

新竹高中 114 學年度上學期 高一第一次段考



御藍教育

範圍：數與式（實數、絕對值、指數、常用對數） · 多選題 4 題（24 分）、填充題 9 題（54 分）、計算題 3 題（22 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/hchs-114a-g10-1

一、多選題（占 24 分；第 1 題至第 4 題，每題 6 分，6-4-2-0）

1 若 a 、 b 、 c 皆為實數，請選出錯誤的選項。

- (1) 若 $a > b$ ，則 $ac > bc$
- (2) 若 $a > b$ ，則 $a^2 > b^2$
- (3) 若 $a > b$ ，則 $a|c| > b|c|$
- (4) 若 $a > b$ ，則 $a + b > a - b$
- (5) 若 $a > b$ ，則 $\frac{a}{b} > 1$

2 在數線上，有五個點的坐標分別為 $A(\sqrt{11})$ 、 $B(\sqrt{13})$ 、 $C(\sqrt{15})$ 、 $D(\sqrt{17})$ 、 $E(\sqrt{19})$ ，若 $a = \overline{AC}$ 、 $b = \overline{BD}$ 、 $c = \overline{CE}$ ， $\overline{AE}$ 的中點為 M ， $\overline{BD}$ 的中點為 N ，請選出正確的選項。

- (1) $a = \sqrt{15} - \sqrt{11}$
- (2) $\frac{1}{b} = \frac{\sqrt{17} + \sqrt{13}}{4}$
- (3) $a < b$
- (4) $c < b < a$
- (5) M 在 N 的左邊且 N 在 C 的左邊

3 已知 $x > 0$ 、 $y > 0$ ，請選出正確的選項。

- (1) $x + \frac{4}{x}$ 之最小值為 4
- (2) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 之最小值為 2
- (3) $x + \frac{1}{x-1}$ 之最小值為 3
- (4) $x^2 + \frac{4}{x^2+2}$ 之最小值為 2
- (5) 若 $x + 2y = 4$ ，則 $3^x + 9^y$ 之最小值 27



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/hchs-114a-g10-1

4 請選出正確的選項：(已知 $\log 2 \approx 0.3010$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$ 、 $\log 7 \approx 0.8451$)

(1) 將 20250923 化成科學記號，並以 3 位有效數字表示的結果為 2.025×10^7

(2) 4^{50} 是 30 位正整數

(3) 3^{-20} 從小數點後第 20 位開始出現不為 0 的數字

(4) 若 $\log k = 9.8$ ，則 k 的最高位數字為 6

(5) 若 $\log a = -23.4$ ，則 a 從小數點後第 24 位開始出現不為 0 的數字

二、填充題 (占 54 分；第 5 題至第 13 題，答對 1~9 格依序得 8、16、24、30、36、42、46、50、54 分)

5 化簡 $10^{\frac{1}{2} \log 4 - 2 \log 3} + (0.125)^4 \cdot 4^6 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6 計算 $3.\overline{45} \times 0.\overline{24} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(以最簡分數表示)

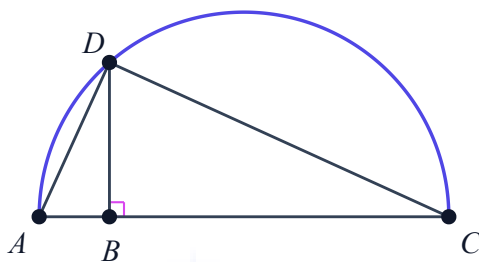
7 在數線上，已知 $A(x)$ ， $B(y)$ 為數線上兩點，且 $x < y$ 。點 $P(17)$ 在 $\overline{AB}$ 上，點 $Q(47)$ 在 $\overline{AB}$ 外，且滿足 $\overline{AP} : \overline{BP} = \overline{AQ} : \overline{BQ} = 5 : 3$ ，則數對 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8 已知 a 是有理數，且 $\sqrt{21 - 12\sqrt{3}} + a\sqrt{31 - 3\sqrt{48}}$ 也是有理數，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9 求滿足方程式 $|x - 1| + 2|x - 3| = x + 4$ 的所有 x 值之總和為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 10 如圖， $\overline{AB} = 1 + \sqrt{2}$ ， $\overline{BC} = 6 + 4\sqrt{2}$ ， B 在 $\overline{AC}$ 上，以 $\overline{AC}$ 為直徑作半圓，並過 B 作垂直於 $\overline{AC}$ 的直線交半圓於 D 點。若 $\overline{AD} = a + b\sqrt{2}$ （其中 a, b 為有理數），則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 11 若 $x = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$ ，則 $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 12 若實數 a 滿足 $17^{17} = a \times 17^{16} + 17^{15}$ ，則 $\frac{a}{18} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 13 設 a, b, c 均為實數， $a \neq 0$ ，若不等式 $b \leq |ax + 3| \leq c$ 的解為 $-7 \leq x \leq -2$ 或 $5 \leq x \leq 10$ ，則 $a + b + c$ 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、計算題（占 22 分；第 14 題至第 16 題）

