

新竹女中 114 學年度上學期 高一第一次段考



御藍教育

範圍：數與式（實數、絕對值、指數、常用對數、算幾不等式） · 單選題 2 題、多選題 3 題、填充題 9 題、
偵錯說明題 4 題（流傳版本未標配分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/hgsh-114a-g10-1

一、單選題（說明：第 1 題至第 2 題。）

1 試選出 $1.\bar{4} \times 3$ 的值。

- (1) $4.\bar{2}$
- (2) $4.\bar{3}$
- (3) $4.\bar{4}$
- (4) $4.\bar{5}$
- (5) $4.\bar{6}$

2 設實數 b 滿足 $(\log 1000)(\log b) + 3 \log 100 + \log b = 0$ ，試問下列哪一選項正確？

- (1) $0 < b \leq \frac{1}{50}$
- (2) $\frac{1}{50} < b \leq \frac{1}{40}$
- (3) $\frac{1}{40} < b \leq \frac{1}{30}$
- (4) $\frac{1}{30} < b \leq \frac{1}{20}$
- (5) $\frac{1}{20} < b \leq \frac{1}{10}$

二、多選題（說明：第 3 題至第 5 題。）

3 已知 $a = 18$ ， $b = 20$ ， $c = 6\sqrt{10}$ 和 d ，且 d 為無理數，將這四個數標記在數線上，即 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $C(c)$ 、 $D(d)$ 。試選出正確的選項。

- (1) 若 $a + b + c + d$ 為無理數，則點 C 與點 D 的距離為無理數
- (2) 若 $abcd$ 為無理數，則點 C 與點 D 的距離為有理數
- (3) 點 B 與 D 的距離可能為 3
- (4) 點 A 和點 B 的中點位在點 C 的右邊
- (5) 數線上和點 A 的距離小於 5，但與點 C 的距離大於 3 的整數點有 3 個



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/hgsh-114a-g10-1

4 已知 x 為實數且滿足 $3^x + 3^{-x} = 4$ ，試選出正確的選項。

(1) $(\sqrt{3})^x + (\sqrt{3})^{-x} = \sqrt{6}$

(2) $3^x - 3^{-x} = 2\sqrt{3}$

(3) $9^x + 9^{-x} = 16$

(4) $9^x - 9^{-x} = \pm 8\sqrt{3}$

(5) $27^x + 27^{-x} = 52$

5 已知 a 與 b 均為實數且 $a < b$ ，試選出正確的選項。

(1) $\frac{2a+3b}{5}$ 是絕對值方程式 $2|x-a| - 3|x-b| = 0$ 的解

(2) 絕對值方程式 $2|x-a| - 3|x-b| = 0$ 的解為 $\frac{2a+3b}{5}$

(3) 若 $x = \frac{7a-2b}{5}$ ，則 $a = \frac{2b+5x}{7}$

(4) 若 A, B, P 為數線上三點，座標分別為 $a, b, \frac{7a-2b}{5}$ ，則 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 7$

(5) 若 A, B, P 為數線上三點，座標分別為 a, b, x ，若 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 7$ ，且點 P 不在 $\overline{AB}$ 上，則 $x = \frac{7a-2b}{5}$

三、填充題（說明：第 6 題至第 14 題。）

6 已知 $(1 - 2\sqrt{3})^3 = x + y\sqrt{3}$ ，其中 x, y 均為有理數，則數對 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7 求 $\left(6\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{16}{81}\right)^{-0.25} + \sqrt[3]{5^{\frac{9}{2}} \times \sqrt{5^{-3}}}$ 的值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

8 介在 $\sqrt{4+\sqrt{3}}$ 與 $\frac{11}{\sqrt{13-4\sqrt{3}}}$ 之間的整數共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 個。

9 若絕對值不等式 $3 \leq |x-a| < 4$ 的解為 $-3 < x \leq -2$ 或 $b \leq x < c$ ，則序對 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10 設 $a > 0$ 為實數，已知 $a^{\frac{3}{2}x} = 8$ ，試估算 a^{50x} 是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 位數。



