

大直高中 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數（弧度量、三角函數的圖形、和差角與倍角半角公式、正餘弦的疊合） · 單選題 5 題（20 分）、多選題 4 題（24 分）、填充題 8 題（48 分）、混合題 1 題組 2 小題（8 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/dcsh-114a-g11a-1

第壹部分：選擇（填）題（占 92 分） | 一、單選題（占 20 分）說明：第 1 題至第 5 題，每題 4 分。

1 下列各選項的值何者最大？

- (1) $\sin \frac{\pi}{6}$
- (2) $\cos \frac{\pi}{5}$
- (3) $\sin 1$
- (4) $\cos 1$
- (5) $\sin 2$

2 坐標平面上兩直線 L_1 、 L_2 的斜率分別為 3 及 -2 ，則下列何者為兩條直線的銳夾角？

- (1) 15°
- (2) 30°
- (3) 45°
- (4) 60°
- (5) 75°

3 要得到函數 $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的圖形，只需將 $y = \sin 2x$ 的圖形。

- (1) 向右平移 $\frac{\pi}{8}$
- (2) 向左平移 $\frac{\pi}{8}$
- (3) 向右平移 $\frac{\pi}{4}$
- (4) 向左平移 $\frac{\pi}{4}$
- (5) 向上平移 $\frac{\pi}{4}$



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/dcsh-114a-g11a-1

4 下列各選項的值何者最小？

- (1) $2 \cos^2 40^\circ - 1$
- (2) $\cos^2 35^\circ - \sin^2 35^\circ$
- (3) $2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ$
- (4) $2 \sin^2 70^\circ - 1$
- (5) $\frac{2 \tan 25^\circ}{1 - \tan^2 25^\circ}$

5 試問有多少個實數 x 滿足 $\sin 2x + \cos 2x = \frac{1}{2} + \sin x$ 且 $0 \leq x \leq 2\pi$ ？

- (1) 1 個
- (2) 2 個
- (3) 3 個
- (4) 4 個
- (5) 5 個

二、多選題（占 24 分）說明：第 6 題至第 9 題，每題 6 分。（6-4-2-0）

6 試選出下列正確的選項。

- (1) $\cos \pi = 0$
- (2) $\sin \frac{79\pi}{5} < 0$
- (3) 30° 弧的最小正同界角為 $30 - 8\pi$ 弧
- (4) $\cos \frac{6\pi}{7} = \sin \frac{8\pi}{7}$
- (5) $\sin \pi^2 > \cos \pi^2$

7 若 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ，且 $\cos \theta = \frac{3}{4}$ ，則下列選項何者是正確的？

- (1) $\sin 2\theta = \frac{3\sqrt{7}}{8}$
- (2) $\cos 2\theta = \frac{1}{8}$
- (3) $\cos 3\theta = \frac{9}{16}$
- (4) $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{14}}{4}$
- (5) $\tan \frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{7}}{7}$



8 關於函數 $y = f(x) = 4 \sin x + 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ 的敘述，下列選項何者正確？

- (1) 週期為 2π
- (2) 函數有最大值 $2\sqrt{5}$
- (3) 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 有最大值
- (4) 圖形對稱於直線 $x = \frac{4\pi}{3}$
- (5) 函數 $y = |f(x)|$ 的週期為 $\frac{\pi}{2}$

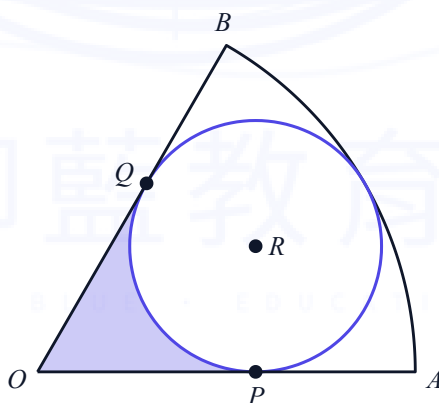
9 已知 x 為實數，下列各選項中的方程式何者無解？

- (1) $2 \sin x + 3 \cos x = 4$
- (2) $\cos x - 2 \sin x \geq 3$
- (3) $4 \cos x - \sin x = -4$
- (4) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + 1$
- (5) $\sin x - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$

