

新竹高中 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：指數與對數函數（對數律、換底公式、指數與對數函數的圖形、方程式與不等式、常用對數的應用）

多選題 3 題（18 分）、填充題 12 題（72 分）、計算題 1 題（10 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/hchs-114a-g11a-1

一、多選題（占 18 分；第 1 題至第 3 題，每題 6 分，6-4-2-0）

1 設 x, y, z 均為不等於 1 的正數。請問下列關於指數、對數這兩種運算的敘述，哪些是正確的？

(1) $\log_a x \cdot \log_a y = \log_a(xy)$

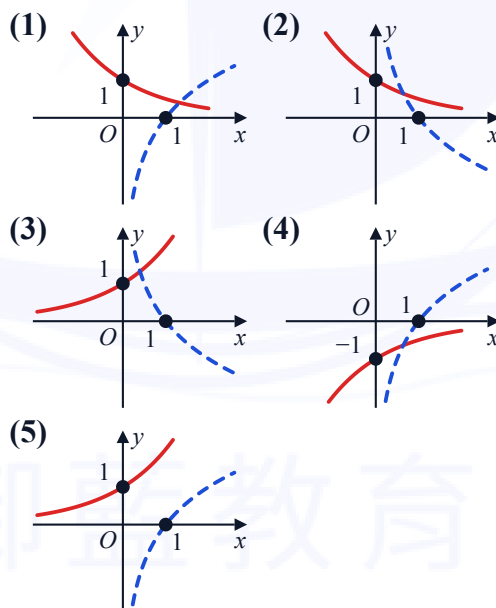
(2) $\log_a(x+y) = \log_a x + \log_a y$

(3) $\log_a(x^y) = y \log_a x$

(4) $\frac{\log_x a}{\log_y a} = \log_x y$

(5) 若 $a^x = y$ ，則 $a = y^{\frac{1}{x}}$

2 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，下列哪些選項可能是函數 $y = \log_a x$ 與 $y = a^{-x}$ 的圖形？



3 設 $a > 1 > b > 0$ ，關於下列不等式，選出正確的選項：

(1) $(-a)^7 > (-a)^9$

(2) $b^{-9} > b^{-7}$

(3) $\log_{10} \frac{1}{a} > \log_{10} \frac{1}{b}$

(4) $\log_a 1 > \log_b 1$

(5) $\log_a b \geq \log_b a$



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/hchs-114a-g11a-1

二、填充題（占 72 分；第 4 題至第 15 題，每題 6 分）

4 解不等式 $2^{x+1} + 2^{2-x} - 6 < 0$ 為 _____。

5 求 $\left(\log_2 7 + \log_4 \frac{1}{7}\right) \left(\log_7 2 + \log_{49} \frac{1}{8}\right)$ 的值為 _____。

6 解不等式 $\log_2 \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) < 1$ 為 _____。

7 坐標平面上，直線 $x + y = 6$ 與 $y = 2^x$ 、 $y = \log_2 x$ 的圖形分別交於 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 兩點，則數對 $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$ _____。

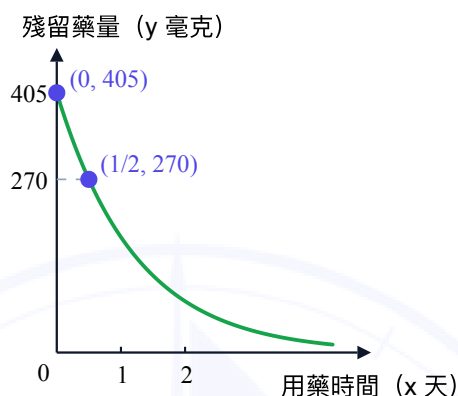
8 若 $10^{0.6}$ 介在兩連續整數 n 和 $n + 1$ 之間，則 $n =$ _____。

9 求 $2^{106} + 3^{66}$ 是 _____ 位數字。

10 已知正整數 n 滿足 2^n 是一個最高位數字為 2 的 12 位數，求 n 的值為 _____。



- 11 右圖為某種農藥在農作物上的單位面積之殘留藥量 (y 毫克) 與用藥時間 (x 天) 的關係圖。設其關係為指數函數 $y = k \cdot a^x$, k 是常數。若單位面積之殘留藥量小於 50 毫克方可食用, 則用藥 ____ 天才可以食用。(所求為整數天)



