

新竹女中 114 學年度上學期 高三第一次段考



御藍教育

範圍：極限與函數（數列的極限、無窮等比級數、奇函數與反函數、函數的極限與連續、三次函數圖形與一次近似；另含常用對數、正弦定理、平面向量的複習題） · 單選題 3 題（18 分）、多重選擇題 4 題（32 分）、填充題 8 格（40 分）、混合題 1 題組 2 小題（10 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/hgsh-114a-g12jia-1

一、單選題（每題 6 分，共 18 分）

1 下表為截至 2025 年，部分城市人口數的統計表，

城市	巴黎	瀋陽	新加坡	雪梨	奧克蘭
人口數	7100000	7974270	6157270	5300000	1700000

試問上表中人口數最多的城市，其人口

數與下列何者最接近？（已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 7 \approx 0.8451$ ）

- (1) $10^{6.7}$
- (2) $10^{6.8}$
- (3) $10^{6.9}$
- (4) $10^{7.8}$
- (5) $10^{7.9}$

2 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n \times 5^n}{n(t-3)^n + n \times 5^{n+1} - 5^n} = \frac{4}{5}$ ，其中 t 為實數，則所有滿足此式之 t 為下列哪個範圍？

- (1) $(-2, 0) \cup (0, 2)$
- (2) $(-2, 2)$
- (3) $(-2, 8)$
- (4) $(2, 8)$
- (5) $(8, \infty)$

御藍教育

ROYAL BLUE • EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/hgsh-114a-g12jia-1

- 3 每個循環小數的循環部分都可視為一個收斂的無窮等比級數，因此循環小數均可化成分數，也就是有理數。試問循環小數 $0.0\overline{18}$ 與下列何者相等？

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{18}{100}\right)^k$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{18}{100^{k+1}}$

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{18}{10^k}$

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{18}{10^{2k}}$

(5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{18}{10^{2k+1}}$

二、多重選擇題（每題 8 分，錯 1 個選項扣 2 分，扣完為止，整題沒作答不給分，共 32 分）

- 4 已知有一實係數多項式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ ，請依據各條件選出正確的選項。

- (1) 若 $b = 0$ ，則 $y = f(x)$ 的圖形必對稱於原點 $(0, 0)$
(2) 若 $a < 6$ 且 $b = 5$ ，則 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸只有一個交點
(3) 若 $a > 6$ 且 $b = 5$ ，則 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸有三個交點。
(4) 若考慮多項式 $g(x) = f(x) - 4$ ，且其圖形對稱軸為點 $(2, 0)$ ，則 $y = g(x)$ 在 $x = 2$ 附近的一次近似為 $y = -2x - 4$
(5) 承 (4) 的條件，則滿足 $g(x) \geq 0$ 之最小的整數解為 1

- 5 試選出正確的選項。

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = 1$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = 1$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[x]}{x} = 1$ ($[]$ 表高斯符號)

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x} = 1$ ($[]$ 表高斯符號)

- 6 下列哪些函數是奇函數？

(1) $f(x) = x^3 + x$

(2) $f(x) = 5^x - 5^{-x}$

(3) $f(x) = \sin^2 x$

(4) $f(x) = \sin x + \cos x$

(5) $f(x) = \log(\sqrt{x^2 + 1} - x)$



- 7 設 $f(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 7x + k$ ，其中 k 為實數，已知 α, β, γ 是方程式 $f(x) = 0$ 的三個正實根，且 $\alpha < \beta < \gamma$ 。若 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}$ 存在，則下列選項哪些是正確的？
- (1) $k = 7$
- (2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = -29$
- (3) $0 < \alpha < 1$
- (4) $1 < \beta < 2$
- (5) 無窮數列 $\langle \alpha^n \rangle$ 、 $\langle \beta^n \rangle$ 、 $\langle \gamma^n \rangle$ 都是發散數列

三、填充題（每格 5 分，共 40 分）

- 8 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A = 60^\circ$ ， D 在 $\overline{AC}$ 上，且滿足 $\overline{AD} : \overline{CD} = 1 : 4$ 。若 $\triangle ABD$ 的外接圓直徑為 2，則 $\overline{AB} + \overline{AC}$ 的最大值為 _____。

