

新竹高中 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：指數與對數函數（對數律、換底公式、指數與對數函數的圖形、指數與對數的方程式及不等式、常用對數的應用） · 多選題 3 題（18 分）、填充題 12 題（72 分）、計算題 1 題（10 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/hchs-114a-g11a-soc-1

一、多選題（占 18 分；第 1 題至第 3 題，每題 6 分，6-4-2-0）

1 設 x, y, z 均為不等於 1 的正數。請問下列關於指數、對數這兩種運算的敘述，哪些是正確的？

(1) $\log_a x \cdot \log_a y = \log_a(xy)$

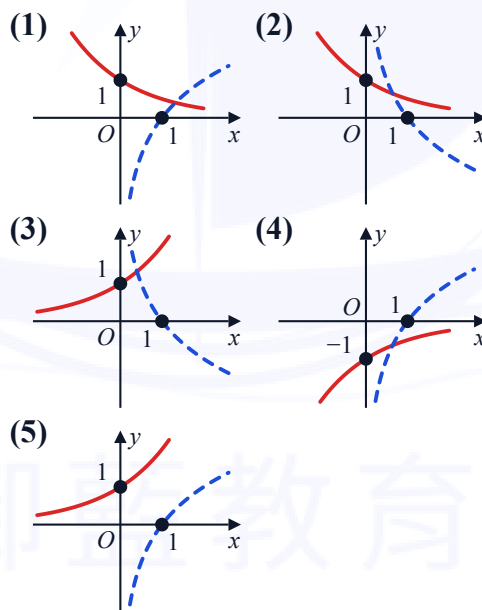
(2) $\log_a(x+y) = \log_a x + \log_a y$

(3) $\log_a(x^y) = y \log_a x$

(4) $\frac{\log_x a}{\log_y a} = \log_x y$

(5) 若 $a^x = y$ ，則 $a = y^{\frac{1}{x}}$

2 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，下列哪些選項可能是函數 $y = \log_a x$ 與 $y = a^{-x}$ 的圖形？



3 設 $a > 1 > b > 0$ ，關於下列不等式，選出正確的選項：

(1) $(-a)^7 > (-a)^9$

(2) $b^{-9} > b^{-7}$

(3) $\log_{10} \frac{1}{a} > \log_{10} \frac{1}{b}$

(4) $\log_a 1 > \log_b 1$

(5) $\log_a b \geq \log_b a$



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/hchs-114a-g11a-soc-1

二、填充題（占 72 分；第 4 題至第 15 題，每題 6 分）

4 解不等式 $2^{x+1} + 2^{2-x} - 6 < 0$ 為 _____。

5 求 $\left(\log_2 7 + \log_4 \frac{1}{7}\right) \left(\log_7 2 + \log_{49} \frac{1}{8}\right)$ 的值為 _____。

6 解不等式 $\log_2 \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) < 1$ 為 _____。

7 坐標平面上，直線 $x + y = 6$ 與 $y = 2^x$ 、 $y = \log_2 x$ 的圖形分別交於 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 兩點，則數對 $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$ _____。

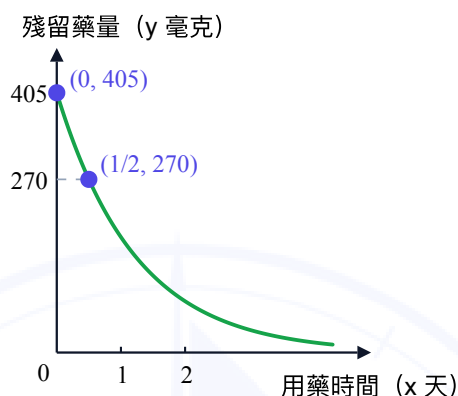
8 若 $10^{0.6}$ 介在兩連續整數 n 和 $n + 1$ 之間，則 $n =$ _____。