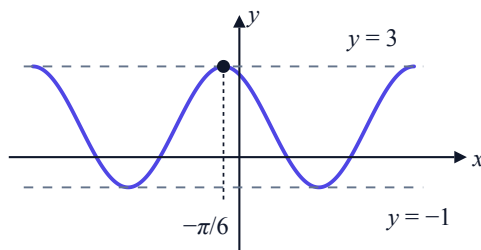
三、填充題（占 48 分）說明：第 10 題至第 17 題，每格 6 分。

10 求 $\cos \frac{100\pi}{3} + \sin \frac{19\pi}{6} + \tan \frac{13\pi}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11 如圖，扇形 OAB 的圓心角為 $\frac{\pi}{3}$ 弧，半徑 $\overline{OA} = \overline{OB} = 9$ ，有一圓內切於扇形 OAB ， P, Q 分別為與 $\overline{OA}, \overline{OB}$ 的切點，求塗色區域面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 12 設 x 為實數時，若將 $y = f(x) = a \sin x + b \cos x + c$ 的部分圖形如右，求數組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 13 設 $y = \cos x + \sqrt{3} \sin x + 2$ ，且 $\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{5}{3}\pi$ ，則當 $x = \theta$ (徑) 時， y 有最大值 M ，求數對 $(\theta, M) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 14 $\triangle ABC$ 中， $\tan B = 1$ ， $\tan C = 2$ ，則 $\sin A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 15 若將函數 $y = \tan\left(bx + \frac{\pi}{4}\right)$ ($b > 0$) 的圖形向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 個單位長後，與函數 $y = \tan\left(bx + \frac{\pi}{6}\right)$ 的圖形重合，則 b 的最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 16 有一四邊形 $ABCD$ ，其中 $\angle D$ 為直角， $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{CD} = 5$ ， $\overline{AD} = 12$ ， $\cos \angle BAD = \frac{4}{5}$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 17 若 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ，則函數 $y = \sin 2x + \sin^2 x$ 的最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

第貳部分：混合題（占 8 分）說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿



使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18－19 題組 國慶設計戰機衝場噴射彩煙的表演，規劃讓一架戰機通過總統府上方時開始噴出彩煙，並讓戰機依序噴出紅藍白三種不同顏色彩煙，若讓戰機維持距地面 200 公尺的固定高度，並希望讓站在總統府正下方觀禮臺的貴賓可以看到三種顏色的彩煙有一樣的視角（忽略人的身高）。

18 若紅色彩煙的長度為 100 公尺，試問整段紅色彩煙的視角 θ 之正切值為何？（單選題，2 分）

- (1) $\frac{1}{2}$
- (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (3) 1
- (4) $\sqrt{3}$
- (5) 2

19 承 18 題，要滿足三種顏色的彩煙有一樣的視角，則藍色彩煙噴出多少公尺的長度？（非選擇題，6 分）



御藍教育

ROYAL BLUE EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/dcsh-114a-g11a-1

答案一覽

- 第 1 題 (5)
第 2 題 (3)
第 3 題 (2)
第 4 題 (1)
第 5 題 (4)
第 6 題 (2)(3)(5)
第 7 題 (2)(5)
第 8 題 (1)(3)(4)
第 9 題 (1)(2)(4)
第 10 題 0
第 11 題 $9\sqrt{3} - 3\pi$
第 12 題 $(-1, \sqrt{3}, 1)$
第 13 題 $\left(\frac{2\pi}{3}, 3\right)$
第 14 題 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
第 15 題 $\frac{1}{2}$
第 16 題 16
第 17 題 $\frac{3}{2}$
第 18 題 (1)
第 19 題 $\frac{500}{3}$ 公尺

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)