- 9 求值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{3n-1} - \frac{2n^2-1}{6n-1} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 10 求值 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 3^{k+1}}{5^k} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 11 已知對任意正整數 n ，不等式 $b_n + \frac{8n+1}{n} \leq a_n \leq 5b_n$ 恆成立，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 10$ ，求值 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 12 若 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{a\sqrt{x+5}-3}{x-4} = b$ ，其中 a, b 皆為實數，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 13 設 $f(x) = 3 \cdot 2^{x+1} + 5$ ，若函數 $g(x)$ 滿足 $g(f(x)) = f(g(x)) = x$ ，則 $g(29) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

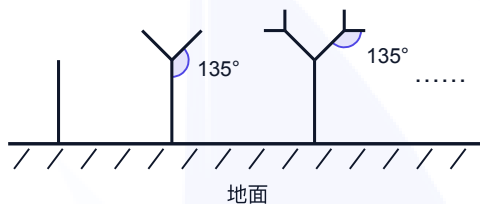


14

已知 a, b 為實數，若函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax - 6}{x - 1}, & x \neq 1 \\ b, & x = 1 \end{cases}$ 為一連續函數，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15

下圖為一個「成長樹」的示意圖，第一層樹幹是一條與地面垂直的線段，其長度為 1 公尺；第二層樹幹會在第一層線段的前端長出兩條與該線段成 135° 角的線段，長度為前一層線段長度的一半；第三層照著第二層的方法在每一條樹枝線段的前端長出兩條樹枝線段，以此類推，重複前面的方法成長至第 n 層。設此成長樹第 n 層的最高點到地面的垂直距離為此成長樹的高度 h_n 公尺，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



四、混合題（共 10 分） 16-17 題為題組

混合題（第 16~17 題） 小明利用假日到附近的沂風公園健走，已知入口處位於公園的坐標地圖上 A 點，小明自 A 點出發沿著方向 $\vec{u} = (1, 3)$ 前進 $4\sqrt{10}$ 個單位長後，抵達位於 B 點的觀霧瀑布步道稍作休息，再從 B 點沿著方向 $\vec{v} = (2, -1)$ 前進 $k|\vec{v}|$ 個單位長後到達 C 點的吉利步道，其中 $k > 0$ ，試回答下列問題。

16 試問 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的正射影長為下列何者？（單選題，4 分）

- (1) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- (2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- (3) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$
- (4) $\frac{\sqrt{10}}{5}$
- (5) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

17 設小明自 C 點朝向 A 點前進的途中會經過 D 點，已知 $\overline{AD} : \overline{DC} = 2 : 1$ ，且 $1 \leq k \leq 5$ ，試求 $|\overrightarrow{BD}|$ 的最小值及此時的 k 值。（非選擇題，6 分）





御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/hgsh-114a-g12jia-1

答案一覽

第 1 題 (3)

第 2 題 (3)

第 3 題 (5)

第 4 題 (3)(5)

第 5 題 (3)(5)

第 6 題 (1)(2)(5)

第 7 題 (2)(3)

第 8 題 $2\sqrt{31}$

第 9 題 $\frac{1}{18}$

第 10 題 $-\frac{23}{6}$

第 11 題 2

第 12 題 $\left(1, \frac{1}{6}\right)$

第 13 題 2

第 14 題 (5, 7)

第 15 題 $\frac{4 + \sqrt{2}}{3}$

第 16 題 (3)

第 17 題 最小值 $\frac{14}{3}$ ，此時 $k = 1$

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。（不用註冊）
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit（可以先把姓名、座號遮掉）



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/hgsh-114a-g12jia-1

單選 1~3：對數估算、指數型數列的極限、循環小數

- 1 答案 (3)。表中最大的是瀋陽的 7974270，約 7.97×10^6 。用題目給的對數值找它夾在哪兩個數之間：
 $\log 8 = 3 \log 2 \approx 0.9030$ ，所以 $8 \times 10^6 \approx 10^{6.9030}$ ； $\log 7 \approx 0.8451$ ，所以 $7 \times 10^6 \approx 10^{6.8451}$ 。7974270 介於 7×10^6 與 8×10^6 之間，而且只比 8×10^6 少 25730，所以它的對數略小於 6.9030，最接近的是 $10^{6.9}$ 。確認一下： $\log 7.5 = \log 3 + \log 10 - 2 \log 2 \approx 0.4771 + 1 - 0.6020 = 0.8751 < 0.9$ ，所以 $7.5 \times 10^6 < 10^{6.9} < 8 \times 10^6$ ， $10^{6.9}$ 與 7974270 相差不到 48 萬；而 $10^{6.8} < 10^{6.8451} \approx 7 \times 10^6$ ，與 7974270 相差超過 97 萬；(4)、(5) 都超過 10^7 ，差得更遠。