- 14 設兩正數 $a = \sqrt{7} + \sqrt{5}$ 、 $b = \sqrt{7} - \sqrt{5}$ ，試求下列各值。(1) $a^3 + b^3 = ?$ (3 分) (2) $a^6 + b^6 = ?$ (3 分) (3) 若 $(\sqrt{7} + \sqrt{5})^6 = P + \alpha$ 且 P 為正整數， $0 \leq \alpha < 1$ ，則 $P = ?$ (3 分)



- 15 生物學家發現一種新型細菌數量每經過 1 日增加 a 倍，且 2 日後細菌數為 500 個， $4\frac{1}{2}$ 日後細菌數為 121500 個，則 (1) 試選出 a 之值。(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 8 (E) 10 (單選，2 分) (2) 試求 5 日後細菌數。(3 分)

- 16 若某商品年銷售量 x (公噸) 與廣告行銷費用 m (萬元) 滿足 $x = 4 - \frac{k}{m+1}$ ， $m \geq 0$ ，若不行銷時 (即 $m = 0$) 年銷量為 2 公噸。該產品每年不管生產幾公噸需花費固定成本 8 萬元，而每生產 1 公噸需再增加成本 16 萬元。廠商將每公噸產品的銷售價格定為每公噸產品之年平均生產成本的 1.5 倍。試回答下列問題：(1) 求 k 的值。(2 分) (2) 將該產品的年銷售利潤 P (萬元) 表示為廣告行銷費用 m (萬元) 的函數。(即用 m 表示利潤) (3 分) 註：利潤等於收入減去成本及行銷費用。(3) 求使年銷售利潤最大時的廣告行銷費用以及最大利潤為何？(3 分)

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/hchs-114a-g10-1

答案一覽

第 1 題 (1)(2)(3)(4)(5)

第 2 題 (1)(2)(4)(5)

第 3 題 (1)(2)

第 4 題 (4)(5)

第 5 題 $\frac{11}{9}$

第 6 題 $\frac{38}{45}$

第 7 題 (7, 23)

第 8 題 $-\frac{2}{3}$

第 9 題 $\frac{25}{4}$

第 10 題 (3, 2)

第 11 題 4

第 12 題 $\frac{16}{17}$

第 13 題 22

第 14 題 (1) $44\sqrt{7}$; (2) 13536 ; (3) 13535

第 15 題 (1) (D) ; (2) 364500 個

第 16 題 (1) 2 ; (2) $P(m) = 36 - \left(m + \frac{16}{m+1}\right)$; (3) $m = 3$ 萬元時，最大利潤 29 萬元

多選 1~2：不等式的性質、根式比大小

1 答案 (1)(2)(3)(4)(5)，五個都是錯誤敘述，各舉一個反例。(1) $c = 0$ 時 $ac = bc$; $c < 0$ 時不等號反向。(2) $a = 0$, $b = -1$: $a^2 = 0 < 1 = b^2$ 。(3) $c = 0$ 時兩邊都是 0。(4) $a + b > a - b$ 等價於 $b > 0$ ，取 $a = 1$, $b = -1$ 就不成立。(5) $a = 1$, $b = -1$: $\frac{a}{b} = -1 < 1$ 。

