

溪湖高中 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數（弧度量、弧長與扇形面積、三角函數的圖形、和差角與倍角公式、正餘弦的疊合） · 單選題 5 題（25 分）、多選題 4 題（20 分）、填充題 8 題共 9 格（45 分）、靈活題 3 題共 5 格（10 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/hhsh-114a-g11a-1

一、單選題（5 小題，每格 5 分，共 25 分）

1 化簡 $\sin \frac{\pi}{3} \times \cos \frac{2\pi}{3} - \tan \frac{5\pi}{3} \times \cos \pi = ?$

- (A) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$
- (B) $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$
- (C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
- (D) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$
- (E) $-\frac{5\sqrt{3}}{4}$

2 已知扇形的周長等於它所在圓的周長的一半，那麼這個扇形的圓心角為

- (A) $\frac{\pi}{2} + 1$
- (B) $\pi - 1$
- (C) $\frac{3\pi}{2}$
- (D) $\pi - 2$
- (E) $\pi + 1$

3 將函數 $y = \sin x$ 的圖形水平伸縮為 $\frac{1}{2}$ 倍，再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 個單位，所得新圖形的函數為何？

- (A) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$
- (B) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
- (C) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
- (D) $y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$
- (E) $y = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/hhsh-114a-g11a-1

4 下列哪一個數值最接近 2？

- (A) $\cos 46^\circ + \sqrt{3} \sin 46^\circ$
- (B) $\cos 66^\circ + \sqrt{3} \sin 66^\circ$
- (C) $\cos 76^\circ + \sqrt{3} \sin 76^\circ$
- (D) $\cos 86^\circ + \sqrt{3} \sin 86^\circ$
- (E) $\cos 96^\circ + \sqrt{3} \sin 96^\circ$

5 已知 $45^\circ < \theta < 50^\circ$ ，且設 $a = 1 - \cos^2 \theta$ 、 $b = \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta$ 、 $c = \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta + 1}$ 。關於 a 、 b 、 c 三個數值的大小，試選出正確的選項。

- (A) $a < b < c$
- (B) $a < c < b$
- (C) $b < a < c$
- (D) $b < c < a$
- (E) $c < a < b$

二、多選題（4 小題，每格 5 分，錯一個選項得 3 分、錯兩個選項得 1 分、錯三個選項以上不給分，共 20 分）（本頁第 6~9 題依序為原卷多選題第 1~4 題）

6 設 $\beta = -200^\circ$ ，則下列哪些角是 β 的同界角？

- (A) $\frac{2\pi}{9}$ 弧
- (B) $-\frac{2\pi}{9}$ 弧
- (C) $\frac{8\pi}{9}$ 弧
- (D) $\frac{26\pi}{9}$ 弧
- (E) $-\frac{28\pi}{9}$ 弧

7 已知扇形的半徑是 10，周長是 40，則下列哪些選項是正確的？

- (A) 中心角為 30°
- (B) 中心角為 2
- (C) 扇形的面積為 100
- (D) 扇形的面積是 200
- (E) 扇形的弧長是 20



- 8 在坐標平面上，廣義角 θ 的頂點為原點，始邊為 x 軸的正向，且滿足 $\tan \theta = \frac{12}{5}$ 。若 θ 的終邊上有一點 P ，其 y 坐標為 -24 ，請選出正確的選項。
- (A) P 的 x 坐標是 10
 (B) $\overline{OP} = 13$
 (C) $2 \sin \theta + \cos \theta < -2$
 (D) $\sin \frac{\theta}{2} > 0$
 (E) $\cos 2\theta < 0$