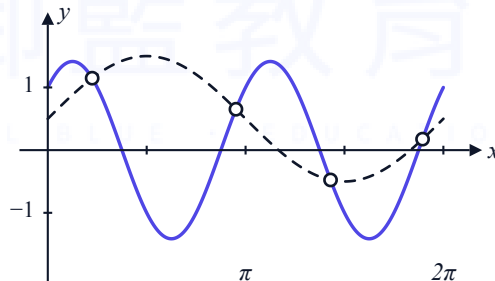


勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/dcsh-114a-g11a-1

單選題 (第 1~5 題)：弧度角比大小、夾角、平移、倍角公式、數交點

- 1 答案 (5)。把五個數都換成銳角的正弦再比：1 徑約 57.3° 、2 徑約 114.6° 。(1) $\sin \frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ$ ；(2) $\cos \frac{\pi}{5} = \cos 36^\circ = \sin 54^\circ$ ；(3) $\sin 1 \approx \sin 57.3^\circ$ ；(4) $\cos 1 \approx \cos 57.3^\circ = \sin 32.7^\circ$ ；(5) $\sin 2 \approx \sin 114.6^\circ = \sin 65.4^\circ$ 。銳角的正弦隨角度變大而變大， 65.4° 最大，所以 $\sin 2$ 最大。
沒有度的記號時單位是徑， $\sin 2$ 不是 $\sin 2^\circ$ 。五個值約為 0.5、0.809、0.841、0.540、0.909。
- 2 答案 (3)。設兩直線的斜角分別為 α 、 β ，則 $\tan \alpha = 3$ 、 $\tan \beta = -2$ 。由正切的差角公式， $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{3 - (-2)}{1 + 3 \times (-2)} = \frac{5}{-5} = -1$ 。兩直線的夾角一個是 135° ，另一個是 45° ，銳夾角為 45° 。
算出的正切值是負的，代表算到的是鈍角那一個；銳夾角的正切取絕對值 1。
- 3 答案 (2)。先把餘弦換成正弦： $\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ ，所以 $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$ 。這是把 $y = \sin 2x$ 的 x 換成 $x + \frac{\pi}{8}$ ，圖形向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 。
要先把 x 的係數 2 提出來，平移量是 $\frac{\pi}{8}$ 而不是 $\frac{\pi}{4}$ ； x 換成 $x + \frac{\pi}{8}$ 是向左。
- 4 答案 (1)。用倍角公式把每個選項化成一個角：(1) $2\cos^2 40^\circ - 1 = \cos 80^\circ$ ；(2) $\cos^2 35^\circ - \sin^2 35^\circ = \cos 70^\circ$ ；(3) $2\sin 20^\circ \cos 20^\circ = \sin 40^\circ = \cos 50^\circ$ ；(4) $2\sin^2 70^\circ - 1 = -(1 - 2\sin^2 70^\circ) = -\cos 140^\circ = \cos 40^\circ$ ；(5) $\frac{2\tan 25^\circ}{1 - \tan^2 25^\circ} = \tan 50^\circ$ 。銳角的餘弦隨角度變大而變小，所以 $\cos 80^\circ < \cos 70^\circ < \cos 50^\circ < \cos 40^\circ < 1$ ，而 $\tan 50^\circ > \tan 45^\circ = 1$ 。最小的是 $\cos 80^\circ$ 。
(4) 的形狀是 $2\sin^2 \theta - 1$ ，與 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ 差一個負號。五個值約為 0.174、0.342、0.643、0.766、1.192。
- 5 答案 (4)。左邊疊合： $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，週期 π 、振幅 $\sqrt{2}$ ；右邊 $y = \sin x + \frac{1}{2}$ 是把正弦圖形向上平移 $\frac{1}{2}$ 。在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 畫出兩個圖形數交點（見圖，實線是左邊、虛線是右邊），共 4 個。再用左邊減右邊 $g(x) = \sin 2x + \cos 2x - \sin x - \frac{1}{2}$ 在幾個點的正負號核對： $g(0) = \frac{1}{2} > 0$ ， $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$ ， $g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$ ， $g(\pi) = \frac{1}{2} > 0$ ， $g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ ， $g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0$ ， $g\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$ ， $g(2\pi) = \frac{1}{2} > 0$ 。正負號在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 、 $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ 、 $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 、 $\left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$ 各變一次，與圖上的 4 個交點對應。



兩個端點 $x = 0$ 與 $x = 2\pi$ 都不是解（左邊是 1，右邊是 $\frac{1}{2}$ ）。四個解約為 $x \approx 0.70$ 、 2.99 、 4.49 、 5.95 。



