

新莊高中 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數（弧度量、三角函數的圖形、和差角與倍角半角公式、正餘弦的疊合） · 多選題 4 題（24 分）、填充題 10 題（60 分）、綜合題 4 題（16 分，含一個 3 小題的題組）

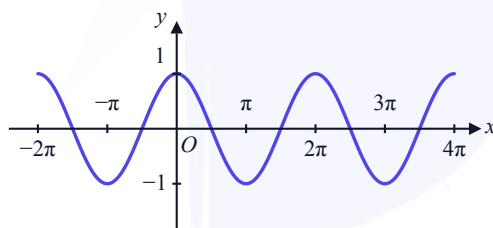
班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/hcsh-114a-g11a-1

一、多選題（占 24 分） | 說明：第 1 題至第 4 題，每題 6 分。(6-4-2-0)

1 如圖所示，此圖可為下方哪些函數的圖形？

- (1) $y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$
- (2) $y = \sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)$
- (3) $y = \sin\left(x + \frac{9\pi}{2}\right)$
- (4) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
- (5) $y = \cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$



2 設 $\theta = 20^\circ$ ，請選出正確的選項。

- (1) θ 為第一象限角
- (2) θ 的最小正同界角為 $20 - 6\pi$
- (3) $\cos \theta < \frac{1}{2}$
- (4) $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (5) $\tan \theta < \frac{\sqrt{3}}{3}$

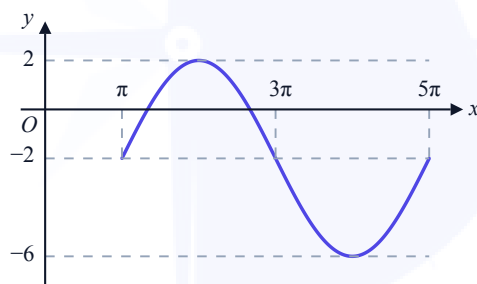


3 關於函數 $f(x) = \sin x + \cos x$ ，下列哪些敘述是正確的？

- (1) 若將 $g(x) = \sin x$ 的圖形先鉛直伸縮 $\sqrt{2}$ 倍，再往右平移 $\frac{\pi}{4}$ 個單位，可以得到 $f(x)$ 的圖形
- (2) 函數 $f(x)$ 的最大值為 $\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}$
- (3) 函數 $f(x)$ 的週期為 π
- (4) 在 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ 範圍內，函數 $f(x)$ 的值域為 $\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$
- (5) 函數 $y = f(x)$ 的圖形線對稱於 $x = \frac{5\pi}{4}$

4 圖為函數 $y = f(x) = a \sin(bx - c) + d$ 一個週期的圖形，其中 a, b, c, d 皆為實數且 $a > 0, b > 0, 0 < c < 2\pi$ ，選出正確的選項。

- (1) $a = 4$
- (2) $b = 2$
- (3) $c = \pi$
- (4) $c = \frac{\pi}{2}$
- (5) $d = -2$



二、填充題（占 60 分） | 說明：第 5 題至第 14 題，每題 6 分。

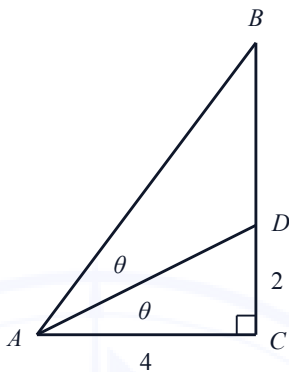
5 $\sin \frac{3}{2}\pi + \tan \frac{2}{3}\pi + \sin \frac{7}{6}\pi + \cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6 已知 $a = \sin 4, b = \sin 5, c = \sin 6, d = \sin 7$ ，則將 a, b, c, d 之值由小到大排序為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

7 在 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ 範圍內，不等式 $\cos x \geq \frac{1}{2}$ 的解為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 8 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ 且 $\angle BAD = \angle DAC = \theta$ 。已知 $\overline{AC} = 4$ ， $\overline{CD} = 2$ ，則 $\overline{BD}$ 的長度為 _____。



- 9 已知 $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ 且 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ ，則數對 $(\cos 2\theta, \cos \frac{\theta}{2}) =$ _____。