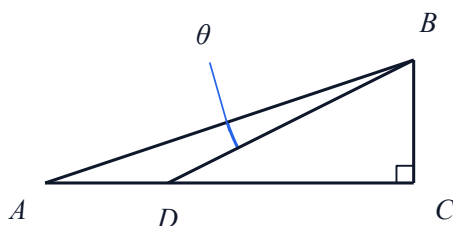
- 9 設 x 為實數，若三個週期函數 $f_1(x) = \cos x + \sqrt{3} \sin x$ ， $f_2(x) = \cos x + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ ， $f_3(x) = \sqrt{3} \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x$ 的週期和振幅分別為 T_1 、 T_2 、 T_3 及 A_1 、 A_2 、 A_3 ，請選出正確的選項
- (A) $T_1 = T_2 = 2\pi$
 (B) $T_3 = \frac{\pi}{2}$
 (C) $A_1 = A_3 = 2A_2$
 (D) $y = f_1(x)$ 、 $y = f_2(x)$ 的函數圖形有相同的最高點
 (E) $y = f_1(x)$ 、 $y = f_3(x)$ 的函數圖形有相同的最低點

三、填充題 (8 小題，每格 5 分，共 45 分) (本頁第 10~18 題依序為原卷填充題的 1、2、3、4(1)、4(2)、5、6、7、8)

- 10 已知 $\sin A = \frac{3}{5}$ ， $\sin B = -\frac{12}{13}$ ，且 A 為第二象限角， B 為第四象限角，求 $\cos(A - B) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

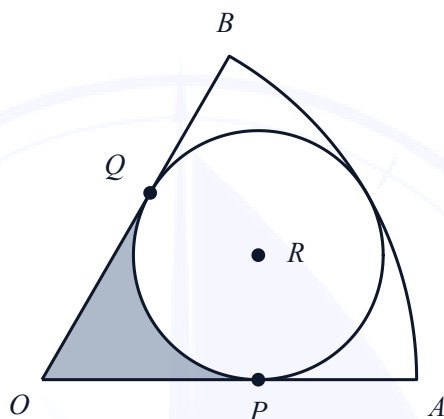
- 11 小龍將 $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 疊合成 $y = a \sin(x + \theta)$ ，已知 $a > 0$ ， $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ，求數對 $(a, \theta) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(θ 用 π 表示)

- 12 如圖，直角三角形 ABC 中，若 $\overline{CD} = 2\overline{BC} = 2\overline{AD}$ ，且 $\angle ABD = \theta$ ，則 $\tan \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



填充第 4 題 如圖，扇形 OAB 的圓心角為 $\frac{\pi}{3}$ 徑，半徑 9，有一圓內切於扇形 OAB ， P 、 Q 分別為與 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 的切點，則

- 13 (1) 劣弧長 $\widehat{PQ} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



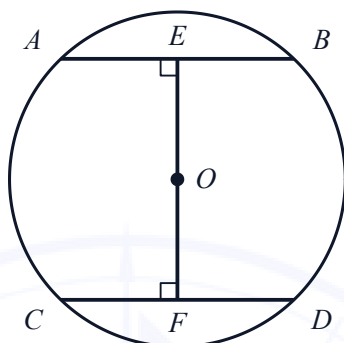
- 14 (2) 鋪色區域面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 15 已知 $y = a \sin(bx)$ 的週期為 $\frac{\pi}{3}$ ，最大值為 5，其中 $a > 0$ 、 $b > 0$ ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

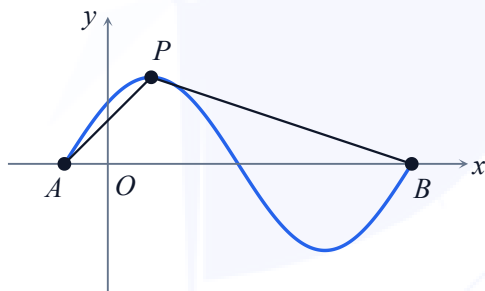
- 16 設 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ， $f(x) = \cos^2 x - 4 \sin x \cos x - 3 \sin^2 x$ 的最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 17 如圖，一圓形花園的半徑為 200，內建步道 $\overline{AB}$ ， $\overline{EF}$ ， $\overline{CD}$ ，其中 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，試求： $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF}$ 總長的最大值為 _____。



- 18 函數 $y = \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \phi\right)$ ($\phi > 0$) 的部分圖形如圖所示，已知 P 為圖形的最高點， A 、 B 為圖形與 x 軸的交點，試問 $\triangle APB$ 的面積為 _____。



四、靈活題 (5 小題，每格 2 分，共 10 分) (本頁第 19~23 題依序為原卷靈活題的 1、2、3(1)、3(2)、3(3))