- 12 解方程式 $4(4^x + 4^{-x}) - 12(2^x + 2^{-x}) + 13 = 0$ 為 ____。

- 13 設 $a = \log_2 3$, $b = \log_3 11$, 將 $\log_{66} 99$ 用 a, b 表示為 ____。

- 14 設 $a > b > 1000$, $p = \sqrt{\log_{0.7} a \times \log_{0.7} b}$, $q = \frac{1}{2}(\log_{0.7} a + \log_{0.7} b)$, $r = \log_{0.7} \left(\frac{a+b}{2} \right)$ 。試比較 p, q, r 三數的大小關係為 ____。

- 15 根據統計資料, 在 A 小鎮當某件訊息發布後, t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的 $100(1 - 2^{-kt})\%$, 其中 k 是某個大於 0 的常數。今有某訊息, 假設在發布後 3 小時之內已經有 70% 的人口聽到該訊息。又設最快要 T 小時, 有 99% 的人口已聽到該訊息, 則 T 的值約為 ____。(四捨五入至小數點以下第一位)



三、計算題（占 10 分；第 16 題）

- 16 設 $\frac{1}{10} \leq x \leq 1000$ ，請求出 $f(x) = 3^{\log x} \cdot x^{\log 3} - 18 \cdot 3^{\log(\sqrt{10}x)}$ 之最大值與最小值，並問產生最大值、最小值之 x 各為何？



御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/hchs-114a-g11a-1

答案一覽

第 1 題 (3)(4)(5)

第 2 題 (1)(3)

第 3 題 (1)(2)

第 4 題 $0 < x < 1$

第 5 題 $-\frac{1}{4}$

第 6 題 $\frac{1}{4} < x < 1$

第 7 題 (6, 6)

第 8 題 3

第 9 題 33

第 10 題 38

第 11 題 3

第 12 題 $x = \pm 1$

第 13 題 $\frac{2a + ab}{1 + a + ab}$

第 14 題 $p > q > r$

第 15 題 11.5

第 16 題 $x = \frac{1}{10}$ 時有最大值 $\frac{1}{9} - 6\sqrt{3}$; $x = 100\sqrt{10}$ 時有最小值 -243

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。（不用註冊）
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit（可以先把姓名、座號遮掉）



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/hchs-114a-g11a-1

多選題 1~3：對數律、圖形配對、比大小

- 1 答案 (3)(4)(5)。(1) 錯：對數律是 $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$ ，相乘不成立；例如 $a = x = y = 2$ 時左邊 = 1，右邊 = $\log_2 4 = 2$ 。(2) 錯： $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$ ，不是 $\log_a(x + y)$ ；例如 $a = 2, x = y = 4$ 時左邊 = $\log_2 8 = 3$ ，右邊 = 4。(3) 對：這就是對數律 $\log_a x^r = r \log_a x$ 。(4) 對：用換底公式都換成常用對數， $\frac{\log_x a}{\log_y a} = \frac{\log a}{\log x} \cdot \frac{\log y}{\log a} = \frac{\log y}{\log x} = \log_x y$ 。(5) 對： $x > 0$ ，兩邊同取 $\frac{1}{x}$ 次方， $(a^x)^{\frac{1}{x}} = y^{\frac{1}{x}}$ ，即 $a = y^{\frac{1}{x}}$ 。

流傳版本題幹寫「 x, y, z 」，選項裡的底數是 a ；這裡把 a 也當作不等於 1 的正數（(4) 需要 $a \neq 1$ ，分母 $\log_y a$ 才不為 0）。

