

北一女中 114 學年度上學期 高一第一次段考



御藍教育

範圍：數與式（實數、絕對值、指數、常用對數） · 多選題 2 題（20 分）、填充題 9 題（54 分）、計算證明題 3 題（26 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/fg-114a-g10-1

一、多選題（每題 10 分，每個選項 2 分）

1 請問下列敘述哪些正確？

- (1) $1.\overline{234} > 1.2\overline{34}$
- (2) $\frac{329}{990}$ 的小數點後第 2025 位是 2
- (3) 若 a^8 和 a^{13} 都是有理數，則 a 一定是有理數
- (4) 任兩個相異有理數間都可以找到無限多個有理數
- (5) 無理數在四則運算下都有封閉性

2 在數線上有給定的五點 $O(0)$ 、 $U(1)$ 、 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $C\left(\frac{2a+3b}{5}\right)$ ，其中 $0 < a < b$ ，且 a, b 為有理數。請問下列敘述哪些正確？

- (1) C 會在 $D\left(\frac{3a+5b}{8}\right)$ 的左邊
- (2) $E\left(\frac{3a+4b}{8}\right)$ 會落在 A 和 B 之間
- (3) $F\left(\frac{13a-5b}{8}\right)$ 會落在 A 的左邊
- (4) 若 P 點為 A 和 B 的內分點，且滿足 $\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 3$ ，則 C 點即為 P 點
- (5) $\sqrt[8]{ab}$ 的位置可以使用尺規作圖作出

二、填充題（每題 6 分）

3 若 $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a^3}} \div \left(a^{\frac{3}{2}} \div a^{\frac{4}{3}}\right)^2 = a^n$ ，其中 $a > 0$ ，則 $n =$ _____。

4 $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1} =$ _____。



5 $\sqrt{2025 + \sqrt{2025 + \sqrt{2025}}}$ 的整數部分為 ____。

6 若 3^{100} 可表示為 10^a ，且為 b 位數，則數對 (a, b) 為 ____。(請以常用對數形式來表示 a)

7 若絕對值不等式 $|-3x + a| \geq b$ 的解範圍如下圖，則數對 (a, b) 為 ____。



8 某人測得 A 星球的質量約為 1.99×10^{30} 公斤， B 星球的質量約為 5.97×10^{24} 公斤，則 A 星球的質量約是 B 星球的 ____ 倍。(請表示成科學記號，並取三位有效數字)

9 某科學家在培養皿中養細菌，這種細菌的數量每過 12 小時就會增加 a 倍。他觀察在開始培養的 4 天後，細菌群有 1280 隻；開始培養的 6.5 天後，細菌群有 40960 隻。則最初培養皿內的細菌有 ____ 隻。

10 若 $a = 3^{50}$ ， $b = 5^{40}$ ， $c = 7^{30}$ ，則 a, b, c 的大小關係為 ____。

11 $||x - 2| - |x + 1|| = x$ 的解為 ____。



三、計算證明題 (共 26 分)

- 12 令 $x = 9 - \sqrt{80}$ ，試求 (1) $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ 的值。(4 分) (2) $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$ 的值。(6 分)

- 13 如下圖所示，大綠想用木柵欄（粗線部分）在臨河的一片草地圍出一塊 1800 平方公尺的長方形牧場（靠河的一側不需要柵欄），以飼養羊群，請問：(1) 她至少需要準備幾公尺的木柵欄？(4 分) (2) 此時長方形牧場的長和寬分別是多少？(6 分)



- 14 請利用 $\sqrt{3}$ 不是有理數，以及有理數的封閉性，來證明 $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ 不是有理數。(6 分)



網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/fg-114a-g10-1

答案一覽

- 第 1 題 (2)(3)(4)
 第 2 題 (1)(3)(5)
 第 3 題 $\frac{5}{6}$
 第 4 題 $-\frac{\sqrt{6}}{2}$
 第 5 題 45
 第 6 題 $(\log 3^{100}, 48)$
 第 7 題 $(-6, 12)$
 第 8 題 3.33×10^5
 第 9 題 5
 第 10 題 $a < c < b$
 第 11 題 $x = 3, 1, \frac{1}{3}$
 第 12 題 (1) $2\sqrt{5}$; (2) $34\sqrt{5}$
 第 13 題 (1) 120 公尺; (2) 長 60 公尺、寬 30 公尺
 第 14 題 見詳解 (反證法)