- 19 已知一圓的圓心為 O ，有三點 A 、 B 、 C 皆在此圓的上半圓上，滿足 $\widehat{AB} = 2\widehat{BC}$ 。若已知 $\triangle OAB$ 面積為 100， $\triangle OBC$ 面積為 80，則 $\triangle OAC$ 面積為 _____。

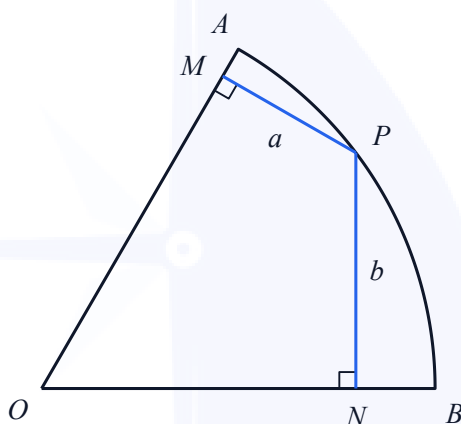
- 20 若角度 θ 滿足 $0 < \theta < \pi$ 且 $\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ 、 $\sin 2\theta$ 、 $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ 依序為等比數列，則 $\theta =$ _____？
(答案請用弧度量回答，且全對才給分)



靈活題第 3 題 如下圖，在扇形 OAB 中， O 為圓心， $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ ， $\angle AOB = 60^\circ$ 。若 P 在 $\widehat{AB}$ 上， P 至 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 之距離各為 a 、 b ，且 P 至 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 之垂足點各為 M 、 N ，試回答下列問題

21 (1) 關於 a 、 b 與 r 的關係式，請選出正確的選項。

- (A) $\frac{r^2}{4} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$
 (B) $\frac{r^2}{4} = \frac{a^2 - ab + b^2}{3}$
 (C) $\frac{r^2}{2} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$
 (D) $\frac{r^2}{2} = \frac{a^2 - ab + b^2}{3}$
 (E) $\frac{r^2}{3} = \frac{a^2 + ab + b^2}{4}$



22 (2) 設 $r = 4$ 、 $\angle MOP = \theta$ ， $0^\circ < \theta < 60^\circ$ ， m 、 n 皆為正實數，若四邊形 $OMPN$ 的面積可表示成 $m \cdot \sin 2\theta + n \cdot \cos 2\theta$ ，則 $m + n$ 的值為 ____。

23 (3) 求四邊形 $OMPN$ 面積的最大值為 ____。



網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/hhsh-114a-g11a-1

答案一覽

第 1 題 (E)

第 2 題 (D)

第 3 題 (C)

第 4 題 (B)

第 5 題 (E)

第 6 題 (C)(D)(E)

第 7 題 (B)(C)(E)

第 8 題 (C)(E)

第 9 題 (A)(C)(D)

第 10 題 $-\frac{56}{65}$

第 11 題 $\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$

第 12 題 $\frac{1}{7}$

第 13 題 2π

第 14 題 $9\sqrt{3} - 3\pi$

第 15 題 (5, 6)

第 16 題 1

第 17 題 $400\sqrt{5}$

第 18 題 2

第 19 題 45

第 20 題 $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$

第 21 題 (A)

第 22 題 $6 + 2\sqrt{3}$

第 23 題 $4\sqrt{3}$



對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)

單選第 1~3 題：特殊角的值、扇形周長、圖形的伸縮平移

- 1 答案 (E)。 $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ； $\frac{2\pi}{3}$ 是第二象限角，參考角 $\frac{\pi}{3}$ ， $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ ； $\frac{5\pi}{3}$ 是第四象限角，參考角 $\frac{\pi}{3}$ ， $\tan \frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}$ ； $\cos \pi = -1$ 。原式 = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - (-\sqrt{3}) \times (-1) = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3} = -\frac{5\sqrt{3}}{4}$ 。

後半 $(-\sqrt{3}) \times (-1) = \sqrt{3}$ ，前面還有一個減號，所以是減去 $\sqrt{3}$ 。

- 2 答案 (D)。設半徑 r 、圓心角 θ (徑)。扇形的周長是兩條半徑加一段弧： $2r + r\theta$ 。圓周長的一半是 πr 。由 $2r + r\theta = \pi r$ ，兩邊同除以 r 得 $\theta = \pi - 2$ 。