- 11 承第 10 題，將 a^{50x} 表成 $a^{50x} = b \times 10^n$ ，其中 $1 \leq b < 10$ ， n 為整數。若 $k \leq b < k+1$ ， k 為正整數，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 12 絕對值不等式 $2|x-4| + x < 10$ 的解為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 13 某機構在 12 點時將兩種不同的營養劑分別投入培養皿甲與培養皿乙中，此時甲、乙益菌數量分別為 X ， Y 。已知甲的數量每小時成長為原來的 A 倍，乙的數量每小時成長為原來的 B 倍，測量所得結果部分記錄如下：12 點時甲、乙的數量分別為 X 、 Y ；15 點時甲的數量為 $2X$ ；14 點時乙的數量為 $2Y$ ；16 點時乙的數量為 $4Y$ 。該機構在 18 點時測量發現甲、乙的數量相同。若在 19 點時，乙的數量為甲的 2^k 倍，則實數 k 為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 14 數線上有四點 $A(10)$ ， $B(30)$ ， $C(-10)$ ， $D(x)$ ，其中 x 為實數。已知線段 $\overline{AD}$ ， $\overline{BD}$ ， $\overline{CD}$ 長度大小關係為 $\overline{AD} < \overline{BD} < \overline{CD}$ ，則 x 的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

四、偵錯說明題（說明：第 15 題至第 18 題。）

- 15 愛好數學社的社長小軒找了一道有趣的題目，想與社員小彥和小聖分享，題目如下：設 $a > 0$ ， $b > 0$ ，且 a 與 b 都是整數，滿足 $ab = 4$ 。試求 $a + 2b$ 的最小值，且此時 a 與 b 的值分別為何？以下是小彥的解法：因為 a 與 b 都是正整數，滿足 $ab = 4$ ，符合上述情況有 3 種，並將此 3 種情況逐一算出 $a + 2b$ 之值，結果如下： $(a, b) = (1, 4)$ 時 $a + 2b = 9$ ； $(a, b) = (2, 2)$ 時 $a + 2b = 6$ ； $(a, b) = (4, 1)$ 時 $a + 2b = 6$ 。故當 $a = 2$ 、 $b = 2$ 與 $a = 4$ 、 $b = 1$ 這兩種情況時， $a + 2b$ 有最小值 6。試問：你覺得小彥的解法正確嗎？若你覺得正確請勾選「正確」；若你覺得不正確，請勾選「不正確」。



- 16 承第 15 題，若將題目中「 a 與 b 都是整數」的條件刪除，即題目如下：設 $a > 0, b > 0$ ，滿足 $ab = 4$ 。試求： $a + 2b$ 的最小值，且此時 a 與 b 的值分別為何？試問：你覺得小彥的解法在這裡適用嗎？若你覺得適用，請勾選「適用」；若你覺得不適用，請勾選「不適用」，並提供一個正確的解法，求出問題的答案。

- 17 承第 15 題，若將題目中「 a 與 b 都是整數」的條件換成「 a 與 b 都是有理數」的條件， $a + 2b$ 的最小值會改變嗎？小聖說：「會改變。」以下為小聖的解法：因為 $a > 0, b > 0$ ，由算幾不等式 $\frac{a+2b}{2} \geq \sqrt{a(2b)} = \sqrt{2ab}$ ，又 $ab = 4$ ，故可推得 $\frac{a+2b}{2} \geq 2\sqrt{2}$ ，即 $a + 2b$ 有最小值 $4\sqrt{2}$ 。試問：你覺得小聖的解法在這道題目中適用嗎？若你覺得適用，請勾選「適用」；若你覺得不適用，請勾選「不適用」，並說明不適用的理由。

- 18 承第 17 題，小彥說：「因為整數也是有理數，所以，若 a 與 b 都是有理數時， $a + 2b$ 的最小值為 6。」試問：你覺得小彥的說法正確嗎？若你覺得正確請勾選「正確」；若你覺得不正確，請勾選「不正確」。並說明不正確的理由。



網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/hgsh-114a-g10-1

答案一覽

- 第 1 題 (2)
第 2 題 (3)
第 3 題 (4)(5)
第 4 題 (1)(4)(5)
第 5 題 (1)(3)(4)(5)
第 6 題 (37, -30)
第 7 題 9
第 8 題 2
第 9 題 (1, 4, 5)
第 10 題 31
第 11 題 1
第 12 題 $-2 < x < 6$
第 13 題 $\frac{1}{6}$
第 14 題 $10 < x < 20$
第 15 題 正確
第 16 題 不適用；最小值 $4\sqrt{2}$ ，此時 $a = 2\sqrt{2}$ 、 $b = \sqrt{2}$
第 17 題 不適用 (等號成立需 $b = \sqrt{2}$ ，不是有理數)
第 18 題 不正確 (例： $a = \frac{8}{3}$ 、 $b = \frac{3}{2}$ 時 $a + 2b = \frac{17}{3} < 6$)