先比出誰最大：7974270 > 7100000，最多的是瀋陽，不是排在表格最前面的巴黎。七位數的對數首數是 6，所以 (4)、(5) 可以先排除。

- 2 答案 (3)。分子分母同除以 $n \times 5^n$ ：原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\left(\frac{t-3}{5}\right)^n + 5 - \frac{1}{n}}$ 。其中 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ 。令 $r = \frac{t-3}{5}$ ：若 $|r| < 1$ ，則 $r^n \rightarrow 0$ ，分母趨近 5，極限為 $\frac{4}{5}$ ，符合。若 $r = 1$ ($t = 8$)，分母趨近 6，極限為 $\frac{2}{3}$ ，不合。若 $r = -1$ ($t = -2$)， r^n 在 1、-1 之間跳動，極限不存在，不合。若 $|r| > 1$ ， $|r^n|$ 愈來愈大，分式趨近 0，不合。所以條件是 $\left|\frac{t-3}{5}\right| < 1$ ，即 $-5 < t-3 < 5$ ， $-2 < t < 8$ 。

底數是 $t-3$ 不是 t ，要解的是 $|t-3| < 5$ 。兩個端點都不行： $t = 8$ 時極限存在但等於 $\frac{2}{3}$ ， $t = -2$ 時極限不存在。
 $t = 3$ 時 $(t-3)^n = 0$ ，極限仍是 $\frac{4}{5}$ ，不必排除。

- 3 答案 (5)。 $0.0\overline{18} = 0.0181818\cdots = 0.018 + 0.00018 + 0.0000018 + \cdots = \frac{18}{10^3} + \frac{18}{10^5} + \frac{18}{10^7} + \cdots$ ，第 k 項是 $\frac{18}{10^{2k+1}}$ ，就是 (5)。其餘選項寫出前幾項比較：(1) $0.18 + 0.0324 + \cdots$ ，公比是 $\frac{18}{100}$ ，不是循環小數的寫法；(2) $\frac{18}{100^2} + \frac{18}{100^3} + \cdots = 0.0018 + 0.000018 + \cdots = 0.00\overline{18}$ ；(3) $1.8 + 0.18 + 0.018 + \cdots = 2$ ；(4) $0.18 + 0.0018 + \cdots = 0.1\overline{8}$ 。

(5) 的和為 $\frac{\frac{18}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{18}{990} = \frac{1}{55}$ 。小數點後先有一個不循環的 0，所以首項是 $\frac{18}{10^3}$ ，不是 $\frac{18}{10^2}$ ；(4) 少了這個 0。

指數型的極限先同除以底數最大的項，再看剩下的公比是否落在 -1 與 1 之間，端點要個別檢查。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