扇形的周長要把兩條半徑算進去；只拿弧長等於半圓周會得到 $\theta = \pi$ ，那是半圓，不在選項裡。

- 3 答案 (C)。水平伸縮為 $\frac{1}{2}$ 倍，是把 x 換成 $2x$ ，得 $y = \sin 2x$ 。再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ ，是把 x 換成 $x + \frac{\pi}{6}$ ，得 $y = \sin 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 。

平移是對 x 本身做的， $\frac{\pi}{6}$ 要跟著 x 一起乘以 2；寫成 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 只向左平移了 $\frac{\pi}{12}$ 。

先伸縮再平移時，平移量加在 x 上，再一起被係數乘開。

單選第 4、5 題：疊合後比大小、用基本關係化簡後比大小

- 4 答案 (B)。 $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = 2 \left(\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) = 2 (\sin 30^\circ \cos \theta + \cos 30^\circ \sin \theta) = 2 \sin(\theta + 30^\circ)$ 。五個選項依序是 $2 \sin 76^\circ$ 、 $2 \sin 96^\circ$ 、 $2 \sin 106^\circ$ 、 $2 \sin 116^\circ$ 、 $2 \sin 126^\circ$ 。正弦值在 90° 時最大 (等於 1)，角離 90° 越近、值越接近 2。五個角與 90° 的差依序是 14° 、 6° 、 16° 、 26° 、 36° ，最小的是 96° ，選 (B)。

$2 \sin 96^\circ = 2 \cos 6^\circ \approx 1.989$ ；(A) 是 $2 \sin 76^\circ \approx 1.941$ ，(C) 是 $2 \sin 106^\circ \approx 1.923$ 。

- 5 答案 (E)。 $a = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ 。 $b = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$ 。因為 $\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ ，所以 $c = \tan \theta \cdot \cos^2 \theta = \sin \theta \cos \theta$ 。 $45^\circ < \theta < 50^\circ$ 時 $\sin \theta > \cos \theta > 0$ ，於是 $a - c = \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) > 0$ ，即 $c < a$ ；又 $0 < \cos \theta < 1$ ， $b = \frac{a}{\cos \theta} > a$ 。所以 $c < a < b$ 。

取 $\theta = 48^\circ$ 檢查： $a \approx 0.552$ 、 $b \approx 0.825$ 、 $c \approx 0.497$ 。

比大小之前先把每個式子化成只含 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 的乘除，再用 45° 以上正弦比餘弦大來比。



多選第 1、2 題 (第 6、7 題)：同界角、扇形的弧長與面積

- 6 答案 (C)(D)(E)。 $-200^\circ = -200 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{10\pi}{9}$ 。同界角彼此相差 $2\pi = \frac{18\pi}{9}$ 的整數倍，所以把各選項減去 $-\frac{10\pi}{9}$ ，看是不是 $\frac{18\pi}{9}$ 的整數倍：(A) $\frac{12\pi}{9}$ ，不是；(B) $\frac{8\pi}{9}$ ，不是；(C) $\frac{18\pi}{9}$ ，是；(D) $\frac{36\pi}{9}$ ，是；(E) $-\frac{18\pi}{9}$ ，是。
 $-\frac{10\pi}{9}$ 加一圈得 $\frac{8\pi}{9}$ ，再加一圈得 $\frac{26\pi}{9}$ ，減一圈得 $-\frac{28\pi}{9}$ 。

- 7 答案 (B)(C)(E)。周長 = 兩條半徑 + 弧長，所以弧長 = $40 - 2 \times 10 = 20$ ，(E) 對。圓心角 $\theta = \frac{\text{弧長}}{\text{半徑}} = \frac{20}{10} = 2$ (徑)，(B) 對；2 徑約 114.6° ，不是 30° ，(A) 錯。面積 = $\frac{1}{2} \times \text{半徑} \times \text{弧長} = \frac{1}{2} \times 10 \times 20 = 100$ ，(C) 對、(D) 錯。