- 2 答案 (1)(3)。 $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 一定過 $(0, 1)$ 且圖形在 x 軸上方； $y = \log_a x$ 一定過 $(1, 0)$ 。 $a > 1$ 時： $\log_a x$ 遞增，而 $\frac{1}{a} < 1$ ， a^{-x} 遞減，這是 (1)。 $0 < a < 1$ 時： $\log_a x$ 遞減，而 $\frac{1}{a} > 1$ ， a^{-x} 遞增，這是 (3)。所以兩條曲線一定「一增一減」；(2) 兩條都遞減、(5) 兩條都遞增，不合；(4) 有一條曲線過 $(0, -1)$ 、在 x 軸下方，不可能是 a^{-x} 。

注意是 a^{-x} 不是 a^x ，增減方向和 $\log_a x$ 剛好相反。

- 3 答案 (1)(2)。(1) 對： $(-a)^7 = -a^7$ ， $(-a)^9 = -a^9$ ； $a > 1$ 時 $a^7 < a^9$ ，所以 $-a^7 > -a^9$ 。(2) 對： $0 < b < 1$ ， $y = b^x$ 遞減， $-9 < -7$ ，所以 $b^{-9} > b^{-7}$ 。(3) 錯： $\frac{1}{a} < 1 < \frac{1}{b}$ ， $\log_{10} x$ 遞增，所以 $\log_{10} \frac{1}{a} < 0 < \log_{10} \frac{1}{b}$ 。(4) 錯： $\log_a 1 = \log_b 1 = 0$ ，兩者相等。(5) 錯：不一定成立，例如 $a = 2, b = \frac{1}{4}$ 時 $\log_a b = -2$ ， $\log_b a = -\frac{1}{2}$ ， $-2 < -\frac{1}{2}$ 。
(5) 令 $t = \log_a b < 0$ ，則 $\log_b a = \frac{1}{t}$ ； $t \geq \frac{1}{t}$ 只在 $-1 \leq t < 0$ （即 $ab \geq 1$ ）時成立，不是恆成立。

填充 4~7：指數不等式、換底求值、對數不等式、圖形對稱

- 4 令 $t = 2^x > 0$ ，則 $2^{x+1} = 2t$ ， $2^{2-x} = \frac{4}{t}$ 。不等式成為 $2t + \frac{4}{t} - 6 < 0$ ，兩邊同乘 t （正數，不等號不變）： $2t^2 - 6t + 4 < 0$ ，即 $(t-1)(t-2) < 0$ ， $1 < t < 2$ 。所以 $2^0 < 2^x < 2^1$ ，底數 $2 > 1$ ，得 $0 < x < 1$ 。

- 5 把底數換成最小的： $\log_4 \frac{1}{7} = \frac{\log_2 7^{-1}}{\log_2 4} = -\frac{1}{2} \log_2 7$ ， $\log_{49} \frac{1}{8} = \frac{\log_7 2^{-3}}{\log_7 49} = -\frac{3}{2} \log_7 2$ 。原式 = $\left(\frac{1}{2} \log_2 7\right) \left(-\frac{1}{2} \log_7 2\right) = -\frac{1}{4} \cdot \log_2 7 \cdot \log_7 2 = -\frac{1}{4}$ 。

$\log_2 7 \cdot \log_7 2 = 1$ （換底公式），這一步讓兩個算不出來的數消掉。

- 6 外層： $\log_2 \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) < 1 = \log_2 2$ ，底數 $2 > 1$ ，且真數要為正，所以 $0 < \log_{\frac{1}{2}} x < 2$ 。內層：寫成 $\log_{\frac{1}{2}} 1 < \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ ，底數 $\frac{1}{2} < 1$ ，不等號反向，得 $\frac{1}{4} < x < 1$ 。

外層的真數 $\log_{\frac{1}{2}} x$ 必須大於 0，少了這個條件會多出 $x \geq 1$ 的錯誤範圍。



- 7 A : 解 $2^x = 6 - x$ 。左邊遞增、右邊遞減，最多一個解； $x = 2$ 時兩邊都是 4，所以 $A(2, 4)$ 。 B : 解 $\log_2 x = 6 - x$ ，同理最多一個解； $x = 4$ 時兩邊都是 2，所以 $B(4, 2)$ 。故 $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (6, 6)$ 。