多選 4~7：三次函數的圖形、極限是否存在、奇函數、由極限求係數

- 4 答案 (3)(5)。 (1) $b = 0$ 時 $f(x) = x^3 + ax^2$, $f(-x) = -x^3 + ax^2$, 要等於 $-f(x) = -x^3 - ax^2$ 必須 $a = 0$; 例如 $a = 1$ 時 $f(1) = 2$ 、 $f(-1) = 0$, 不對稱於原點, 錯。 (2)、(3) $b = 5$ 時 $f(x) = x(x^2 + ax + 5)$, $x = 0$ 是一個根, 其餘看 $x^2 + ax + 5 = 0$, 判別式為 $a^2 - 20$ 。 (2) 取 $a = 5$ (符合 $a < 6$), 判別式 $5 > 0$, 有兩個相異實根且都不是 0 (兩根乘積為 5), 圖形與 x 軸有三個交點, 錯。 (3) $a > 6$ 時 $a^2 - 20 > 16 > 0$, 兩個相異實根且都不是 0, 加上 $x = 0$ 共三個交點, 對。 (4) 把 $g(x)$ 改寫成 $x - 2$ 的式子。對稱中心為 $(2, 0)$ 表示 $g(x) = (x - 2)^3 + p(x - 2)$ (沒有 $(x - 2)^2$ 項與常數項)。展開得 $x^3 - 6x^2 + (12 + p)x - (8 + 2p)$, 與 $g(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$ 比較: $a = -6$, $8 + 2p = 4$ 得 $p = -2$, $b = 12 + p = 10$ 。所以 $g(x) = (x - 2)^3 - 2(x - 2)$ 。 x 在 2 附近時 $(x - 2)^3$ 很小可以略去, 一次近似為 $y = -2(x - 2) = -2x + 4$, 不是 $-2x - 4$, 錯。 (5) $g(x) = (x - 2)[(x - 2)^2 - 2] = (x - 2)(x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})$, 三個根由小到大的為 $2 - \sqrt{2}$ 、 2 、 $2 + \sqrt{2}$ 。首項係數為正, $g(x) \geq 0$ 的解為 $2 - \sqrt{2} \leq x \leq 2$ 或 $x \geq 2 + \sqrt{2}$ 。 $2 - \sqrt{2} \approx 0.59$, 所以最小的整數解是 1 ($g(1) = 1 \geq 0$, $g(0) = -4 < 0$), 對。

選項 (4) 原卷印作「其圖形對稱軸為點 $(2, 0)$ 」, 本頁照原卷轉錄; 三次函數的圖形是點對稱圖形, 這裡指對稱中心為 $(2, 0)$ 。 (4) 也可以用導數驗算: $g(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 4$, $g'(x) = 3x^2 - 12x + 10$, $g'(2) = -2$, 一次近似 $y = g(2) + g'(2)(x - 2) = -2x + 4$ 。 (2) 要「只有一個交點」的條件是 $a^2 < 20$, $a < 6$ 不夠。本卷來源無參考答案; (4) 的常數項以卷面印的 -4 判讀, 正式答案以校方公布為準。

- 5 答案 (3)(5)。 (1) $x \rightarrow 1$ 時分子趨近 2、分母趨近 0, $x > 1$ 時函數值愈來愈大, $x < 1$ 時是絕對值愈來愈大的負數, 極限不存在, 錯。 (2) $x > 0$ 時 $\frac{|x|}{x} = 1$, $x < 0$ 時 $\frac{|x|}{x} = -1$, 右極限 1、左極限 -1 不相等, 極限不存在, 錯。 (3) 因為 $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$, 所以 $-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$; $x \rightarrow 0$ 時兩邊都趨近 0, 由夾擠定理極限為 0, 對。 (4) $1 < x < 2$ 時 $[x] = 1$, 右極限為 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$; $0 < x < 1$ 時 $[x] = 0$, 左極限為 0。左右不相等, 極限不存在, 錯。 (5) $x - 1 < [x] \leq x$, $x > 0$ 時同除以 x 得 $1 - \frac{1}{x} < \frac{[x]}{x} \leq 1$; $x \rightarrow \infty$ 時左邊趨近 1, 由夾擠定理極限為 1, 對。

(3) 的 $\sin \frac{1}{x}$ 本身在 $x \rightarrow 0$ 時沒有極限, 不能寫成「0 乘以某個極限」, 要用夾擠定理。 (4) 代入 $x = 1$ 的函數值是 1, 但極限看的是 1 的兩側, 左側 $[x] = 0$ 。

- 6 答案 (1)(2)(5)。奇函數要對定義域內每個 x 都有 $f(-x) = -f(x)$ 。 (1) $f(-x) = -x^3 - x = -f(x)$, 是。 (2) $f(-x) = 5^{-x} - 5^x = -f(x)$, 是。 (3) $f(-x) = \sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x)$, 是偶函數; 而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$, 不是奇函數。 (4) $f(-x) = -\sin x + \cos x$, $-f(x) = -\sin x - \cos x$; 取 $x = 0$, $f(0) = 1 \neq 0$, 不是。 (5) $\sqrt{x^2 + 1} > |x| \geq x$, 真數恆為正, 定義域是全體實數。 $f(-x) = \log(\sqrt{x^2 + 1} + x)$, 而 $(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x) = (x^2 + 1) - x^2 = 1$, 所以 $f(-x) = \log \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = -f(x)$, 是。