選項 (B) 的「中心角為 2」沒有寫單位，就是 2 徑。

扇形三個公式：弧長 $s = r\theta$ 、面積 $\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rs$ 、周長 $2r + s$ ，其中 θ 用徑。

多選第 3 題 (第 8 題)：由正切與終邊上的點判斷

- 8 答案 (C)(E)。 $\tan \theta > 0$ 表示終邊在第一或第三象限；終邊上有 y 坐標為負的點，所以終邊在第三象限。設 $P(x, -24)$ ， $\tan \theta = \frac{-24}{x} = \frac{12}{5}$ ，得 $x = -10$ ，(A) 錯。 $\overline{OP} = \sqrt{(-10)^2 + (-24)^2} = 26$ ，(B) 錯。 $\sin \theta = \frac{-24}{26} = -\frac{12}{13}$ ， $\cos \theta = \frac{-10}{26} = -\frac{5}{13}$ ， $2\sin \theta + \cos \theta = -\frac{29}{13} < -\frac{26}{13} = -2$ ，(C) 對。(E) 對： $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = \frac{50}{169} - 1 = -\frac{119}{169} < 0$ 。(D)：題目只說 θ 是廣義角，沒有限制範圍。若 θ 在 180° 與 270° 之間， $\frac{\theta}{2}$ 在 90° 與 135° 之間， $\sin \frac{\theta}{2} > 0$ ；但 θ 再多轉一圈（在 540° 與 630° 之間）時， $\frac{\theta}{2}$ 在 270° 與 315° 之間， $\sin \frac{\theta}{2} < 0$ 。正負不能確定，所以不選。

選項 (D) 的判斷與 θ 的範圍有關：本頁依題幹「廣義角」、未限制範圍的讀法，不選 (D)；若限定 $0^\circ < \theta < 360^\circ$ ，則 (D) 也成立。本卷來源沒有附答案，此選項以校方答案為準。 $\cos 2\theta$ 與 $2\sin \theta + \cos \theta$ 只跟終邊位置有關，不受影響。

同界角的三角函數值相同，二倍角的值也相同，但半角會差半圈，正負可能相反。



多選第 4 題 (第 9 題)：三個函數各自疊合

- 9 答案 (A)(C)(D)。先把三個函數各自化成單一正弦。 $f_1(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$ 。
 $f_2: \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$ ，所以 $f_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + 1 = \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + 1$ 。 $f_3: 2 \sin x \cos x = \sin 2x$ 、 $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ ，所以 $f_3(x) = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$ 。
於是 $T_1 = T_2 = 2\pi$ 、 $T_3 = \pi$ ； $A_1 = 2$ 、 $A_2 = 1$ 、 $A_3 = 2$ 。(A) 對。(B) 錯， $T_3 = \pi$ 。(C) 對， $A_1 = A_3 = 2 = 2A_2$ 。(D) 對： f_1 的最大值是 2， f_2 的最大值是 $1 + 1 = 2$ ，兩者都在 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ，即 $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ (k 為整數) 時取到，最高點同為 $\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, 2 \right)$ 。(E) 錯： f_1 的最低點在 $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ ， f_3 的最低點在 $2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ，即 $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ ；兩組 x 坐標沒有共同的值，雖然最小值都是 -2，最低點的位置不同。
 f_2 的圖形是 $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$ 向上平移 1，振幅仍是 1，不是 2。選項 (E) 的「相同的最低點」本頁讀作坐標相同的點 (與 (D) 同一種讀法)；若只比最小值，兩者都是 -2。本卷來源沒有附答案，此選項以校方答案為準。

含 $\sin^2 x$ 、 $\cos^2 x$ 、 $\sin x \cos x$ 的式子先用二倍角公式換成 $\sin 2x$ 、 $\cos 2x$ ，再疊合。