- 10 $y = 2 \sin x - 2\sqrt{3} \cos x = r \sin(x + \theta)$ ，其中 $r > 0$ 且 $0 < \theta < 2\pi$ ，則數對 $(r, \theta) =$ _____。

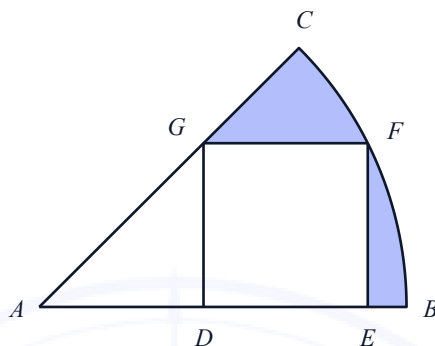
- 11 在 $\triangle ABC$ 中，設 $\cos A = \frac{3}{5}$ 且 $\tan B = 2$ ，則 $\sin C =$ _____。

- 12 在 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ 範圍內，函數 $y = -\sqrt{3} \sin x + \cos x + 5$ 的最小值為 m ，且其對應的 x 值為 θ ，則數對 $(m, \theta) =$ _____。

ROYAL BLUE · EDUCATION



- 13 如圖，已知扇形的圓心角 $\angle A = 45^\circ$ ，半徑 $\overline{AB} = 6\sqrt{5}$ ，且四邊形 $DEFG$ 為其內接正方形，則鋪色區域的面積為 _____。



- 14 有一扇形的周長為 21、面積為 27，則此扇形由兩半徑所夾的角度為 _____ 度。(有兩解)

三、綜合題 (占 16 分) | 說明：第 15 題至第 18 題。

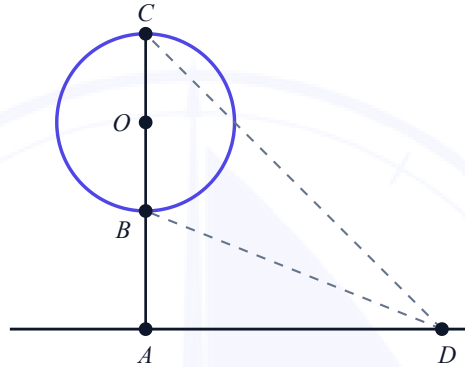
- 15 已知 α 、 β 為廣義角，其中 α 為第三象限角， β 為第四象限角，且 $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ， $\cos \beta = \frac{2}{3}$ ，則 $\alpha - \beta$ 可位於第幾象限？請說明你是如何判斷的，未正確說明不給分。(6 分)

第 16~18 題題組 如圖的摩天輪，其直徑為 $\overline{BC}$ ，設立在地面的基座 $\overline{AD}$ 上。摩天輪垂直地面且最低點離地面是 $\overline{AB}$ 。小明在距離基座 A 的 120 公尺處 D 點測得摩天輪最高點的仰角為 $\frac{\pi}{4}$ (小明的身高不計)，摩天輪的最高點與最低點的視角為 $\angle BDC$ ，且 $\tan \angle BDC = \frac{3}{7}$ ，此摩天輪以等速繞軌道轉動，且每 24 分鐘轉一圈。小明從最低點坐上摩天輪車廂，設轉動 t 分鐘後，小明的車廂距離地面高度為 y (公尺)，已知 $y = a \sin(bt + c) + d$ (其中 a, b, d 為正數， $|c| < \pi$) 可用來描述所在的車廂高度。試回答下列問題：



16 $\overline{AB}$ 的長度為多少公尺？（單選題，2 分）

- (1) 30
- (2) 36
- (3) 42
- (4) 48
- (5) 54



17 試求 a, b, c, d 的值。（非選擇題，4 分）

18 小明搭乘摩天輪運轉一圈，則他所坐的車廂離地面高度在 66 公尺以上時所經歷的時間為何？（非選擇題，4 分）

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/hcsh-114a-g11a-1

答案一覽

第 1 題 (1)(3)

第 2 題 (1)(2)(3)

第 3 題 (4)(5)

第 4 題 (1)(4)(5)