單選題：循環小數與對數方程式

- 1 $1.\bar{4} = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}$ ，乘以 3 得 $\frac{13}{3} = 4\frac{1}{3} = 4.\bar{3}$ 。答案 (2)。
直接把 $0.444\cdots$ 乘 3 得 $1.333\cdots$ ，再加 3，結果相同，可用來驗算。
- 2 $\log 1000 = 3$ 、 $\log 100 = 2$ ，方程式變成 $3\log b + 6 + \log b = 0$ ， $\log b = -\frac{3}{2}$ ， $b = 10^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{10\sqrt{10}}$ 。
 $10\sqrt{10} = \sqrt{1000}$ ，而 $30^2 = 900 < 1000 < 1600 = 40^2$ ，所以 $30 < 10\sqrt{10} < 40$ ，得 $\frac{1}{40} < b < \frac{1}{30}$ 。答案 (3)。
比較 b 和分數大小，改成比較分母 $\sqrt{1000}$ 與整數的平方，不必查表。



多選題：有理數與無理數、指數乘法公式、內外分點

- 3 答案 (4)(5)。(1) 錯：取 $d = 6\sqrt{10} + 1$ ，則 $a + b + c + d = 39 + 12\sqrt{10}$ 是無理數，但 $\overline{CD} = 1$ 是有理數。(2) 錯：取 $d = \sqrt{2}$ ， $abcd = 2160\sqrt{20} = 4320\sqrt{5}$ 是無理數，但 $\overline{CD} = 6\sqrt{10} - \sqrt{2}$ 是無理數。(3) 錯： $\overline{BD} = 3$ 表示 $d = 17$ 或 23 ，都是有理數，與 d 為無理數矛盾。(4) 對： A 、 B 的中點是 $19 = \sqrt{361}$ ，而 $c = \sqrt{360} < 19$ ，中點在 C 右邊。(5) 對： $|x - 18| < 5$ 得 $13 < x < 23$ ； $|x - 6\sqrt{10}| > 3$ 得 $x < 6\sqrt{10} - 3$ 或 $x > 6\sqrt{10} + 3$ ，其中 $6\sqrt{10} \approx 18.97$ ，即 $x < 15.97 \dots$ 或 $x > 21.97 \dots$ 。整數有 $14, 15, 22$ ，共 3 個。

「若...則...」的敘述要判錯，舉一個符合條件但結論不成立的例子就夠。

- 4 答案 (1)(4)(5)。(1) 對： $((\sqrt{3})^x + (\sqrt{3})^{-x})^2 = 3^x + 2 + 3^{-x} = 6$ ，而左邊括號內為正，所以等於 $\sqrt{6}$ 。(2) 錯： $(3^x - 3^{-x})^2 = (3^x + 3^{-x})^2 - 4 = 12$ ，所以 $3^x - 3^{-x} = \pm 2\sqrt{3}$ ， x 可正可負，不一定是 $2\sqrt{3}$ 。(3) 錯： $9^x + 9^{-x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2 = 14$ 。(4) 對： $9^x - 9^{-x} = (3^x + 3^{-x})(3^x - 3^{-x}) = 4 \times (\pm 2\sqrt{3}) = \pm 8\sqrt{3}$ 。(5) 對： $27^x + 27^{-x} = (3^x + 3^{-x})^3 - 3(3^x + 3^{-x}) = 64 - 12 = 52$ 。
由 $3^x + 3^{-x} = 4$ 可解出 $3^x = 2 \pm \sqrt{3}$ ，代回 (2)(5) 得到相同結果，可當驗算。