填充第 1~3 題 (第 10~12 題)：差角公式、疊合、正切的差角

- 10 A 在第二象限， $\cos A < 0$ ： $\cos A = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$ 。 B 在第四象限， $\cos B > 0$ ： $\cos B = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$ 。 $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B = \left(-\frac{4}{5} \right) \times \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \times \left(-\frac{12}{13} \right) = -\frac{20}{65} - \frac{36}{65} = -\frac{56}{65}$ 。
餘弦的差角公式中間是加號；兩個餘弦值的正負要先由象限決定。
- 11 $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ ，所以 $a = 2$ ， $y = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)$ 。與 $a \sin(x + \theta) = a(\sin x \cos \theta + \cos x \sin \theta)$ 比較，得 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ 、 $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， θ 是第四象限角，在 $0 \leq \theta < 2\pi$ 內 $\theta = \frac{5\pi}{3}$ 。所以 $(a, \theta) = \left(2, \frac{5\pi}{3} \right)$ 。
平常寫成 $2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$ ，但題目要求 $0 \leq \theta < 2\pi$ ， $-\frac{\pi}{3}$ 要換成同界角 $\frac{5\pi}{3}$ 。
- 12 直角在 C 。設 $\overline{BC} = 1$ ，則 $\overline{CD} = 2$ 、 $\overline{AD} = 1$ ， $\overline{AC} = 3$ 。在直角三角形 ABC 中 $\tan \angle ABC = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 3$ ；在直角三角形 DBC 中 $\tan \angle DBC = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} = 2$ 。 $\theta = \angle ABC - \angle DBC$ ，所以 $\tan \theta = \frac{3 - 2}{1 + 3 \times 2} = \frac{1}{7}$ 。
 θ 本身不在任何直角三角形裡，把它看成兩個以 B 為頂點的角相減，就能用正切的差角公式。

要求的角不好直接算時，把它寫成兩個好算的角的和或差。



填充第 4 題 (第 13、14 題)：扇形的內切圓

- 13 設內切圓圓心為 R 、半徑為 t 。圓與 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 都相切，所以 R 在 $\angle AOB$ 的平分線上， $\angle ROP = \frac{\pi}{6}$ ，且 $\overline{RP} \perp \overline{OA}$ ；在直角三角形 ORP 中 $\overline{OR} = \frac{t}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2t$ 。圓又與扇形的弧內切， $\overline{OR} + t = 9$ ，即 $3t = 9, t = 3$ 。四邊形 $OPRQ$ 中 $\angle P = \angle Q = \frac{\pi}{2}$ 、 $\angle O = \frac{\pi}{3}$ ，所以 $\angle PRQ = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ 。劣弧 PQ 的長 $= 3 \times \frac{2\pi}{3} = 2\pi$ 。

與弧內切時，圓心 O 、 R 與切點在同一直線上，所以大圓半徑 $= \overline{OR} +$ 小圓半徑。

- 14 鋪色區域 $=$ 四邊形 $OPRQ$ 的面積 $-$ 扇形 RPQ 的面積。 $\overline{OP} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ ，四邊形 $OPRQ$ 由兩個全等的直角三角形組成，面積 $= 2 \times \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 3 = 9\sqrt{3}$ 。扇形 RPQ 的半徑 3、圓心角 $\frac{2\pi}{3}$ ，面積 $= \frac{1}{2} \times 3^2 \times \frac{2\pi}{3} = 3\pi$ 。所以鋪色區域面積 $= 9\sqrt{3} - 3\pi$ 。

數值約 $15.59 - 9.42 = 6.16$ 。

切點與圓心的連線垂直切線；把鋪色區域看成「四邊形減扇形」。

填充第 5、6 題 (第 15、16 題)：週期與最大值、降次疊合

- 15 $b > 0$ 時週期 $= \frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{3}$ ， $b = 6$ 。 $a > 0$ 時最大值 $= a = 5$ 。所以 $(a, b) = (5, 6)$ 。

- 16 用 $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ 、 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ 、 $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ ： $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{2} - 2 \sin 2x - \frac{3(1 - \cos 2x)}{2} = 2 \cos 2x - 2 \sin 2x - 1$ 。疊合： $2 \cos 2x - 2 \sin 2x = 2\sqrt{2} \left(\cos 2x \cos \frac{\pi}{4} - \sin 2x \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$ 。 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 時 $\frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$ ，餘弦在這段範圍內的最大值出現在左端點 $\frac{\pi}{4}$ ，為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。所以最大值 $= 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 1$ ，此時 $x = 0$ 。
最大值不是 $2\sqrt{2} - 1$ ：那需要 $2x + \frac{\pi}{4} = 0$ 或 2π ，不在範圍內。直接代 $x = 0$ 也得 $f(0) = 1$ 。