多選題 (第 6~9 題)：同界角與正負號、倍角半角、疊合後的性質、有沒有解

- 6 答案 (2)(3)(5)。 (1) 錯： $\cos \pi = -1$ 。 (2) 對： $\frac{79\pi}{5} = 16\pi - \frac{\pi}{5}$ ，所以 $\sin \frac{79\pi}{5} = \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{5} < 0$ 。 (3) 對： $8\pi \approx 25.13$ ， $30 - 8\pi \approx 4.87$ ，介於 0 與 $2\pi \approx 6.28$ 之間，是 30 度的最小正同界角。 (4) 錯： $\cos \frac{6\pi}{7} = -\cos \frac{\pi}{7}$ ， $\sin \frac{8\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7}$ ； $\frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{4}$ ，所以 $\cos \frac{\pi}{7} > \sin \frac{\pi}{7}$ ，兩者不相等。 (5) 對： $\pi^2 \approx 9.87$ ， $3\pi \approx 9.42$ ，所以 $\pi^2 = 3\pi + t$ ，其中 $t \approx 0.445$ 。 $\sin \pi^2 = -\sin t$ ， $\cos \pi^2 = -\cos t$ ；因為 $0 < t < \frac{\pi}{4}$ ， $\sin t < \cos t$ ，於是 $-\sin t > -\cos t$ 。

(5) 的兩個值都是負的 (約 -0.430 與 -0.903)，比的是哪一個比較靠近 0。

- 7 答案 (2)(5)。 θ 在第四象限， $\sin \theta = -\sqrt{1 - \frac{9}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ 。 (1) 錯： $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \times \frac{3}{4} = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$ 。 (2) 對： $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8}$ 。 (3) 錯： $\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta = \frac{1}{8} \times \frac{3}{4} - \left(-\frac{3\sqrt{7}}{8}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{3}{32} - \frac{21}{32} = -\frac{9}{16}$ 。 (4) 錯： $\frac{3\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \pi$ ，在第二象限， $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 。 (5) 對： $\cos \frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = -\sqrt{\frac{7}{8}} = -\frac{\sqrt{14}}{4}$ ，所以 $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \div \left(-\frac{\sqrt{14}}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{7}$ 。

流傳版本題幹印作 $\frac{3\pi}{2} < \theta < \pi$ ，但沒有角落在這個範圍；依答案應為 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ($\cos \theta > 0$ 且 $\tan \frac{\theta}{2} < 0$ ， θ 在第四象限)，本頁題幹已照此更正。(4) 的 $\frac{\sqrt{14}}{4}$ 是 $\cos \frac{\theta}{2}$ 的絕對值。

- 8 答案 (1)(3)(4)。兩項的角不同，先用差角公式展開： $2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x\right) = \sqrt{3} \cos x - \sin x$ ，所以 $f(x) = 3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x\right) = 2\sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 。 (1) 對：週期 2π 。 (2) 錯：最大值是 $2\sqrt{3}$ 。 (3) 對： $x = \frac{\pi}{3}$ 時 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ，正弦值為 1。 (4) 對： $x = \frac{4\pi}{3}$ 時 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$ ， f 取到最小值 $-2\sqrt{3}$ ，通過最低點的鉛直線是對稱軸。 (5) 錯： $|f(x)| = 2\sqrt{3} \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right|$ ，把 x 軸下方的部分翻上來後週期是 π ，不是 $\frac{\pi}{2}$ 。

對稱軸要通過最高點或最低點；(4) 通過的是最低點，一樣是對稱軸。

- 9 答案 (1)(2)(4)。 $a \sin x + b \cos x$ 的值介於 $-\sqrt{a^2 + b^2}$ 與 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 之間。(1) 無解： $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} < 4$ 。(2) 無解： $\cos x - 2 \sin x \leq \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} < 3$ ，不可能大於或等於 3。(3) 有解： $\sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} > 4$ ， -4 在範圍內；例如 $x = \pi$ 時 $4 \cos \pi - \sin \pi = -4$ 。(4) 無解：左邊 ≤ 1 ，右邊 ≥ 1 ，要相等只能兩邊都等於 1；右邊等於 1 時 $x = \frac{\pi}{3}$ ，此時左邊是 $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1$ 。(5) 有解： $\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$ ，左邊 $= \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，可以等於 $\frac{1}{2}$ ；例如 $x = \frac{\pi}{2}$ 時 $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 。