定義域含 0 的奇函數一定有 $f(0) = 0$, (4) 用這一點就能排除。 (5) 的關鍵是兩個真數互為倒數。



- 7 答案 (2)(3)。 $x \rightarrow -1$ 時分母趨近 0，極限要存在，分子也要趨近 0： $f(-1) = 1 + 6 + 7 - 7 + k = 7 + k = 0$ ，所以 $k = -7$ ，(1) 錯。此時 $f(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 7x - 7 = (x+1)(x^3 - 7x^2 + 14x - 7)$ ，極限 $= \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 7x^2 + 14x - 7) = -1 - 7 - 14 - 7 = -29$ ，(2) 對。令 $q(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 7$ ， $f(x) = 0$ 的根是 -1 與 $q(x) = 0$ 的三個根，所以 α, β, γ 是 $q(x) = 0$ 的三個根。代值： $q(0) = -7$ ， $q(1) = 1$ ， $q(2) = 1$ ， $q(3) = -1$ ， $q(4) = 1$ 。由勘根定理， $(0, 1)$ 、 $(2, 3)$ 、 $(3, 4)$ 內各有一個根；三次方程式最多三個根，所以 $0 < \alpha < 1$ ， $2 < \beta < 3$ ， $3 < \gamma < 4$ 。(3) 對，(4) 錯。(5) $0 < \alpha < 1$ ， $\langle \alpha^n \rangle$ 收斂到 0；只有 $\langle \beta^n \rangle$ 、 $\langle \gamma^n \rangle$ 發散，錯。

$q(1)$ 與 $q(2)$ 同號，不能說 1 與 2 之間有根；三個根的位置已經由另外三個區間確定，所以 $(1, 2)$ 內沒有根。 k 的正負號要代 $x = -1$ 仔細算：奇次項 $-6x^3$ 與 $7x$ 代入後分別是 $+6$ 與 -7 。