不等式兩邊同乘、同除、平方時，一定要先確認正負。

2 答案 (1)(2)(4)(5)。(1) 對 : $a = \sqrt{15} - \sqrt{11}$ 。(2) 對 : $b = \sqrt{17} - \sqrt{13}$, $\frac{1}{b} = \frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{17-13} = \frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{4}$ 。(3) 錯。(4) 對 : 有理化得 $a = \frac{4}{\sqrt{15}+\sqrt{11}}$ 、 $b = \frac{4}{\sqrt{17}+\sqrt{13}}$ 、 $c = \frac{4}{\sqrt{19}+\sqrt{15}}$ ，分子相同，分母越大值越小，所以 $c < b < a$ 。(5) 對 : $M = \frac{\sqrt{11}+\sqrt{19}}{2}$ 、 $N = \frac{\sqrt{13}+\sqrt{17}}{2}$ ，平方後分別是 $\frac{30+2\sqrt{209}}{4}$ 與 $\frac{30+2\sqrt{221}}{4}$ ，所以 $M < N$; 又 $N^2 = \frac{30+2\sqrt{221}}{4} < \frac{30+2\times 15}{4} = 15 = C^2$ (因 $\sqrt{221} < \sqrt{225} = 15$)，所以 $N < C$ 。

兩根式相減比大小，先有理化成「同分子」再比分母。



多選 3~4：算幾不等式、常用對數

- 3 答案 (1)(2)。(1) 對： $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{4} = 4$ ， $x = 2$ 時等號成立。(2) 對： $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$ ， $x = 1$ 時等號成立。(3) 錯：題目只給 $x > 0$ ，當 $0 < x < 1$ 時 $x - 1 < 0$ ， x 越靠近 1， $\frac{1}{x-1}$ 越小且沒有下界，所以沒有最小值 ($x > 1$ 時最小才是 3)。(4) 錯： $x^2 + \frac{4}{x^2+2} = (x^2 + 2) + \frac{4}{x^2+2} - 2 \geq 4 - 2 = 2$ ，但等號要 $x^2 + 2 = 2$ 即 $x = 0$ ，不合 $x > 0$ ，取不到 2。(5) 錯： $3^x + 9^y = 3^x + 3^{2y} \geq 2\sqrt{3^{x+2y}} = 2\sqrt{3^4} = 18$ ， $x = 2y = 2$ 時等號成立，最小值是 18 不是 27。

算幾不等式求極值要同時確認兩件事：乘積是定值、等號做得到。

- 4 答案 (4)(5)。(1) 錯：取 3 位有效數字是 2.03×10^7 (2.025 是 4 位)。(2) 錯： $\log 4^{50} = 100 \log 2 \approx 30.10$ ，所以 4^{50} 是 31 位數。(3) 錯： $\log 3^{-20} = -20 \times 0.4771 = -9.542 = -10 + 0.458$ ， $3^{-20} = 10^{0.458} \times 10^{-10}$ ，從小數點後第 10 位開始不為 0。(4) 對： $k = 10^{0.8} \times 10^9$ ，而 $\log 6 = \log 2 + \log 3 \approx 0.7781 < 0.8 < 0.8451 = \log 7$ ，所以 $6 < 10^{0.8} < 7$ ，最高位數字是 6。(5) 對： $-23.4 = -24 + 0.6$ ， $a = 10^{0.6} \times 10^{-24}$ ， $1 \leq 10^{0.6} < 10$ ，從小數點後第 24 位開始不為 0。

負的 log 值要先改寫成「負整數 + 介於 0 與 1 之間的小數」再判讀。

填充 5~9：對數運算、循環小數、分點、雙重根號、絕對值

- 5 $\frac{1}{2} \log 4 - 2 \log 3 = \log 2 - \log 9 = \log \frac{2}{9}$ ，所以 $10^{\log \frac{2}{9}} = \frac{2}{9}$ 。(0.125)⁴ · 4⁶ = (2⁻³)⁴ · (2²)⁶ = 2⁻¹² · 2¹² = 1。相加得 $\frac{2}{9} + 1 = \frac{11}{9}$ 。