(2) 是不等式，一樣用值域判斷。(4) 不能只看「兩邊都可以等於 1」，還要看能不能在同一個 x 同時等於 1。



填充題 (第 10~13 題)：廣義角、扇形與內切圓、讀圖定係數、範圍內的最大值

- 10 逐項換成同界角： $\frac{100\pi}{3} = 32\pi + \frac{4\pi}{3}$ ， $\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ 。 $\frac{19\pi}{6} = 2\pi + \frac{7\pi}{6}$ ， $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ 。 $\frac{13\pi}{4} = 3\pi + \frac{\pi}{4}$ ，正切的週期是 π ， $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ 。三項相加 $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0$ 。
 $\frac{4\pi}{3}$ 與 $\frac{7\pi}{6}$ 都在第三象限，正弦、餘弦是負的，正切是正的。
- 11 設內切圓半徑為 r 。圓與 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 都相切，圓心 R 在 $\angle AOB$ 的角平分線上， $\angle POR = \frac{\pi}{6}$ ；直角三角形 OPR 中 $\overline{RP} = r$ ，所以 $\overline{OR} = 2r$ 、 $\overline{OP} = \sqrt{3}r$ 。圓又內切於弧 AB ，圓上離 O 最遠的點到 O 的距離 $\overline{OR} + r = 3r$ 等於扇形半徑 9，所以 $r = 3$ ， $\overline{OP} = \overline{OQ} = 3\sqrt{3}$ 。塗色區域 = 四邊形 $OPRQ$ 減去扇形 RPQ 。四邊形 $OPRQ$ 是兩個全等的直角三角形，面積 $= 2 \times \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 3 = 9\sqrt{3}$ 。 $\angle PRQ = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ ，扇形 RPQ 面積 $= \frac{1}{2} \times 3^2 \times \frac{2\pi}{3} = 3\pi$ 。塗色區域面積 $= 9\sqrt{3} - 3\pi$ 。
 扣掉的是小圓裡圓心角 $\frac{2\pi}{3}$ 的扇形，不是 $\frac{\pi}{3}$ ； $\angle PRQ$ 與 $\angle POQ$ 互補。數值約 6.16。
- 12 由圖，最大值 3、最小值 -1 。 $a \sin x + b \cos x$ 疊合後是振幅 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 、週期 2π 的正弦型函數，所以 $c = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$ ，振幅 $= \frac{3 - (-1)}{2} = 2$ 。最高點在 $x = -\frac{\pi}{6}$ ，可寫成 $f(x) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ 。展開： $2\left(\cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6}\right) + 1 = \sqrt{3} \cos x - \sin x + 1$ 。對照得 $a = -1$ 、 $b = \sqrt{3}$ 、 $c = 1$ 。
 a 是 $\sin x$ 的係數、 b 是 $\cos x$ 的係數，填的時候順序不要對調。驗算： $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 3$ 。
- 13 疊合： $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x\right) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ， $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ 。 $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$ 時 $\frac{5\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{11\pi}{6}$ 。這段角度不含 $\frac{\pi}{2}$ ：正弦從 $\frac{5\pi}{6}$ 的 $\frac{1}{2}$ 一路降到 $\frac{3\pi}{2}$ 的 -1 ，再升到 $\frac{11\pi}{6}$ 的 $-\frac{1}{2}$ ，最大值在左端點 $\frac{5\pi}{6}$ 。所以 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ， $M = 2 \times \frac{1}{2} + 2 = 3$ 。
 範圍內到不了 $\frac{\pi}{2}$ ，最大值不是 $2 + 2 = 4$ 。

填充題 (第 14~17 題)：第三個角、正切的週期、差角求面積、降次後疊合

- 14 $A = 180^\circ - (B + C)$ ，所以 $\tan A = -\tan(B + C) = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} = -\frac{1 + 2}{1 - 2} = 3$ 。 $\tan A > 0$ ， A 是銳角；畫鄰邊 1、對邊 3 的直角三角形，斜邊 $\sqrt{10}$ ， $\sin A = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ 。
 $B = 45^\circ$ 、 $C \approx 63.4^\circ$ ， $A \approx 71.6^\circ$ ，確實是銳角。
- 15 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ ，把 x 換成 $x - \frac{\pi}{6}$ ： $y = \tan\left(b\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(bx + \frac{\pi}{4} - \frac{b\pi}{6}\right)$ 。正切的週期是 π ，兩個圖形重合表示括號裡的角相差 π 的整數倍： $\frac{\pi}{4} - \frac{b\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi$ (k 為整數)，整理得 $b = \frac{1}{2} - 6k$ 。
 $b > 0$ ，所以 $k = 0, -1, -2, \dots$ ， $b = \frac{1}{2}, \frac{13}{2}, \frac{25}{2}, \dots$ ，最小值為 $\frac{1}{2}$ 。
 正切的週期是 π 不是 2π ；若誤用 $2k\pi$ ，雖然最小值仍是 $\frac{1}{2}$ ，其餘的 b 會漏掉。驗算： $b = \frac{1}{2}$ 時 $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ 。