第 5 題 $-\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

第 6 題 $b < a < c < d$

第 7 題 $-2\pi \leq x \leq -\frac{5\pi}{3}$ 或 $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$

第 8 題 $\frac{10}{3}$

第 9 題 $\left(-\frac{7}{25}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

第 10 題 $\left(4, \frac{5\pi}{3}\right)$

第 11 題 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

第 12 題 $\left(3, \frac{2\pi}{3}\right)$

第 13 題 $\frac{45\pi}{2} - 54$

第 14 題 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{8}{3}$

第 15 題 第四象限

第 16 題 (4)

第 17 題 $a = 36, b = \frac{\pi}{12}, c = -\frac{\pi}{2}, d = 84$

第 18 題 16 分鐘

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code, 在網頁上勾你錯的題號, 馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前, 註冊後在首頁填上段考日期和範圍, 可以自己產生一份考前藍圖 PDF: 一份模擬卷、詳解, 還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解? 考完把題目頁拍照上傳, 收到會盡快做好放上來: royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)



多選題 (第 1~4 題)：辨認圖形、弧度角的位置、疊合後的性質、讀圖定係數

- 1 答案 (1)(3)。圖形通過 $(0, 1)$ ，在 $x = \pi$ 到最低點 -1 ，週期 2π ，是 $y = \cos x$ 的圖形。把各選項的角加減 2π 的整數倍後化簡：(1) $\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ ，對。(2) $\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ ，錯。(3) $\sin\left(x + \frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ ，對。(4) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ ，錯。(5) $\cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ ，錯。

也可以直接代 $x = 0$ 檢查函數值是不是 1：五個選項依序是 1、-1、1、0、0，只有 (1)(3) 通過。

- 2 答案 (1)(2)(3)。 $6\pi \approx 18.85$ ，所以 $20 - 6\pi \approx 1.15$ ，介於 0 與 2π 之間，是 θ 的最小正同界角，(2) 對。再比大小： $\frac{\pi}{3} \approx 1.047$ 、 $\frac{\pi}{2} \approx 1.571$ ，所以 $\frac{\pi}{3} < 20 - 6\pi < \frac{\pi}{2}$ ， θ 是第一象限角，(1) 對。同界角的三角函數值相同，而這個角比 $\frac{\pi}{3}$ 大、比 $\frac{\pi}{2}$ 小：(3) $\cos \theta < \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ，對。(4) $\sin \theta > \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，超出範圍，錯。(5) $\tan \theta > \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ ，比 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 大，錯。

1.15 徑約 65.9° 。只知道「第一象限」不夠判斷 (3)(4)(5)，要再跟 $\frac{\pi}{3}$ (60°) 比。

- 3 答案 (4)(5)。疊合： $f(x) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 。(1) 錯： $\sin x$ 鉛直伸縮 $\sqrt{2}$ 倍再往右平移 $\frac{\pi}{4}$ 得到 $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ；要得到 $f(x)$ 應往左平移。(2) 錯：最大值是 $\sqrt{2}$ 。(3) 錯：週期是 2π 。(4) 對： $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ 時 $\frac{7\pi}{12} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{13\pi}{12}$ ，這段落在 $\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{3\pi}{2}$ 之間，正弦一路遞減，所以最大值在左端 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$ ，最小值在右端 $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，值域為 $\left[\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right]$ 。(5) 對： $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{2} = -\sqrt{2}$ 是最低點，通過最高點或最低點的鉛直線就是對稱軸。

(4) 的角度範圍沒有包含 $\frac{\pi}{2}$ ，所以取不到 $\sqrt{2}$ ；極值要回到端點去算。

- 4 答案 (1)(4)(5)。最大值 2、最小值 -6： $a = \frac{2 - (-6)}{2} = 4$ ， $d = \frac{2 + (-6)}{2} = -2$ ，(1)(5) 對。圖上從 $x = \pi$ 到 $x = 5\pi$ 是一個週期，週期 $4\pi = \frac{2\pi}{b}$ ， $b = \frac{1}{2}$ ，(2) 錯。 $x = \pi$ 時圖形在中心線 $y = -2$ 上而且正要上升，相當於正弦的角為 0 (加 2π 的整數倍)： $\frac{\pi}{2} - c = 2k\pi$ ， $c = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$ ； $0 < c < 2\pi$ 只有 $c = \frac{\pi}{2}$ ，(4) 對、(3) 錯。