分母趨近 0 而極限存在，分子一定也趨近 0；含絕對值或高斯符號的極限，左右兩側分開看。

填充 8~11：正弦定理與疊合、數列的極限、無窮等比級數、夾擠定理

- 8 在 $\triangle ABD$ 中用正弦定理，外接圓直徑 $2R = 2$ ： $\overline{AB} = 2 \sin \angle ADB$ ， $\overline{AD} = 2 \sin \angle ABD$ 。設 $\angle ABD = \theta$ ，因為 $\angle A = 60^\circ$ ，所以 $\angle ADB = 120^\circ - \theta$ ， $0^\circ < \theta < 120^\circ$ 。 D 在 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{AD} : \overline{CD} = 1 : 4$ ，所以 $\overline{AC} = 5 \overline{AD} = 10 \sin \theta$ 。於是 $\overline{AB} + \overline{AC} = 2 \sin(120^\circ - \theta) + 10 \sin \theta = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \right) + 10 \sin \theta = 11 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ 。由疊合， $11 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = \sqrt{124} \sin(\theta + \varphi) \leq \sqrt{124} = 2\sqrt{31}$ ，其中 $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{11}$ ($\varphi \approx 8.9^\circ$)。等號在 $\theta = 90^\circ - \varphi \approx 81.1^\circ$ 時成立，落在 $0^\circ < \theta < 120^\circ$ 內，所以最大值為 $2\sqrt{31}$ 。
外接圓是 $\triangle ABD$ 的，不是 $\triangle ABC$ 的，所以用的邊是 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AD}$ ，再用 $\overline{AC} = 5 \overline{AD}$ 換回來。疊合求最大值後要檢查那個角度取得到。
- 9 兩項各自發散，先通分。分母為 $(3n-1)(6n-1) = 18n^2 - 9n + 1$ ；分子 $n^2(6n-1) - (2n^2-1)(3n-1) = (6n^3 - n^2) - (6n^3 - 2n^2 - 3n + 1) = n^2 + 3n - 1$ 。原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 1}{18n^2 - 9n + 1}$ ，分子分母同除以 n^2 ，得 $\frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{18 - \frac{9}{n} + \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{1}{18}$ 。
兩項都大約是 $\frac{n}{3}$ ，但不能因此說相減是 0；差在次一級的項，要通分才看得出來。
- 10 拆成兩個無窮等比級數： $\frac{2^k - 3^{k+1}}{5^k} = \left(\frac{2}{5}\right)^k - 3 \left(\frac{3}{5}\right)^k$ ，兩個公比 $\frac{2}{5}$ 、 $\frac{3}{5}$ 的絕對值都小於 1，都收斂。 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{2}{3}$ ， $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k = \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{3}{2}$ 。所以原式 $= \frac{2}{3} - 3 \times \frac{3}{2} = \frac{2}{3} - \frac{9}{2} = -\frac{23}{6}$ 。
 $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k$ ，要把多出來的 3 提出來。 k 從 1 開始，首項是 $\frac{2}{5}$ 與 $\frac{3}{5}$ ，不是 1。
- 11 把 b_n 夾在兩個跟 a_n 有關的式子中間。由右邊 $a_n \leq 5b_n$ 得 $b_n \geq \frac{a_n}{5}$ ；由左邊 $b_n + \frac{8n+1}{n} \leq a_n$ 得 $b_n \leq a_n - \frac{8n+1}{n} = a_n - 8 - \frac{1}{n}$ 。所以 $\frac{a_n}{5} \leq b_n \leq a_n - 8 - \frac{1}{n}$ 。 $n \rightarrow \infty$ 時，左邊趨近 $\frac{10}{5} = 2$ ，右邊趨近 $10 - 8 - 0 = 2$ 。由夾擠定理， $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ 。
題目沒有先說 $\langle b_n \rangle$ 收斂，所以不能直接對不等式兩邊取極限；要先把 b_n 單獨夾在中間，由夾擠定理同時得到「收斂」與「極限值」。



兩個各自發散的式子相減，先通分成一個分式再取極限；要求的數列夾在兩個極限相同的數列之間，就用夾擠定理。

填充 12~15：函數的極限、反函數、連續、成長樹

- 12 $x \rightarrow 4$ 時分母趨近 0，極限要存在，分子也要趨近 0： $a\sqrt{9} - 3 = 3a - 3 = 0$ ， $a = 1$ 。此時分子分母同乘以 $\sqrt{x+5} + 3$ ： $\frac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4} = \frac{(x+5) - 9}{(x-4)(\sqrt{x+5} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x+5} + 3}$ ($x \neq 4$)， $x \rightarrow 4$ 時趨近 $\frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$ 。所以 $(a, b) = \left(1, \frac{1}{6}\right)$ 。

若 $a \neq 1$ ，分子趨近不為 0 的數而分母趨近 0，極限不存在。有理化時分子是 $(x+5) - 9 = x - 4$ ，剛好與分母約掉。

- 13 $g(f(x)) = f(g(x)) = x$ 表示 g 是 f 的反函數。設 $g(29) = c$ ，則 $f(c) = f(g(29)) = 29$ 。解 $3 \cdot 2^{c+1} + 5 = 29$ ： $2^{c+1} = 8 = 2^3$ ， $c + 1 = 3$ ， $c = 2$ 。所以 $g(29) = 2$ 。

不必先求出 $g(x)$ 的式子；求反函數在某個數的值，就是問「 f 把哪個數送到它」。驗算： $f(2) = 3 \cdot 2^3 + 5 = 29$ 。

- 14 $x \neq 1$ 時 $f(x)$ 是分母不為 0 的分式，本來就連續，只要看 $x = 1$ ：需要 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = b$ 。 $x \rightarrow 1$ 時分母趨近 0，極限要存在，分子也要趨近 0： $1 + a - 6 = 0$ ， $a = 5$ 。此時 $\frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+6)}{x-1} = x + 6$ ($x \neq 1$)，極限為 7，所以 $b = 7$ 。 $(a, b) = (5, 7)$ 。