- 16 直角三角形 ADC 中 $\overline{AC} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$, $\sin \angle DAC = \frac{5}{13}$, $\cos \angle DAC = \frac{12}{13}$. $\cos \angle BAD = \frac{4}{5}$, 所以 $\sin \angle BAD = \frac{3}{5}$. $\tan \angle DAC = \frac{5}{12} < \tan \angle BAD = \frac{4}{3}$, 對角線 $\overline{AC}$ 在 $\angle BAD$ 內部, $\angle BAC = \angle BAD - \angle DAC$. 由差角公式 $\sin \angle BAC = \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} - \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{36 - 20}{65} = \frac{16}{65}$. $\triangle ABC$ 面積 $= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \times 10 \times 13 \times \frac{16}{65} = 16$.

用坐標核對：取 $A(0,0)$ 、 $D(12,0)$ 、 $C(12,5)$ 、 $B(8,6)$ ，面積 $= \frac{1}{2} |8 \times 5 - 6 \times 12| = 16$ 。

- 17 用半角公式降次： $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ，所以 $y = \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sin(2x - \varphi) + \frac{1}{2}$ ，其中 $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 、 $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ， φ 是銳角。 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 時 $-\varphi \leq 2x - \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \varphi$ ，這段角度在 $-\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間，正弦遞增，最大值在右端點 $x = \frac{\pi}{4}$ ： $y = \sin \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 。

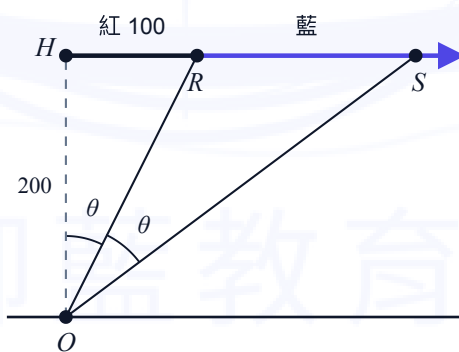
$2x - \varphi$ 到不了 $\frac{\pi}{2}$ ，最大值不是 $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \approx 1.618$ 。也可以直接看： $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 時 $\sin 2x$ 與 $\sin^2 x$ 都遞增，和在 $x = \frac{\pi}{4}$ 最大。

混合題 (第 18~19 題)：視角相等用正切的二倍角公式

- 18 答案 (1)。設貴賓的位置為 O ，正上方 200 公尺處為 H ，戰機從 H 開始沿水平方向噴出紅色彩煙到 R ， $\overline{HR} = 100$ 。直角三角形 OHR 的直角在 H ，視角 $\theta = \angle HOR$ ， $\tan \theta = \frac{\overline{HR}}{\overline{OH}} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$ 。

視角是從 O 看彩煙兩端的夾角，對邊是彩煙長 100，鄰邊是高度 200。

- 19 設藍色彩煙從 R 噴到 S (見圖)。藍色彩煙的視角 $\angle ROS = \theta$ ，所以 $\angle HOS = 2\theta$ 。由二倍角公式 $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$ 。直角三角形 OHS 中 $\overline{HS} = \overline{OH} \tan 2\theta = 200 \times \frac{4}{3} = \frac{800}{3}$ 。藍色彩煙長 $\overline{RS} = \frac{800}{3} - 100 = \frac{500}{3}$ 公尺。



視角相同，長度並不相同：離 O 越遠，同樣的視角要越長的彩煙 ($\frac{500}{3} \approx 166.7$)。同理白色彩煙的終點滿足

$$\tan 3\theta = \frac{\frac{4}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{11}{2}, \text{ 白色彩煙長 } 1100 - \frac{800}{3} = \frac{2500}{3} \text{ 公尺。}$$

視角、夾角這類「兩個方向之間的角」，先各自寫出正切值，再用正切的和差角或倍角公式；看到 $a \sin x + b \cos x$ 先疊合，再把 x 的範圍換成整個角的範圍。



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自大直高中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/dcsh-114a-g11a-1