驗算： $y = 4 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - 2$ 在 $x = 2\pi$ 時為 $4 \sin \frac{\pi}{2} - 2 = 2$ ，在 $x = 4\pi$ 時為 $4 \sin \frac{3\pi}{2} - 2 = -6$ ，與圖相符。若 $c = \pi$ ， $x = \pi$ 時 $y = 4 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2 = -6$ ，與圖不合。

填充題 (第 5~7 題)：弧度特別角、比較正弦值、餘弦不等式

- 5 逐項求值： $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ ； $\tan \frac{2\pi}{3} = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$ ； $\sin \frac{7\pi}{6} = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ ； $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。相加： $-1 - \sqrt{3} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ 。
 $\frac{2\pi}{3}$ 在第二象限，正切為負； $\frac{7\pi}{6}$ 在第三象限，正弦為負；餘弦是偶函數，負角不變號。



- 6 先看位置： $\pi \approx 3.14$ 、 $\frac{3\pi}{2} \approx 4.71$ 、 $2\pi \approx 6.28$ 。4 在第三象限，5、6 在第四象限，正弦都是負的；7 比 2π 多約 0.72，在第一象限，正弦為正，所以 d 最大。三個負的改用銳角表示： $\sin 4 = -\sin(4 - \pi) \approx -\sin 0.86$ ， $\sin 5 = -\sin(2\pi - 5) \approx -\sin 1.28$ ， $\sin 6 = -\sin(2\pi - 6) \approx -\sin 0.28$ 。銳角的正弦隨角度遞增， $\sin 0.28 < \sin 0.86 < \sin 1.28$ ，加上負號後順序反過來： $\sin 5 < \sin 4 < \sin 6 < 0$ 。所以 $b < a < c < d$ 。

負數比大小時，絕對值大的反而小。數值約為 $b \approx -0.959$ 、 $a \approx -0.757$ 、 $c \approx -0.279$ 、 $d \approx 0.657$ 。

- 7 在 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ 內， $\cos x = \frac{1}{2}$ 的解是 $x = \pm\frac{\pi}{3}$ 、 $\pm\frac{5\pi}{3}$ 。看 $y = \cos x$ 的圖形在直線 $y = \frac{1}{2}$ 上方（含線上）的部分：中間以 $x = 0$ 的最高點為中心的一段 $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ；右邊靠近 $x = 2\pi$ 最高點的一段 $\frac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$ ；左邊靠近 $x = -2\pi$ 最高點的一段 $-2\pi \leq x \leq -\frac{5\pi}{3}$ 。三段合起來就是解。
兩端 $x = \pm 2\pi$ 處餘弦值是 1，所以兩側各有一段，不要只寫中間那一段。

填充題（第 8~11 題）：二倍角、半角、疊合、第三個角

- 8 直角三角形 ACD 中 $\tan \theta = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 。 $\angle BAC = 2\theta$ ，由二倍角公式 $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$ 。直角三角形 ABC 中 $\overline{BC} = \overline{AC} \tan 2\theta = 4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$ ，所以 $\overline{BD} = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$ 。
驗算： $\overline{AB} = \sqrt{4^2 + (\frac{16}{3})^2} = \frac{20}{3}$ ， $\overline{AB} : \overline{AC} = 5 : 3$ ，而 $\overline{BD} : \overline{DC} = \frac{10}{3} : 2 = 5 : 3$ ，符合角平分線分對邊的比。

- 9 $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \times \frac{9}{25} - 1 = -\frac{7}{25}$ 。半角公式： $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} = \frac{1 - \frac{3}{5}}{2} = \frac{1}{5}$ 。因為 $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ，所以 $\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4}$ ， $\frac{\theta}{2}$ 在第二象限，餘弦為負： $\cos \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 。數對為 $(-\frac{7}{25}, -\frac{\sqrt{5}}{5})$ 。