9 求 $2^{106} + 3^{66}$ 是 _____ 位數字。

10 已知正整數 n 滿足 2^n 是一個最高位數字為 2 的 12 位數，求 n 的值為 _____。



- 11 右圖為某種農藥在農作物上的單位面積之殘留藥量 (y 毫克) 與用藥時間 (x 天) 的關係圖。設其關係為指數函數 $y = k \cdot a^x$, k 是常數。若單位面積之殘留藥量小於 50 毫克方可食用, 則用藥 ____ 天才可以食用。(所求為整數天)



- 12 解方程式 $6^x - 2^x - 4 \cdot 3^x + 4 = 0$ 為 ____。

- 13 設 $a = \log_{10} 3$, $b = \log_{10} 5$, 將 $\log_2 45$ 用 a, b 表示為 ____。

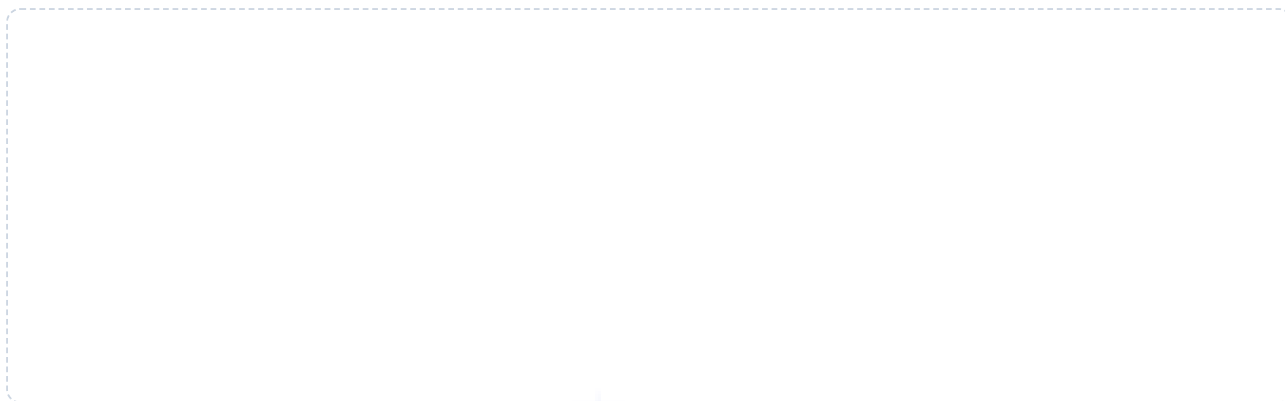
- 14 比較 $a = \log_{\frac{1}{3}} 4$, $b = \log_{16} 9$, $c = \log_{\frac{1}{4}} 3$, $d = \log_2 1.7$ 的大小關係為 ____。

- 15 聲音的強度是每平方公尺多少瓦特 (W/m^2) 來衡量, 一般人能感覺出聲音的最小強度為 $I_0 = 10^{-12}$ (W/m^2)。當測得的聲音強度為 I (W/m^2) 時, 所產生的噪音分貝數 d 為 $d(I) = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$ 。若新車要求聲音強度產生噪音需不得超過 60 分貝, 那汽車製造廠需將聲音強度降低為 ____ (W/m^2) 以下才能合乎要求。

三、計算題 (占 10 分; 第 16 題)

- 16 設 $\frac{1}{10} \leq x \leq 1000$, 請求出 $f(x) = 3^{\log x} \cdot x^{\log 3} - 18 \cdot 3^{\log(\sqrt{10}x)}$ 之最大值與最小值, 並問產生最大值、最小值之 x 各為何?