- 6 $3.\overline{45} = 3 + \frac{45}{99} = 3 + \frac{5}{11} = \frac{38}{11}$ ； $0.\overline{24} = \frac{24-2}{90} = \frac{11}{45}$ 。相乘 $\frac{38}{11} \times \frac{11}{45} = \frac{38}{45}$ 。

- 7 P 是 $\overline{AB}$ 的內分點， $\overline{AP} : \overline{PB} = 5 : 3$ ，所以 $\frac{3x+5y}{8} = 17$ ，即 $3x + 5y = 136$ 。 Q 在 $\overline{AB}$ 外且 $\overline{AQ} > \overline{BQ}$ ，所以 Q 在 B 的右邊， B 是 $\overline{AQ}$ 的內分點， $\overline{AB} : \overline{BQ} = 2 : 3$ ，得 $y = \frac{3x+2 \cdot 47}{5}$ ，即 $5y - 3x = 94$ 。兩式相加 $10y = 230$ ， $y = 23$ ， $x = 7$ 。答案 (7, 23)。

流傳版本的參考答案印作「(7, 123)」，應為 (7, 23) (可驗算： $\frac{3 \cdot 7 + 5 \cdot 23}{8} = 17$)。

- 8 $\sqrt{21 - 12\sqrt{3}} = \sqrt{21 - 2\sqrt{108}}$ ，找和為 21、積為 108 的兩數 12、9，得 $\sqrt{12} - \sqrt{9} = 2\sqrt{3} - 3$ 。 $3\sqrt{48} = 12\sqrt{3}$ ， $\sqrt{31 - 2\sqrt{108}}$ 找和為 31、積為 108 的 27、4，得 $3\sqrt{3} - 2$ 。原式 = $(2\sqrt{3} - 3) + a(3\sqrt{3} - 2) = (2 + 3a)\sqrt{3} - 3 - 2a$ ，要是有理數就要 $2 + 3a = 0$ ， $a = -\frac{2}{3}$ 。

化雙重根號一律寫成「大減小」，開出來才是正數。

- 9 以 1、3 分段。 $x < 1$ ： $(1-x) + 2(3-x) = 7-3x = x+4$ ， $x = \frac{3}{4}$ ，合。 $1 \leq x < 3$ ： $(x-1) + 2(3-x) = 5-x = x+4$ ， $x = \frac{1}{2}$ ，不在範圍內，捨去。 $x \geq 3$ ： $(x-1) + 2(x-3) = 3x-7 = x+4$ ， $x = \frac{11}{2}$ ，合。總和 $\frac{3}{4} + \frac{11}{2} = \frac{25}{4}$ 。

每一段解出來都要回頭檢查有沒有落在該段範圍。

填充 10~13：幾何與根式、指數律、由解反求係數

- 10 $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 7 + 5\sqrt{2}$ 。半圓上的圓周角是直角， $\angle ADC = 90^\circ$ ； $\triangle ABD$ 與 $\triangle ADC$ 共用 $\angle A$ 且各有一個直角，所以相似，得 $\overline{AD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = (1 + \sqrt{2})(7 + 5\sqrt{2}) = 17 + 12\sqrt{2}$ 。 $\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$ 找和 17、積 72 的 9、8， $\overline{AD} = 3 + \sqrt{8} = 3 + 2\sqrt{2}$ ， $(a, b) = (3, 2)$ 。



11 $x^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$, $1-x^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ 。通分：原式 $= \frac{x^2+(1-x^2)}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ 。而 $x^2(1-x^2) = \frac{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{16} = \frac{1}{16}$, $x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{4}$, 所以原式 $= 4$ 。

先通分，不必把 x 化成雙重根號的形式。

12 兩邊同除以 17^{15} : $17^2 = 17a + 1$, $17a = 288$, $a = \frac{288}{17}$ 。所以 $\frac{a}{18} = \frac{16}{17}$ 。