半角公式只給出平方，正負號要由 $\frac{\theta}{2}$ 的象限決定；先把 θ 的範圍除以 2。

- 10 $r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$ 。 $2 \sin x - 2\sqrt{3} \cos x = 4 \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) = 4 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \sin \frac{\pi}{3} \right) = 4 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$ 。題目要求 $0 < \theta < 2\pi$ ，把 $-\frac{\pi}{3}$ 加 2π 換成同界角 $\frac{5\pi}{3}$ ， $(r, \theta) = \left(4, \frac{5\pi}{3} \right)$ 。

也可以直接找 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ 、 $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的角：在第四象限， $\theta = \frac{5\pi}{3}$ 。

- 11 A 、 B 是三角形的內角。 $\cos A = \frac{3}{5} > 0$ ， A 是銳角， $\sin A = \frac{4}{5}$ 。 $\tan B = 2 > 0$ ， B 是銳角，取鄰邊 1、對邊 2、斜邊 $\sqrt{5}$ ，得 $\sin B = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 、 $\cos B = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 。 $C = \pi - (A + B)$ ，所以 $\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{4}{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ ，所以第三個角的正弦就是另外兩角和的正弦。答案剛好等於 $\sin B$ ，表示 $C = B$ 或 $C = \pi - B$ ；這裡是 $C = B$ 。



填充題 (第 12~14 題)：範圍內的最小值、扇形面積

- 12 疊合： $-\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\left(\sin x \cos \frac{5\pi}{6} + \cos x \sin \frac{5\pi}{6}\right) = 2\sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$ ，所以 $y = 2\sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) + 5$ 。 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ 時 $\frac{7\pi}{6} \leq x + \frac{5\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{3}$ ，這段包含 $\frac{3\pi}{2}$ ，正弦可以取到最小值 -1 。此時 $x + \frac{5\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$ ， $x = \frac{2\pi}{3}$ ， $y = -2 + 5 = 3$ 。 $(m, \theta) = \left(3, \frac{2\pi}{3}\right)$ 。

也可以疊合成餘弦： $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 5$ ， $\frac{2\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{6}$ 包含 π ，結果相同。要先確認取到最小值的角落在範圍內。

- 13 設正方形邊長為 s 。 $\angle A = 45^\circ$ 且 $\overline{GD} \perp \overline{AB}$ ，所以 $\triangle ADG$ 是等腰直角三角形， $\overline{AD} = \overline{GD} = s$ ，於是 $\overline{AE} = 2s$ 。 F 在弧上， $\overline{AF}$ 是半徑；直角三角形 AEF 中 $(2s)^2 + s^2 = (6\sqrt{5})^2 = 180$ ， $s^2 = 36$ ， $s = 6$ 。圓心角 $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ ，扇形面積 $= \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 180 \times \frac{\pi}{4} = \frac{45\pi}{2}$ 。沒有鋪色的部分是 $\triangle ADG$ 與正方形： $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 + 6^2 = 18 + 36 = 54$ 。鋪色面積 $= \frac{45\pi}{2} - 54$ 。

扇形面積公式的角要用弧度。 $\frac{45\pi}{2} \approx 70.69$ ，鋪色面積約 16.69。

- 14 設半徑 r 、圓心角 θ 弧。周長 $2r + r\theta = 21$ ，面積 $\frac{1}{2}r^2\theta = 27$ 。由第一式 $r\theta = 21 - 2r$ ，代入第二式： $\frac{1}{2}r(21 - 2r) = 27$ ， $2r^2 - 21r + 54 = 0$ ， $(2r - 9)(r - 6) = 0$ ， $r = 6$ 或 $r = \frac{9}{2}$ 。 $r = 6$ 時 $r\theta = 9$ ， $\theta = \frac{3}{2}$ ； $r = \frac{9}{2}$ 時 $r\theta = 12$ ， $\theta = \frac{12}{\frac{9}{2}} = \frac{8}{3}$ 。兩個角都小於 2π ，都合，所以角度為 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{8}{3}$ 弧。

扇形的周長是弧長加兩條半徑。驗算： $r = \frac{9}{2}$ 、 $\theta = \frac{8}{3}$ 時周長 $9 + 12 = 21$ ，面積 $\frac{1}{2} \times \frac{81}{4} \times \frac{8}{3} = 27$ 。