連續要三件事： $f(1)$ 有定義、極限存在、兩者相等。先由「極限存在」定出 a ，再由「相等」定出 b 。

- 15 第 k 層的線段長是 $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ 。新長出的線段與前一層線段成 135° 角，也就是方向比前一層向左或向右偏 45° 。第一層鉛直；第二層與鉛直方向夾 45° ；第三層偏回來可以是鉛直（夾 0° ）或水平（夾 90° ）；一般來說，奇數層與鉛直方向的夾角是 0° 、 90° 、 180° 之一，偶數層是 45° 或 135° 。長 ℓ 的線段與鉛直方向夾 ϕ 時，高度增加 $\ell \cos \phi$ ，所以奇數層最多增加 ℓ （鉛直向上），偶數層最多增加 $\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$ （斜 45° 向上）。沿著「鉛直、斜 45° 、鉛直、斜 45° 、...」這條路走，每一層都取到最大的增加量，所以它的頂端就是最高點。於是 $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{4 + \sqrt{2}}{3}$ 。

驗算前幾項： $h_1 = 1$ ， $h_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 1.354$ ， $h_3 = h_2 + \frac{1}{4} \approx 1.604$ ，與圖相符。不是每一層都增加「長度乘以 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 」：奇數層可以轉回鉛直方向，整段長度都算進高度，所以要把奇數層與偶數層分成兩個公比 $\frac{1}{4}$ 的等比級數。「成 135° 角」依原卷附圖，是樹枝與前一層線段在分岔點的夾角。

圖形一層一層長下去的題目，先寫出前三層各增加多少，找出規律後再分成無窮等比級數。



混合題 16~17：向量的正射影與分點公式

- 16 答案 (3)。 $|\vec{u}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ ，沿 $\vec{u}$ 的方向前進 $4\sqrt{10}$ 就是走了 $4\vec{u} : \vec{AB} = (4, 12)$ ， $\vec{BA} = (-4, -12)$ 。同理 $\vec{BC} = k\vec{v} = (2k, -k)$ ， $k > 0$ ，與 $\vec{v}$ 同方向。 $\vec{BA}$ 在 $\vec{BC}$ 上的正射影長 = $\frac{|\vec{BA} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{|(-4)(2) + (-12)(-1)|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 。

正射影長只跟 $\vec{BC}$ 的方向有關，跟 k 的大小無關，所以直接用 $\vec{v}$ 算。用的是 $\vec{BA}$ (從 B 指向 A)，不是 $\vec{AB}$ ；這題取絕對值後兩者長度相同，但方向相反。

- 17 D 在 $\vec{AC}$ 上且 $\vec{AD} : \vec{DC} = 2 : 1$ ，由分點公式 $\vec{BD} = \frac{1}{3}\vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{BC} = \frac{1}{3}(-4, -12) + \frac{2}{3}(2k, -k) = \left(\frac{4k-4}{3}, -\frac{2k+12}{3}\right)$ 。所以 $|\vec{BD}|^2 = \frac{(4k-4)^2 + (2k+12)^2}{9} = \frac{20k^2 + 16k + 160}{9}$ 。分子配方： $20k^2 + 16k + 160 = 20\left(k + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{784}{5}$ ，頂點在 $k = -\frac{2}{5}$ ，不在 $1 \leq k \leq 5$ 內；在這個範圍內 k 愈大值愈大，所以最小值發生在 $k = 1$ 。 $k = 1$ 時 $|\vec{BD}|^2 = \frac{20 + 16 + 160}{9} = \frac{196}{9}$ ， $|\vec{BD}| = \frac{14}{3}$ 。答：最小值為 $\frac{14}{3}$ ，此時 $k = 1$ 。

D 離 C 比較近，所以 $\vec{BC}$ 的係數是 $\frac{2}{3}$ 、 $\vec{BA}$ 的係數是 $\frac{1}{3}$ ，不要放反。二次函數的頂點不在範圍內時，最小值在端點，不能直接用頂點的值。驗算： $k = 1$ 時 $\vec{BD} = \left(0, -\frac{14}{3}\right)$ 。

沿某方向前進的距離先換成向量的倍數；有範圍限制的二次函數，先看頂點在不在範圍內。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自新竹女中 114 學年度上學期高三第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/hgsh-114a-g12jia-1