多選題：實數與數線

- 1 答案 (2)(3)(4)。 (1) 錯：左邊 $1.234234\cdots$ ，右邊 $1.23434\cdots$ ，第四位小數 $2 < 3$ ，左邊比較小。 (2) 對： $\frac{329}{990} = 0.332$ ，小數點後第 1 位是 3，從第 2 位起「3、2」輪流，偶數位是 3、奇數位是 2，第 2025 位是奇數位，所以是 2。 (3) 對： $a = 0$ 時顯然有理； $a \neq 0$ 時 $a = \frac{(a^{13})^5}{(a^8)^8}$ ($65 - 64 = 1$)，有理數相乘除還是有理數。 (4) 對： $p < q$ 之間可以一直取中點 $\frac{p+q}{2}$ 。 (5) 錯： $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ 是有理數，所以無理數對加法不封閉。
 第 (3) 的關鍵是 8 和 13 互質，能湊出 $13 \times 5 - 8 \times 8 = 1$ 。
- 2 答案 (1)(3)(5)。 $C = \frac{2a+3b}{5}$ 是把 $\overline{AB}$ 分成 $\overline{AC} : \overline{CB} = 3 : 2$ 的內分點。 (1) 對： $D - C = \frac{5(3a+5b)-8(2a+3b)}{40} = \frac{b-a}{40} > 0$ ， C 在 D 左邊。 (2) 錯： $E - a = \frac{4b-5a}{8}$ ，當 $b < \frac{5}{4}a$ 時是負的，例如 $a = 1$ ， $b = 1.1$ 得 $E = 0.925 < a$ 。 (3) 對： $F - a = \frac{5a-5b}{8} < 0$ 。 (4) 錯： $\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 3$ 的內分點是 $\frac{3a+2b}{5}$ ，不是 C 。 (5) 對：有單位長 $\overline{OU} = 1$ ，幾何平均 $\sqrt{xy}$ 可以用半圓作出；先作 $\sqrt{ab}$ ，再作 $\sqrt{\sqrt{ab} \cdot 1}$ 、 $\sqrt[4]{\sqrt{ab} \cdot 1}$ ，就得到 $\sqrt[8]{ab}$ 。
 判斷分點在哪一側，最穩的做法是直接相減看正負。



填充 3~7：指數律、有理化與絕對值

- 3 $\sqrt[3]{a^2 \cdot a^{\frac{3}{2}}} = a^{\frac{7}{6}} = a^{\frac{7}{6}}$; $\left(a^{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^2 = a^{\frac{1}{3}}$ 。相除： $n = \frac{7}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ 。
- 4 令 $u = \sqrt{2} + 1$ ，兩項是 $\frac{1}{\sqrt{3+u}} + \frac{1}{\sqrt{3-u}} = \frac{2\sqrt{3}}{3-u^2}$ 。 $u^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ ，所以分母 $3 - u^2 = -2\sqrt{2}$ ，答案 $\frac{2\sqrt{3}}{-2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ 。
兩個分母只差 u 前面的正負號，直接通分比一項一項有理化快。
- 5 $\sqrt{2025} = 45$ ， $\sqrt{2025 + 45} = \sqrt{2070}$ 介於 45 和 46 之間。所以 $2070 < 2025 + \sqrt{2070} < 2071$ ，而 $45^2 = 2025$ 、 $46^2 = 2116$ ，開根號後介於 45 和 46 之間，整數部分是 45。
- 6 $3^{100} = 10^{\log 3^{100}}$ ，所以 $a = \log 3^{100} = 100 \log 3 \approx 47.71$ 。 $10^{47} < 3^{100} < 10^{48}$ ，是 48 位數。
題目要求 a 寫成常用對數形式，答案寫 $\log 3^{100}$ ，不要寫近似值。
- 7 $|-3x + a| = |3x - a| \geq b$ 的解是 $x \leq \frac{a-b}{3}$ 或 $x \geq \frac{a+b}{3}$ 。對照圖： $\frac{a-b}{3} = -6$ 、 $\frac{a+b}{3} = 2$ ，得 $a - b = -18$ 、 $a + b = 6$ ，解出 $(a, b) = (-6, 12)$ 。