綜合題 (第 15~18 題)：判斷象限、摩天輪題組

- 15 答案：第四象限。 α 在第三象限， $\cos \alpha < 0$ ： $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$ 。 β 在第四象限， $\sin \beta < 0$ ：

$$\sin \beta = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}。用差角公式算 $\alpha - \beta$ 的正弦與餘弦： $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta -$$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \left(-\frac{4}{5}\right) \frac{2}{3} - \left(-\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{-8 - 3\sqrt{5}}{15} < 0；\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta +$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \left(-\frac{3}{5}\right) \frac{2}{3} + \left(-\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{5} - 6}{15}，因為 $4\sqrt{5} = \sqrt{80} > \sqrt{36} = 6$ ，所以 $\cos(\alpha - \beta) > 0$ 。正弦為負、餘弦為正， $\alpha - \beta$ 在第四象限。$$

只把兩個角的範圍相減（例如取 $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ 、 $270^\circ < \beta < 360^\circ$ ，得 $-180^\circ < \alpha - \beta < 0^\circ$ ）只能知道在第三或第四象限，分不出是哪一個；要算出正弦與餘弦的正負才能確定。

- 16 答案 (4)。 $\overline{CA}$ 垂直地面，仰角 $\angle ADC = \frac{\pi}{4}$ ，所以 $\overline{AC} = \overline{AD} \tan \frac{\pi}{4} = 120$ 。 $\angle ADB = \angle ADC - \angle BDC$ ，由正切的差角公式 $\tan \angle ADB = \frac{1 - \frac{3}{7}}{1 + 1 \times \frac{3}{7}} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{10}{7}} = \frac{2}{5}$ 。直角三角形 ABD 中 $\overline{AB} = \overline{AD} \tan \angle ADB = 120 \times \frac{2}{5} = 48$ 公尺。

$$\text{驗算：}\tan \angle ADB = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}，\tan \angle ADC = 1，\tan \angle BDC = \frac{1 - \frac{2}{5}}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{3}{7}，與題目相符。$$



- 17 直徑 $\overline{BC} = 120 - 48 = 72$ ，半徑 36，圓心離地 $48 + 36 = 84$ 。車廂高度在 84 上下各擺動 36，所以 $a = 36$ 、 $d = 84$ 。每 24 分鐘轉一圈，週期 $\frac{2\pi}{b} = 24$ ， $b = \frac{\pi}{12}$ 。 $t = 0$ 時在最低點， $y = 48 : 36 \sin c + 84 = 48$ ， $\sin c = -1$ ；在 $|c| < \pi$ 內只有 $c = -\frac{\pi}{2}$ 。所以 $a = 36$ ， $b = \frac{\pi}{12}$ ， $c = -\frac{\pi}{2}$ ， $d = 84$ 。

驗算： $t = 12$ （轉半圈）時 $y = 36 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + 84 = 120$ ，正是最高點。 $c = \frac{3\pi}{2}$ 也滿足 $\sin c = -1$ ，但不在 $|c| < \pi$ 內。

- 18 由上題 $y = 36 \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{2}\right) + 84$ 。 $y \geq 66$ 即 $\sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{2}\right) \geq -\frac{1}{2}$ 。轉一圈 $0 \leq t \leq 24$ 時，角 $\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{2}$ 從 $-\frac{\pi}{2}$ 走到 $\frac{3\pi}{2}$ ；在這段裡正弦不小於 $-\frac{1}{2}$ 的範圍是 $-\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{6}$ 。各加 $\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{12}t \leq \frac{5\pi}{3}$ ， $4 \leq t \leq 20$ 。經歷的時間是 $20 - 4 = 16$ 分鐘。

也可以用幾何看：66 公尺比圓心低 18 公尺，剛好是半徑的一半，低於這條線的弧所對的圓心角是 $2 \times 60^\circ = 120^\circ$ ，佔一圈的 $\frac{1}{3}$ ，即 8 分鐘；其餘 16 分鐘都在 66 公尺以上。

圓周運動的高度可以寫成正弦型函數：振幅是半徑、中心線是圓心高度、週期是轉一圈的時間，起點位置決定平移量。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自新莊高中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/hcsh-114a-g11a-1