$y = 2^x$ 與 $y = \log_2 x$ 的圖形對稱於直線 $y = x$ ，而直線 $x + y = 6$ 自己也對稱於 $y = x$ ，所以 B 就是 A 的 x 、 y 坐標對調；即使交點算不出來，也有 $x_1 + x_2 = x_1 + y_1 = 6$ 。

指數、對數不等式先看底數比 1 大還是小，再決定不等號要不要反向；對數還要先寫真數為正。

填充 8~11：估計、位數、最高位數字、衰退模型

- 8 $10^{0.6} = 10^{\frac{3}{5}}$ ，它的 5 次方是 $10^3 = 1000$ 。而 $3^5 = 243 < 1000 < 1024 = 4^5$ ，所以 $3 < 10^{0.6} < 4$ ， $n = 3$ 。

也可以用 $\log 3 \approx 0.4771 < 0.6 < 0.6020 \approx \log 4$ 判斷。

- 9 取 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ 。 $\log 2^{106} = 106 \times 0.3010 = 31.906$ ；因為 $\log 8 = 0.9030 < 0.906 < 0.9542 = \log 9$ ，所以 $8 \times 10^{31} < 2^{106} < 9 \times 10^{31}$ 。 $\log 3^{66} = 66 \times 0.4771 = 31.4886$ ；因為 $\log 3 = 0.4771 < 0.4886 < 0.6020 = \log 4$ ，所以 $3 \times 10^{31} < 3^{66} < 4 \times 10^{31}$ 。相加： $11 \times 10^{31} < 2^{106} + 3^{66} < 13 \times 10^{31}$ ，即介於 1.1×10^{32} 與 1.3×10^{32} 之間，是 33 位數。

兩個數各自都是 32 位數，但最高位數字相加超過 10 會進位；只看位數不看最高位數字，會誤答 32。

- 10 最高位數字為 2 的 12 位數滿足 $2 \times 10^{11} \leq 2^n < 3 \times 10^{11}$ 。取常用對數： $11 + \log 2 \leq n \log 2 < 11 + \log 3$ ，即 $11.3010 \leq 0.3010n < 11.4771$ 。 $\frac{11.3010}{0.3010} \approx 37.5$ ， $\frac{11.4771}{0.3010} \approx 38.1$ ，所以 $37.5 \leq n < 38.1$ (近似)，整數 $n = 38$ 。

驗算： $2^{38} = 274877906944$ ，確實是 12 位數、最高位是 2。

- 11 圖形過 $(0, 405)$ ： $k \cdot a^0 = 405$ ， $k = 405$ 。過 $(\frac{1}{2}, 270)$ ： $405 \cdot a^{\frac{1}{2}} = 270$ ， $a^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ ， $a = \frac{4}{9}$ 。所以 $y = 405 \left(\frac{4}{9}\right)^x$ ，是遞減函數。 $x = 2$ 時 $y = 405 \times \frac{16}{81} = 80$ ，還不到標準； $x = 3$ 時 $y = 405 \times \frac{64}{729} = \frac{320}{9} \approx 35.6 < 50$ 。所以要用藥 3 天才可以食用。

位數問題先寫成「介於 10 的幾次方之間」，再取常用對數；最高位數字看對數的小數部分落在哪兩個 $\log$ 值之間。

填充 12~15：對稱代換、換底表示、比大小、反求時間

- 12 令 $t = 2^x + 2^{-x}$ 。由算幾不等式 $t \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$ ；又 $t^2 = 4^x + 2 + 4^{-x}$ ，所以 $4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$ 。方程式成為 $4(t^2 - 2) - 12t + 13 = 0$ ，即 $4t^2 - 12t + 5 = 0$ ， $(2t - 1)(2t - 5) = 0$ ， $t = \frac{1}{2}$ (小於 2，不合) 或 $t = \frac{5}{2}$ 。再令 $u = 2^x > 0$ ： $u + \frac{1}{u} = \frac{5}{2}$ ， $2u^2 - 5u + 2 = 0$ ， $u = 2$ 或 $\frac{1}{2}$ ，所以 $x = 1$ 或 $x = -1$ 。