- 5 答案 (1)(3)(4)(5)。(1) 對： $x = \frac{2a+3b}{5}$ 時 $x - a = \frac{3(b-a)}{5}$ 、 $x - b = -\frac{2(b-a)}{5}$ ， $2 \cdot \frac{3(b-a)}{5} - 3 \cdot \frac{2(b-a)}{5} = 0$ 。(2) 錯：方程式即 $|x - a| : |x - b| = 3 : 2$ ，除了內分點 $\frac{2a+3b}{5}$ ，還有在 B 右邊的外分點 $x = 3b - 2a$ (代入： $2 \cdot 3(b-a) - 3 \cdot 2(b-a) = 0$)，解有兩個。(3) 對： $5x = 7a - 2b$ ，移項得 $7a = 2b + 5x$ 。(4) 對： $P = \frac{7a-2b}{5}$ ， $\overline{AP} = |\frac{2a-2b}{5}| = \frac{2(b-a)}{5}$ ， $\overline{BP} = |\frac{7a-7b}{5}| = \frac{7(b-a)}{5}$ ，比為 $2 : 7$ 。(5) 對： P 不在 $\overline{AB}$ 上且離 A 較近，所以 P 在 A 的左邊， $a - x = \frac{2}{5}(b - a)$ ，得 $x = \frac{7a-2b}{5}$ 。

「距離比為定值」的點在數線上有兩個：一個內分點、一個外分點。

填充 6~11：根式、指數律、估值與位數

- 6 用 $(p - q)^3 = p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3$ ， $p = 1$ 、 $q = 2\sqrt{3}$ ： $1 - 6\sqrt{3} + 3 \cdot 12 - 24\sqrt{3} = 37 - 30\sqrt{3}$ 。因 x, y 為有理數、 $\sqrt{3}$ 為無理數，比較得 $(x, y) = (37, -30)$ 。
驗算： $(1 - 2\sqrt{3})^2 = 13 - 4\sqrt{3}$ ，再乘 $(1 - 2\sqrt{3})$ 得 $13 - 26\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 24 = 37 - 30\sqrt{3}$ 。
- 7 $(\frac{25}{4})^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$ ； $(\frac{16}{81})^{-\frac{1}{4}} = (\frac{81}{16})^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$ ； $5^{\frac{9}{2}} \times 5^{-\frac{3}{2}} = 5^3$ ，開立方得 5。合計 $\frac{5}{2} + \frac{3}{2} + 5 = 9$ 。
- 8 $13 - 4\sqrt{3} = 13 - 2\sqrt{12} = (\sqrt{12} - 1)^2$ ，所以 $\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{12} - 1 = 2\sqrt{3} - 1$ ， $\frac{11}{2\sqrt{3}-1} = \frac{11(2\sqrt{3}+1)}{12-1} = 2\sqrt{3} + 1 \approx 4.46$ 。另一端 $4 + \sqrt{3} \approx 5.73$ ，介於 4 和 9 之間，所以 $2 < \sqrt{4 + \sqrt{3}} < 3$ 。兩數之間的整數是 3, 4，共 2 個。
 $2\sqrt{3} + 1$ 介於 4 和 5 (因 $3 < 2\sqrt{3} < 4$)，所以整數 4 要算進去。
- 9 $3 \leq |x - a| < 4$ 的解是 $a - 4 < x \leq a - 3$ 或 $a + 3 \leq x < a + 4$ 。對照 $-3 < x \leq -2$ ： $a - 4 = -3$ 、 $a - 3 = -2$ ，得 $a = 1$ 。所以 $b = a + 3 = 4$ 、 $c = a + 4 = 5$ ， $(a, b, c) = (1, 4, 5)$ 。
- 10 $a^{\frac{3}{2}x} = 8$ ，兩邊 $\frac{2}{3}$ 次方： $a^x = 8^{\frac{2}{3}} = 4$ 。 $a^{50x} = 4^{50} = 2^{100}$ ， $\log 2^{100} = 100 \log 2 \approx 30.10$ ，所以 $10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$ ，是 31 位數。
- 11 $2^{100} = 10^{30.10\dots} = 10^{0.10\dots} \times 10^{30}$ ， $b = 10^{0.10\dots}$ 。因 $0 < 0.10\dots < \log 2 \approx 0.3010$ ，所以 $1 < b < 2$ ， $k = 1$ 。

首位數字看 $\log$ 值的小數部分落在哪兩個 $\log k$ 之間。



填充 12~14：絕對值不等式、指數成長、數線上的距離

- 12 $x \geq 4$ 時： $2(x-4) + x < 10$ ， $x < 6$ ，得 $4 \leq x < 6$ 。 $x < 4$ 時： $2(4-x) + x < 10$ ， $x > -2$ ，得 $-2 < x < 4$ 。合併得 $-2 < x < 6$ 。