御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/hchs-114a-g11a-soc-1

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/hchs-114a-g11a-soc-1

答案一覽

第 1 題 (3)(4)(5)

第 2 題 (1)(3)

第 3 題 (1)(2)

第 4 題 $0 < x < 1$

第 5 題 $-\frac{1}{4}$

第 6 題 $\frac{1}{4} < x < 1$

第 7 題 (6, 6)

第 8 題 3

第 9 題 33

第 10 題 38

第 11 題 3

第 12 題 $x = 2$ 或 $x = 0$

第 13 題 $\frac{2a+b}{1-b}$

第 14 題 $b > d > c > a$

第 15 題 10^{-6}

第 16 題 $x = \frac{1}{10}$ 時有最大值 $\frac{1}{9} - 6\sqrt{3}$; $x = 100\sqrt{10}$ 時有最小值 -243

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。（不用註冊）
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit（可以先把姓名、座號遮掉）



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/hchs-114a-g11a-soc-1

多選題 1~3：對數律、圖形配對、比大小

- 1 答案 (3)(4)(5)。(1) 錯：對數律是「相加」變成真數相乘， $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$ ；兩個對數相乘沒有這個關係，例如 $a = 2, x = y = 8$ 時左邊 $= 3 \times 3 = 9$ ，右邊 $= \log_2 64 = 6$ 。(2) 錯： $\log_a x + \log_a y$ 等於 $\log_a(xy)$ ，不是 $\log_a(x+y)$ ；例如 $a = 2, x = y = 4$ 時左邊 $= \log_2 8 = 3$ ，右邊 $= 2 + 2 = 4$ 。(3) 對：這是對數律 $\log_a x^r = r \log_a x$ ，取 $r = y$ 。(4) 對：用換底公式換成常用對數， $\frac{\log_x a}{\log_y a} = \frac{\log a}{\log x} \div \frac{\log a}{\log y} = \frac{\log y}{\log x} = \log_x y$ 。(5) 對： $x > 0$ ，兩邊同取 $\frac{1}{x}$ 次方， $(a^x)^{\frac{1}{x}} = y^{\frac{1}{x}}$ ，即 $a = y^{\frac{1}{x}}$ 。

流傳版本題幹寫「 x, y, z 」，選項裡的底數是 a ；這裡把 a 也當作不等於 1 的正數（(4) 需要 $a \neq 1$ ，分母 $\log_y a$ 才不為 0）。

- 2 答案 (1)(3)。先看兩個函數各自一定經過的點： $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 過 $(0, 1)$ 而且整條在 x 軸上方； $y = \log_a x$ 過 $(1, 0)$ 。再看增減： $a > 1$ 時， $\log_a x$ 遞增，而底數 $\frac{1}{a} < 1$ ， a^{-x} 遞減，是 (1)。 $0 < a < 1$ 時， $\log_a x$ 遞減，而底數 $\frac{1}{a} > 1$ ， a^{-x} 遞增，是 (3)。所以兩條曲線必定一條遞增、一條遞減：(2) 兩條都遞減、(5) 兩條都遞增，都不可能；(4) 有一條曲線過 $(0, -1)$ 、落在 x 軸下方，不會是 a^{-x} 。題目給的是 a^{-x} 不是 a^x ，它的增減方向和 $\log_a x$ 相反；看成 a^x 會選到 (2)(5)。

- 3 答案 (1)(2)。(1) 對：奇數次方保留負號， $(-a)^7 = -a^7$ ， $(-a)^9 = -a^9$ ； $a > 1$ 時 $a^7 < a^9$ ，同乘 -1 得 $-a^7 > -a^9$ 。(2) 對： $0 < b < 1$ ， $y = b^x$ 是遞減函數，而 $-9 < -7$ ，所以 $b^{-9} > b^{-7}$ 。(3) 錯： $a > 1 > b > 0$ 得 $\frac{1}{a} < 1 < \frac{1}{b}$ ， $\log_{10} x$ 遞增，所以 $\log_{10} \frac{1}{a} < 0 < \log_{10} \frac{1}{b}$ 。(4) 錯： $\log_a 1 = 0 = \log_b 1$ ，兩者相等。(5) 錯：不是恆成立，例如 $a = 2, b = \frac{1}{4}$ 時 $\log_a b = -2$ ， $\log_b a = -\frac{1}{2}$ ， $-2 < -\frac{1}{2}$ 。(5) 令 $t = \log_a b$ ，因為 $0 < b < 1 < a$ ， $t < 0$ ，而 $\log_b a = \frac{1}{t}$ 。 $t \geq \frac{1}{t}$ 兩邊同乘負數 t 得 $t^2 \leq 1$ ，即 $-1 \leq t < 0$ ； $t < -1$ 時（例如上面的反例）就不成立。