13 $|ax+3| = |a| \cdot |x+\frac{3}{a}|$, 它的值只跟 x 到 $-\frac{3}{a}$ 的距離有關, 所以解集合對稱於 $x = -\frac{3}{a}$ 。兩段 $[-7, -2]$ 、 $[5, 10]$ 的對稱中心是 $\frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}$, 得 $-\frac{3}{a} = \frac{3}{2}$, $a = -2$ 。此時 $|-2x+3| = 2|x-\frac{3}{2}|$: 內側端點 $x = -2$ 代入得 $b = 2 \times \frac{7}{2} = 7$, 外側端點 $x = -7$ 代入得 $c = 2 \times \frac{17}{2} = 17$ 。 $a+b+c = -2+7+17 = 22$ 。

計算 14~16

14 $a+b = 2\sqrt{7}$, $ab = 7-5 = 2$ 。(1) $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 56\sqrt{7} - 12\sqrt{7} = 44\sqrt{7}$ 。(2) $a^6+b^6 = (a^3+b^3)^2 - 2(ab)^3 = 44^2 \times 7 - 2 \times 8 = 13552 - 16 = 13536$ 。(3) 因 $7 < (1+\sqrt{5})^2 = 6+2\sqrt{5}$, 得 $\sqrt{7} < 1+\sqrt{5}$, 所以 $0 < b < 1$, $0 < b^6 < 1$ 。 $a^6 = 13536 - b^6 = 13535 + (1-b^6)$, 其中 $0 < 1-b^6 < 1$, 所以 $P = 13535$ 。

a^6 本身不好算, 靠「 a^6+b^6 是整數、 b^6 很小」夾出整數部分。

15 「每經過 1 日增加 a 倍」是每天變成前一天的 $(1+a)$ 倍。設最初 N 個: $N(1+a)^2 = 500$ 、 $N(1+a)^{\frac{9}{2}} = 121500$ 。相除 $(1+a)^{\frac{5}{2}} = 243 = 3^5$, 所以 $(1+a)^{\frac{1}{2}} = 3$, $1+a = 9$ 。(1) $a = 8$, 選 (D)。(2) 5 日後是 2 日後再過 3 日: $500 \times 9^3 = 364500$ 個。

「增加 a 倍」與「變成 a 倍」不同; 若當成變成 a 倍會算出 9, 選項裡沒有。

16 (1) $m = 0$ 時 $x = 4-k = 2$, $k = 2$ 。(2) 年生產成本 $8+16x$, 每公噸售價 $1.5 \times \frac{8+16x}{x}$, 年收入 $= 1.5(8+16x)$ 。利潤 $P = 1.5(8+16x) - (8+16x) - m = 4+8x-m$ 。代入 $x = 4 - \frac{2}{m+1}$: $P(m) = 36 - \frac{16}{m+1} - m = 36 - (m + \frac{16}{m+1})$ 。(3) $m + \frac{16}{m+1} = (m+1) + \frac{16}{m+1} - 1 \geq 2\sqrt{16} - 1 = 7$, 等號在 $m+1 = 4$ 即 $m = 3$ 時成立。所以廣告行銷費用 3 萬元時利潤最大, 最大利潤 $36-7 = 29$ 萬元。把 m 湊成 $m+1$, 讓兩項相乘成為定值 16。

應用題先把每個量用同一個變數寫出來, 再判斷要用哪個工具: 指數成長用倍數相除, 求極值用算幾不等式並確認等號。

你們學校的段考卷也想要詳解? 考完把題目頁拍照或掃描上傳, 我們收到後會盡快做好放上來, 一樣免費下載。

上傳: royalblue-education.com/school-exams/submit (上傳前可以先把姓名、座號遮掉)

本卷題目取自新竹高中 114 學年度上學期高一第一次段考; 排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號, 看錯在哪幾章, 註冊後直接從那幾章開始練

網頁版: royalblue-education.com/school-exams/hchs-114a-g10-1

孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/hchs-114a-g10-1