兩段的解要各自和該段的範圍取交集，再聯集起來。

- 13 甲 3 小時變 2 倍： $A^3 = 2$ ， $A = 2^{\frac{1}{3}}$ 。乙 2 小時變 2 倍： $B^2 = 2$ ， $B = 2^{\frac{1}{2}}$ （16 點 4Y 也吻合）。18 點時甲為 $XA^6 = 4X$ 、乙為 $YB^6 = 8Y$ ，相等得 $X = 2Y$ 。19 點時，乙 ÷ 甲 = $\frac{8Y \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{4X \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \frac{8Y}{8Y} \cdot 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}}$ ，所以 $k = \frac{1}{6}$ 。

另一種看法：18 點兩者相等，之後每小時乙多乘 $B \div A = 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}}$ ，一小時後比值就是 $2^{\frac{1}{6}}$ 。

- 14 $\overline{AD} < \overline{BD}$ 即 $|x-10| < |x-30|$ ， D 離 10 比離 30 近，在中點 20 左邊： $x < 20$ 。 $\overline{BD} < \overline{CD}$ 即 $|x-30| < |x+10|$ ， D 在 30 與 -10 的中點 10 右邊： $x > 10$ 。答案 $10 < x < 20$ 。

流傳版本題幹印作「線段上有四點」，依題意應為「數線上有四點」，本頁已修正。

偵錯說明 15~18：算幾不等式的等號與條件

- 15 答案「正確」。 a, b 為正整數且 $ab = 4$ ，只有 $(1, 4), (2, 2), (4, 1)$ 三組，逐一代入 $a + 2b$ 得 9, 6, 6，最小值 6，發生在 $(a, b) = (2, 2)$ 或 $(4, 1)$ 。情況有限時逐一列舉是完整的解法。

- 16 答案「不適用」。沒有整數限制時 a, b 有無限多組，無法逐一列舉。正確解法：由算幾不等式 $\frac{a+2b}{2} \geq \sqrt{a \cdot 2b} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ，得 $a + 2b \geq 4\sqrt{2}$ ；等號成立於 $a = 2b$ ，配合 $ab = 4$ 得 $2b^2 = 4$ ， $b = \sqrt{2}$ 、 $a = 2\sqrt{2}$ 。所以最小值 $4\sqrt{2}$ ，此時 $a = 2\sqrt{2}$ 、 $b = \sqrt{2}$ 。

$4\sqrt{2} \approx 5.66 < 6$ ，驗證了整數時的 6 不是這裡的最小值。

- 17 答案「不適用」。算幾不等式只說明 $a + 2b \geq 4\sqrt{2}$ ，要成為最小值還必須等號做得到。等號成立需 $a = 2b$ ，配合 $ab = 4$ 得 $b = \sqrt{2}$ ，不是有理數，所以在有理數範圍內等號做不到， $4\sqrt{2}$ 不是 $a + 2b$ 的值，不能說最小值是 $4\sqrt{2}$ 。

有理數 b 可以任意接近 $\sqrt{2}$ ，使 $a + 2b$ 任意接近 $4\sqrt{2}$ 但永遠大於它，所以在有理數範圍內 $a + 2b$ 沒有最小值。

- 18 答案「不正確」。整數是有理數的一部分，在較大的範圍裡可能找到更小的值。例如 $b = \frac{3}{2}$ 、 $a = \frac{4}{b} = \frac{8}{3}$ ，都是正有理數且 $ab = 4$ ，而 $a + 2b = \frac{8}{3} + 3 = \frac{17}{3} < 6$ ，所以 6 不是最小值。

把範圍放大，極小值只可能變小或不存在，不能把小範圍的結果直接搬過去。

用算幾不等式求極值，要確認兩件事：乘積是定值、等號在題目允許的範圍內做得到。

你們學校的段考卷也想要詳解？考完把題目頁拍照或掃描上傳，我們收到後會盡快做好放上來，一樣免費下載。

上傳：royalblue-education.com/school-exams/submit（上傳前可以先把姓名、座號遮掉）

本卷題目取自新竹女中 114 學年度上學期高一第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/hgsh-114a-g10-1

孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

御藍教育

ROYAL BLUE • EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/hgsh-114a-g10-1