填充 4~7：指數不等式、換底求值、對數不等式、圖形對稱

- 4 令 $t = 2^x, t > 0$ 。 $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x = 2t$ ， $2^{2-x} = \frac{4}{2^x} = \frac{4}{t}$ ，不等式成為 $2t + \frac{4}{t} - 6 < 0$ 。兩邊同乘正數 t ： $2t^2 - 6t + 4 < 0$ ， $t^2 - 3t + 2 < 0$ ， $(t-1)(t-2) < 0$ ，得 $1 < t < 2$ 。即 $2^0 < 2^x < 2^1$ ，底數 $2 > 1$ ，所以 $0 < x < 1$ 。

- 5 把底數 4、49 換成 2、7： $\log_4 \frac{1}{7} = \frac{\log_2 7^{-1}}{\log_2 2^2} = -\frac{1}{2} \log_2 7$ ； $\log_{49} \frac{1}{8} = \frac{\log_7 2^{-3}}{\log_7 7^2} = -\frac{3}{2} \log_7 2$ 。第一個括號 $= \log_2 7 - \frac{1}{2} \log_2 7 = \frac{1}{2} \log_2 7$ ；第二個括號 $= \log_7 2 - \frac{3}{2} \log_7 2 = -\frac{1}{2} \log_7 2$ 。相乘： $-\frac{1}{4} \cdot \log_2 7 \cdot \log_7 2 = -\frac{1}{4}$ 。

由換底公式 $\log_2 7 \cdot \log_7 2 = \frac{\log 7}{\log 2} \cdot \frac{\log 2}{\log 7} = 1$ 。

- 6 外層：真數 $\log_{\frac{1}{2}} x$ 必須為正；又 $1 = \log_2 2$ ，底數 $2 > 1$ ，所以 $0 < \log_{\frac{1}{2}} x < 2$ 。內層： $0 = \log_{\frac{1}{2}} 1$ ， $2 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ ，即 $\log_{\frac{1}{2}} 1 < \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ ；底數 $\frac{1}{2} < 1$ ，不等號反向，得 $\frac{1}{4} < x < 1$ （此範圍內 $x > 0$ ，內層真數也為正）。

外層的真數條件 $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$ 不能漏；漏掉的話只會得到 $x > \frac{1}{4}$ 。



- 7 A 是 $y = 2^x$ 與 $y = 6 - x$ 的交點： 2^x 遞增、 $6 - x$ 遞減，交點最多一個； $x = 2$ 時兩邊都是 4，所以 $A(2, 4)$ 。 B 是 $y = \log_2 x$ 與 $y = 6 - x$ 的交點：同樣最多一個； $x = 4$ 時兩邊都是 2，所以 $B(4, 2)$ 。故 $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2 + 4, 4 + 2) = (6, 6)$ 。

$y = 2^x$ 與 $y = \log_2 x$ 的圖形對稱於直線 $y = x$ ，直線 $x + y = 6$ 把 x 、 y 對調後還是自己，所以 B 就是 A 的兩個坐標對調： $x_2 = y_1$ 、 $y_2 = x_1$ 。於是 $x_1 + x_2 = x_1 + y_1 = 6$ ， $y_1 + y_2 = 6$ ，不必真的解出交點。

指數、對數不等式先看底數比 1 大還是小，決定不等號要不要反向；對數另外要寫真數為正。

填充 8~11：估計、位數、最高位數字、衰退模型

- 8 $10^{0.6} = 10^{\frac{3}{5}}$ ，把它 5 次方得 $10^3 = 1000$ 。因為 $3^5 = 243 < 1000 < 1024 = 4^5$ ，所以 $3 < 10^{0.6} < 4$ ， $n = 3$ 。