有範圍限制時，疊合之後要把角的範圍一起換過去，再看最大值落在端點還是頂點。

填充第 7、8 題 (第 17、18 題)：步道總長、圖形上的三角形面積

- 17 由圖， $\overline{EF}$ 通過圓心 O 且垂直兩弦， E 、 F 是兩弦的中點；等長的弦到圓心的距離相等，所以 $\overline{OE} = \overline{OF}$ 。設 $\angle AOE = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)，則 $\overline{AE} = 200 \sin \theta$ 、 $\overline{OE} = 200 \cos \theta$ ， $\overline{AB} = \overline{CD} = 400 \sin \theta$ ， $\overline{EF} = 400 \cos \theta$ 。總長 $= 800 \sin \theta + 400 \cos \theta = 400(2 \sin \theta + \cos \theta) = 400\sqrt{5} \sin(\theta + \alpha)$ ，其中 $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 、 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ， α 是銳角。取 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (在 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間) 時 $\sin(\theta + \alpha) = 1$ ，總長的最大值為 $400\sqrt{5}$ 。

題幹沒有用文字說明 $\overline{EF}$ 的位置，依附圖的直角記號與圓心 O ，讀作 $\overline{EF}$ 過圓心且垂直 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 。最大值約 894.4，此時 $\tan \theta = 2$ 。



- 18 週期 $= \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ 。由圖，圖形從 A 上升到最高點 P 、下降到最低點、再回到 x 軸上的 B ， A 到 B 剛好是一個週期， $\overline{AB} = 4$ 。振幅是 1， P 到 x 軸的距離是 1。 $\triangle APB$ 的面積 $= \frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2$ 。
 ϕ 只決定圖形左右的位置，不影響 $\overline{AB}$ 的長與 P 的高度，所以不必求出 ϕ 。

$a \sin \theta + b \cos \theta$ 的最大值是 $\sqrt{a^2 + b^2}$ ，但要確認那個角在題目允許的範圍內。

靈活題第 1、2 題 (第 19、20 題)：圓心角成二比一、等比數列

- 19 設半徑為 r 、 $\angle BOC = \alpha$ ；同圓中弧長與圓心角成正比，所以 $\angle AOB = 2\alpha$ 。 $\triangle OAB = \frac{1}{2}r^2 \sin 2\alpha = 100$ ， $\triangle OBC = \frac{1}{2}r^2 \sin \alpha = 80$ 。兩式相除： $\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha = \frac{100}{80}$ ， $\cos \alpha = \frac{5}{8}$ 。 A 、 B 、 C 依序在上半圓上， $\angle AOC = 3\alpha$ 。用和角公式 $\sin 3\alpha = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$ ，兩邊同乘 $\frac{1}{2}r^2$ ：
 $\triangle OAC = 100 \cos \alpha + 80 \cos 2\alpha$ 。 $\cos 2\alpha = 2 \times \frac{25}{64} - 1 = -\frac{7}{32}$ ，所以 $\triangle OAC = 100 \times \frac{5}{8} + 80 \times \left(-\frac{7}{32}\right) = 62.5 - 17.5 = 45$ 。

本頁依「 B 在 A 、 C 之間」的讀法 ($\angle AOC = 3\alpha$)。 $\cos \alpha = \frac{5}{8}$ 時 $\alpha \approx 51.3^\circ$ ， $3\alpha \approx 154^\circ$ ，三點確實能都在上半圓上。若讀成 C 是弧 AB 的中點，則 $\angle AOC = \alpha$ ，面積會是 80；本卷來源沒有附答案，以校方答案為準。