填充 8~11：指數成長、用 log 比大小、分段討論

- 8 $\frac{1.99 \times 10^{30}}{5.97 \times 10^{24}} = \frac{1.99}{5.97} \times 10^6 \approx 0.333 \times 10^6 = 3.33 \times 10^5$ 。
 $1.99 \div 5.97$ 剛好約是 $\frac{1}{3}$ ，要記得把 0.333 調成 3.33，指數少 1。
- 9 設最初有 N 隻，每 12 小時變成原本的 a 倍（原卷參考答案就是這個意思）。4 天=8 個 12 小時，6.5 天=13 個 12 小時： $Na^8 = 1280$ 、 $Na^{13} = 40960$ 。相除得 $a^5 = 32$ ， $a = 2$ ； $N = \frac{1280}{2^8} = 5$ 。
- 10 取 log： $\log a = 50 \log 3 \approx 23.86$ ， $\log b = 40 \log 5 \approx 27.96$ ， $\log c = 30 \log 7 \approx 25.35$ 。log 越大數越大，所以 $a < c < b$ 。
- 11 左邊是絕對值，所以 $x \geq 0$ 。分兩段： $x \geq 2$ 時 $|(x-2) - (x+1)| = 3 = x$ ，得 $x = 3$ ； $0 \leq x < 2$ 時 $|(2-x) - (x+1)| = |1-2x| = x$ ，得 $1-2x = x$ 即 $x = \frac{1}{3}$ ，或 $2x-1 = x$ 即 $x = 1$ ，兩個都在範圍內。答案 $x = 3, 1, \frac{1}{3}$ 。
先用「右邊等於絕對值，所以 $x \geq 0$ 」砍掉 $x < -1$ 那一段，可以少算一段。

計算證明 12~14

- 12 (1) $9 - \sqrt{80} = 9 - 2\sqrt{20} = (\sqrt{5} - 2)^2$ ，所以 $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} - 2$ ， $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5} + 2$ ，相加得 $2\sqrt{5}$ 。(2) $x + x^{-1} = (9 - \sqrt{80}) + (9 + \sqrt{80}) = 18$ 。用立方和： $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)(x - 1 + x^{-1}) = 2\sqrt{5} \times 17 = 34\sqrt{5}$ 。
 x^{-1} 就是 $9 + \sqrt{80}$ （兩者相乘 $81 - 80 = 1$ ），不用另外有理化。
- 13 設垂直河岸的兩邊長 x 、平行河岸的一邊長 y ，則 $xy = 1800$ ，柵欄長 $2x + y$ 。由算幾不等式 $\frac{2x+y}{2} \geq \sqrt{2x \cdot y} = \sqrt{3600} = 60$ ，所以 $2x + y \geq 120$ 。(1) 至少 120 公尺。(2) 等號在 $2x = y$ 時成立， $2x = y = 60$ ，所以平行河岸的長是 60 公尺、垂直河岸的寬是 30 公尺。
兩項相乘 $2x \cdot y = 3600$ 是定值，等號也做得到，這兩件事都要確認。



- 14 用反證法。假設 $\sqrt{6} + \sqrt{2} = k$ 是有理數。兩邊平方： $8 + 2\sqrt{12} = 8 + 4\sqrt{3} = k^2$ ，所以 $\sqrt{3} = \frac{k^2-8}{4} \cdot k$ 是有理數，有理數在四則運算下封閉，所以 $\frac{k^2-8}{4}$ 是有理數，這和 $\sqrt{3}$ 不是有理數矛盾。故 $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ 不是有理數。

原卷參考答案最後一句誤寫成「應為有理數」，結論應該是「不是有理數」。

計算證明題照順序寫：設、推、用到哪個性質、得到矛盾或結論，每一步都寫出理由。

你們學校的段考卷也想要詳解？考完把題目頁拍照或掃描上傳，我們收到後會盡快做好放上來，一樣免費下載。

上傳：royalblue-education.com/school-exams/submit（上傳前可以先把姓名、座號遮掉）

本卷題目取自北一女中 114 學年度上學期高一第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

御藍教育

ROYAL BLUE • EDUCATION