另一個看法： $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 4 = 2 \log 2 \approx 0.6020$ ，而 $0.4771 < 0.6 < 0.6020$ ，所以 $3 < 10^{0.6} < 4$ 。

- 9 取 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ 。 $\log 2^{106} = 106 \times 0.3010 = 31.906$ ，所以 $2^{106} = 10^{0.906} \times 10^{31}$ ；而 $\log 8 = 0.9030 < 0.906 < 0.9542 = \log 9$ ，得 $8 \times 10^{31} < 2^{106} < 9 \times 10^{31}$ 。 $\log 3^{66} = 66 \times 0.4771 = 31.4886$ ；而 $\log 3 = 0.4771 < 0.4886 < 0.6020 = \log 4$ ，得 $3 \times 10^{31} < 3^{66} < 4 \times 10^{31}$ 。兩式相加： $11 \times 10^{31} < 2^{106} + 3^{66} < 13 \times 10^{31}$ ，也就是介於 1.1×10^{32} 與 1.3×10^{32} 之間，是 33 位數。

2^{106} 與 3^{66} 各自都是 32 位數，但最高位數字相加超過 10 會進位，所以要連最高位數字一起估，不能只看各自的位數。

- 10 最高位數字是 2 的 12 位數，就是 $2 \times 10^{11} \leq 2^n < 3 \times 10^{11}$ 。取常用對數： $11 + \log 2 \leq n \log 2 < 11 + \log 3$ ，即 $11.3010 \leq 0.3010 n < 11.4771$ 。兩邊除以 0.3010： $37.5 \dots \leq n < 38.1 \dots$ ，整數 $n = 38$ 。

驗算： $2^{38} = 274877906944$ ，是 12 位數，最高位數字是 2。

- 11 由圖， $x = 0$ 時 $y = 405$ ： $k \cdot a^0 = 405$ ， $k = 405$ 。 $x = \frac{1}{2}$ 時 $y = 270$ ： $405 \cdot a^{\frac{1}{2}} = 270$ ， $a^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ ， $a = \frac{4}{9}$ 。所以 $y = 405 \left(\frac{4}{9}\right)^x$ ，底數小於 1，是遞減函數。 $x = 2$ 時 $y = 405 \times \frac{16}{81} = 80$ ，還大於 50； $x = 3$ 時 $y = 405 \times \frac{64}{729} = \frac{320}{9} \approx 35.6 < 50$ 。所以用藥 3 天才可以食用。

位數問題先寫成「介於 10 的幾次方之間」，再取常用對數；最高位數字看對數的小數部分落在哪兩個 $\log$ 值之間。

填充 12~15：分組分解、換底表示、比大小、分貝

- 12 $6^x = 2^x \cdot 3^x$ ，前兩項提出 2^x 、後兩項提出 -4 ： $2^x(3^x - 1) - 4(3^x - 1) = 0$ ，即 $(2^x - 4)(3^x - 1) = 0$ 。所以 $2^x = 4$ 或 $3^x = 1$ ，得 $x = 2$ 或 $x = 0$ 。

驗算： $x = 2$ 時 $36 - 4 - 36 + 4 = 0$ ； $x = 0$ 時 $1 - 1 - 4 + 4 = 0$ 。



13 用換底公式換成常用對數： $\log_2 45 = \frac{\log 45}{\log 2}$ 。分子： $45 = 3^2 \times 5$ ， $\log 45 = 2\log 3 + \log 5 = 2a + b$ 。

分母： $2 = \frac{10}{5}$ ， $\log 2 = \log 10 - \log 5 = 1 - b$ 。所以 $\log_2 45 = \frac{2a+b}{1-b}$ 。

