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ ），則 $\angle POB = \frac{\pi}{3} - \theta$ ， $\overline{OP} = 2$ 。直角三角形 OCP ： $\overline{OC} = 2 \cos \theta$ ， $\overline{PC} = 2 \sin \theta$ ，面積 $= \frac{1}{2} \times 2 \cos \theta \times 2 \sin \theta = \sin 2\theta$ 。直角三角形 ODP 同理，面積 $= \sin \left(\frac{2\pi}{3} - 2\theta \right)$ 。
 四邊形 $PCOD$ 的面積 $= \sin 2\theta + \sin \left(\frac{2\pi}{3} - 2\theta \right) = \sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{3}{2} \sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) = \sqrt{3} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right)$ 。 $\frac{\pi}{6} \leq 2\theta + \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$ ，包含 $\frac{\pi}{2}$ ，所以當 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 時面積最大，最大值為 $\sqrt{3}$ 。
 用對角線 $\overline{OP}$ 把四邊形切成兩個直角三角形。 $\sin \left(\frac{2\pi}{3} - 2\theta \right)$ 用差角公式展開時， $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ ，負負得正。最大值發生在 P 是弧 AB 的中點時。

混合題（第 16~18 題）：代點、相切條件、解三角方程式

- 16 答案 (1)。圖形通過 $(\pi, 3)$ ，代入： $\cos \pi = -1$ 、 $\sin \pi = 0$ ， $f(\pi) = 2 \times (-1) \times (k \times 0 + (-1)) + c = 2 + c = 3$ ，所以 $c = 1$ 。
 $x = \pi$ 時 $\sin x = 0$ ，含 k 的那一項消失，所以不必先知道 k 。



- 17 展開並用倍角公式： $2 \cos x \cdot k \sin x = k \sin 2x$ ， $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$ ，所以 $f(x) = k \sin 2x + \cos 2x + 1 + c = k \sin 2x + \cos 2x + 2$ 。疊合： $f(x) = \sqrt{k^2 + 1} \sin(2x + \varphi) + 2$ （其中 $\cos \varphi = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}$ 、 $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$ ），值介於 $2 - \sqrt{k^2 + 1}$ 與 $2 + \sqrt{k^2 + 1}$ 之間。圖形與 x 軸相切，表示圖形碰到 x 軸但不穿過，0 必須是最大值或最小值。最大值 $2 + \sqrt{k^2 + 1} > 0$ ，所以是最小值為 0： $2 - \sqrt{k^2 + 1} = 0$ ， $k^2 + 1 = 4$ ， $k^2 = 3$ 。又 $k > 0$ ， $k = \sqrt{3}$ 。

要用到第 16 題的 $c = 1$ 。 $k = -\sqrt{3}$ 也滿足 $k^2 = 3$ ，由題目的 $k > 0$ 捨去。

- 18 $k = \sqrt{3}$ 、 $c = 1$ 時 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x + 2 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) + 2 = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 2$ 。° $f(x) = 4$ 即 $\sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = 1$ ， $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ， $x = \frac{\pi}{6} + n\pi$ （ n 為整數）。最小的正根是 $n = 0$ 時的 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ，所以 $\cos 2\alpha = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ 。

4 恰好是 $f(x)$ 的最大值，所以方程式的根就是所有最高點的 x 坐標。驗算： $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\sqrt{3} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 1 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} + 1 = 4$ 。

看到 $\sin x \cos x$ 、 $\sin^2 x$ 、 $\cos^2 x$ 混在一起，先用倍角公式全部換成 $\sin 2x$ 、 $\cos 2x$ ，再疊合成單一正弦；極值、相切、解方程式都從疊合後的式子讀。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自宜蘭高中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/ilsh-114a-g11a-1