代換後要記得 $t \geq 2$ ， $t = \frac{1}{2}$ 那個根要捨去。



- 13 全部換成以 2 為底。 $\log_2 3 = a$ ； $\log_2 11 = \log_2 3 \cdot \log_3 11 = ab \cdot 99 = 3^2 \times 11$ ， $\log_2 99 = 2a + ab$ ； $66 = 2 \times 3 \times 11$ ， $\log_2 66 = 1 + a + ab$ 。所以 $\log_{66} 99 = \frac{\log_2 99}{\log_2 66} = \frac{2a + ab}{1 + a + ab}$ 。
- 14 底數 $0.7 < 1$ ， $\log_{0.7} x$ 遞減，且 $x > 1$ 時為負。 $a > b > 1000$ ，所以 $\log_{0.7} a < \log_{0.7} b < 0$ 。 p 是兩個負數乘積的正平方根， $p > 0$ ； q 是兩個負數的平均， $q < 0$ ，所以 $p > q$ 。又 $q = \frac{1}{2} \log_{0.7}(ab) = \log_{0.7} \sqrt{ab}$ ，由算幾不等式 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ ($a \neq b$ ，等號不成立)，再由遞減得 $r = \log_{0.7} \frac{a+b}{2} < \log_{0.7} \sqrt{ab} = q$ 。故 $p > q > r$ 。
底數小於 1 時，真數越大對數越小； p 不能直接對兩個負數用算幾不等式，要先看正負號。
- 15 3 小時有 70%： $1 - 2^{-3k} = 0.7$ ， $2^{-3k} = 0.3$ 。 T 小時有 99%： $1 - 2^{-kT} = 0.99$ ， $2^{-kT} = 0.01$ 。兩式取常用對數： $-3k \log 2 = \log 0.3 = \log 3 - 1 \approx -0.5229$ ， $-kT \log 2 = \log 0.01 = -2$ 。兩式相除： $\frac{T}{3} = \frac{2}{0.5229}$ ， $T = \frac{6}{0.5229} \approx 11.47$ ，四捨五入得 $T \approx 11.5$ 。
兩式相除把 k 和 $\log 2$ 一起消掉，不必先求 k 。

計算題 16：代換後求二次函數的極值

- 16 先看 $x^{\log 3}$ ：取常用對數， $\log(x^{\log 3}) = \log 3 \cdot \log x = \log(3^{\log x})$ ，所以 $x^{\log 3} = 3^{\log x}$ 。再看 $3^{\log(\sqrt{10}x)} = 3^{\frac{1}{2} + \log x} = \sqrt{3} \cdot 3^{\log x}$ 。令 $t = 3^{\log x}$ ，則 $f = t^2 - 18\sqrt{3}t = (t - 9\sqrt{3})^2 - 243$ 。範圍： $\frac{1}{10} \leq x \leq 1000$ 即 $-1 \leq \log x \leq 3$ ，所以 $\frac{1}{3} \leq t \leq 27$ 。頂點 $t = 9\sqrt{3} \approx 15.6$ 在範圍內，最小值 -243 ；此時 $3^{\log x} = 3^{\frac{5}{2}}$ ， $\log x = \frac{5}{2}$ ， $x = 10^{\frac{5}{2}} = 100\sqrt{10}$ 。最大值發生在離頂點較遠的端點： $9\sqrt{3} - \frac{1}{3} \approx 15.3$ ， $27 - 9\sqrt{3} \approx 11.4$ ，所以取 $t = \frac{1}{3}$ (即 $x = \frac{1}{10}$)，最大值 $\frac{1}{9} - 18\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} - 6\sqrt{3}$ 。
流傳版本的參考答案把最小值寫成 -234 ，但 $(9\sqrt{3})^2 = 243$ ，配方後的常數是 -243 ；產生極值的兩個 x 與最大值都與參考答案一致。另一端 $t = 27$ ($x = 1000$) 時 $f = 729 - 486\sqrt{3} \approx -112.8$ ，不是最大也不是最小。

看到 $x^{\log 3}$ 與 $3^{\log x}$ 先確認兩者相等，就能用同一個 t 代換；代換後一定要把 x 的範圍換成 t 的範圍，再比較頂點與兩端點。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自新竹高中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/hchs-114a-g11a-1