題目沒有給 $\log 2$ ，要靠 $\log 2 + \log 5 = \log 10 = 1$ 把它換成 $1 - b$ 。

14 先分正負。 $a = \log_{\frac{1}{3}} 4 = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{3}} = -\log_3 4$ ， $c = \log_{\frac{1}{4}} 3 = -\log_4 3$ ，兩個都是負的； b 、 d 的底數與真數都大於 1，兩個都是正的。比 a 、 c ： $4 > 3$ ，所以 $\log_3 4 > 1$ ， $a < -1$ ； $3 < 4$ ，所以 $0 < \log_4 3 < 1$ ， $-1 < c < 0$ ；得 $c > a$ 。比 b 、 d ： $b = \log_{16} 9 = \frac{\log 3^2}{\log 4^2} = \log_4 3 = \frac{\log 3}{2\log 2} = \log_2 \sqrt{3}$ ；而 $1.7^2 = 2.89 < 3$ ，所以 $1.7 < \sqrt{3}$ ，底數 $2 > 1$ ，得 $d = \log_2 1.7 < \log_2 \sqrt{3} = b$ 。綜合： $b > d > 0 > c > a$ ，即 $b > d > c > a$ 。

b 與 c 剛好差一個負號 ($b = \log_4 3$ ， $c = -\log_4 3$)； b 與 d 很接近 (約 0.79 與 0.77)，要化成同底、比真數 $\sqrt{3}$ 與 1.7 才分得出來。

15 噪音不得超過 60 分貝： $10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \leq 60$ ， $\log \frac{I}{I_0} \leq 6$ 。常用對數是遞增函數，所以 $\frac{I}{I_0} \leq 10^6$ ， $I \leq 10^6 \times 10^{-12} = 10^{-6}$ 。聲音強度要降到 10^{-6} (W/m^2) 以下。

幾個對數比大小時，先分出正負，再各自和 1、-1 比，最後才把靠得近的兩個化成同底。

計算題 16：代換後求二次函數的極值

16 先把三個指數式都寫成 $3^{\log x}$ 。 $x^{\log 3}$ ：取常用對數得 $\log 3 \cdot \log x$ ，和 $3^{\log x}$ 取常用對數的結果 $\log x \cdot \log 3$ 相同，所以 $x^{\log 3} = 3^{\log x}$ 。 $3^{\log(\sqrt{10}x)} = 3^{\frac{1}{2} + \log x} = \sqrt{3} \cdot 3^{\log x}$ 。令 $t = 3^{\log x}$ ，則 $f = t^2 - 18\sqrt{3}t = (t - 9\sqrt{3})^2 - 243$ 。 t 的範圍： $\frac{1}{10} \leq x \leq 1000$ 即 $-1 \leq \log x \leq 3$ ， $3^{-1} \leq t \leq 3^3$ ，所以 $\frac{1}{3} \leq t \leq 27$ 。頂點 $t = 9\sqrt{3} \approx 15.6$ 在範圍內，最小值為 -243 ；此時 $3^{\log x} = 9\sqrt{3} = 3^{\frac{5}{2}}$ ， $\log x = \frac{5}{2}$ ， $x = 10^{\frac{5}{2}} = 100\sqrt{10}$ 。開口向上，最大值在離頂點較遠的端點： $9\sqrt{3} - \frac{1}{3} \approx 15.3$ ， $27 - 9\sqrt{3} \approx 11.4$ ，所以取 $t = \frac{1}{3}$ ，即 $x = \frac{1}{10}$ ，最大值 $= \frac{1}{9} - 18\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} - 6\sqrt{3}$ 。

流傳版本的參考答案把最小值寫成 -234 ；但 $(9\sqrt{3})^2 = 81 \times 3 = 243$ ，配方後的常數是 -243 。兩個 x 值與最大值都和參考答案一致。另一個端點 $t = 27$ ($x = 1000$) 時 $f = 729 - 486\sqrt{3} \approx -112.8$ ，不是最大值也不是最小值。

$x^{\log 3}$ 與 $3^{\log x}$ 相等，可以用同一個 t 代換；代換後要把 x 的範圍換成 t 的範圍，再比較頂點與兩個端點。



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自新竹高中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/hchs-114a-g11a-soc-1