- 20 等比數列的中間項平方等於前後兩項的乘積： $\sin^2 2\theta = \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ 。用和差角公式，
 $\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\theta + \sin 2\theta)$ 、 $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\theta - \sin 2\theta)$ ，乘積 $= \frac{1}{2}(\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta)$ 。於是 $2 \sin^2 2\theta = \cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta$ ， $3 \sin^2 2\theta = \cos^2 2\theta$ ， $\tan^2 2\theta = \frac{1}{3}$ ， $\tan 2\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ 。 $0 < 2\theta < 2\pi$ ，所以 $2\theta = \frac{\pi}{6}$ 、 $\frac{5\pi}{6}$ 、 $\frac{7\pi}{6}$ 、 $\frac{11\pi}{6}$ ，即 $\theta = \frac{\pi}{12}$ 、 $\frac{5\pi}{12}$ 、 $\frac{7\pi}{12}$ 、 $\frac{11\pi}{12}$ 。這四個角的 $\sin 2\theta = \pm \frac{1}{2}$ 都不是 0，三項皆不為 0，確實成等比數列。

原卷作答說明印作「全隊才給分」，應為「全對才給分」：四個解要全部寫出。以 $\theta = \frac{\pi}{12}$ 檢查：三項約為 0.966、0.5、0.259，公比約 0.518。

3α 拆成 $2\alpha + \alpha$ ；解三角方程式時先把 2θ 的範圍寫出來，再把範圍內的解找齊。

靈活題第 3 題 (第 21~23 題)：扇形內兩條垂線段

- 21 答案 (A)。設 $\angle MOP = \theta$ ，則 $\angle NOP = 60^\circ - \theta$ 。在直角三角形 OMP 、 ONP 中，斜邊都是 $\overline{OP} = r$ ，所以 $a = r \sin \theta$ ， $b = r \sin(60^\circ - \theta) = r \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right)$ 。計算： $b^2 = r^2 \left(\frac{3}{4} \cos^2 \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right)$ ， $ab = r^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right)$ 。相加： $a^2 + ab + b^2 = r^2 \left(\sin^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta + \frac{3}{4} \cos^2 \theta \right) = \frac{3}{4} r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \frac{3}{4} r^2$ 。所以 $\frac{r^2}{4} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$ 。

也可以用餘弦定理：四邊形 $OMPN$ 有兩個直角， $\angle MPN = 120^\circ$ ， $\overline{MN}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ = a^2 + ab + b^2$ ；而 O 、 M 、 P 、 N 在以 $\overline{OP}$ 為直徑的圓上，由正弦定理 $\overline{MN} = r \sin 60^\circ$ ，同樣得到 $a^2 + ab + b^2 = \frac{3}{4} r^2$ 。



22 $r = 4$ 。四邊形 $OMPN$ 由直角三角形 OMP 與 ONP 組成。 $\triangle OMP = \frac{1}{2} \times 4 \cos \theta \times 4 \sin \theta = 4 \sin 2\theta$ ； $\triangle ONP = \frac{1}{2} \times 4 \cos(60^\circ - \theta) \times 4 \sin(60^\circ - \theta) = 4 \sin(120^\circ - 2\theta) = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) = 2\sqrt{3} \cos 2\theta + 2 \sin 2\theta$ 。面積 $= 6 \sin 2\theta + 2\sqrt{3} \cos 2\theta$ ，所以 $m = 6$ 、 $n = 2\sqrt{3}$ ， $m + n = 6 + 2\sqrt{3}$ 。

$\sin(120^\circ - 2\theta)$ 用差角公式展開時， $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ ，負負得正， $\sin 2\theta$ 的係數是 $+\frac{1}{2}$ 。

23 面積 $= 6 \sin 2\theta + 2\sqrt{3} \cos 2\theta$ 。 $\sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ ，疊合得面積 $= 4\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) = 4\sqrt{3} \sin(2\theta + 30^\circ)$ 。 $0^\circ < \theta < 60^\circ$ 時 $30^\circ < 2\theta + 30^\circ < 150^\circ$ ，可以取到 90° （此時 $\theta = 30^\circ$ ），所以最大值為 $4\sqrt{3}$ 。

$\theta = 30^\circ$ 時 P 是弧 AB 的中點，圖形左右對稱， $a = b = 2$ 。

把長度與面積都寫成 θ 的三角函數，用二倍角公式整理成 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ 後再疊合。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自溪湖高中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/hhsh-114a-g11a-1