

大直高中 114 學年度上學期 高一第一次段考



御藍教育

範圍：數與式（實數、絕對值、指數、常用對數） · 多選題 3 題（18 分）、填充題 12 題（72 分）、計算題 1 題（10 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/dcsh-114a-g10-1

一、多選題（占 18 分）說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。（6-4-2-0）

1 請選出正確的選項。

- (1) 若 $a, b, \frac{a}{b}$ 均為無理數，則 ab 為無理數
- (2) 若 $a+b$ 為有理數、 ab 為無理數，則 $a-b$ 為無理數
- (3) 若 a 為有理數、 b 為無理數，且 $a < b$ ，則至少有一無理數 x 使得 $a < x < b$
- (4) 若實數 a 滿足 a^{108} 與 a^{114} 都是有理數，則 a 為有理數
- (5) 若實數 a, b, c, d 滿足 $a+b\pi = c+d\pi$ ，則 $a=c$ 且 $b=d$

2 下列哪些方程式恰有一個實數解？

- (1) $|x-3| = |x+7|$
- (2) $|x-3| + |x+7| = 12$
- (3) $|x-3| - |x+7| = 4$
- (4) $|x+7| - |x-3| = 4$
- (5) $|x-3| = 2|x+7|$

3 某機構在 12 點時將兩種不同的營養劑分別投入培養皿甲與培養皿乙中，此時甲、乙的細菌數量分別為 X 、 Y 。已知甲的數量每 3 小時成長為原來的 2 倍，例如 15 點時甲的數量為 $2X$ 。乙的數量每 2 小時成長為原來的 3 倍，例如 14 點時乙的數量為 $3Y$ ，測量所得結果部分記錄於下表。該機構在 18 點時測量發現甲、乙的數量相同，欲以細菌數量隨時間呈指數成長的模型來預估甲、乙 12 點至 24 點的細菌數量。根據上述，試選出正確的選項。

- (1) 在 13 點時，乙的數量為 $2Y$
- (2) $4X = 9Y$
- (3) $X > Y$
- (4) 在 20 點時，甲的數量大於乙的數量
- (5) 在 24 點時，乙的數量為甲的 $\frac{27}{4}$ 倍

時刻(點)	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
甲數量	X			$2X$									
乙數量	Y		$3Y$										



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/dcsh-114a-g10-1

二、填充題（占 72 分）說明：第 4 題至第 15 題。

- 4 若 a, b 為有理數，且 $\sqrt{a - \sqrt{20}}$ 的整數部分是 b ，小數部分是 $\sqrt{5} - 2$ ，則 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 5 $1.1\overline{4} \times 0.8\overline{1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（以最簡分數形式表示）

- 6 數線上有 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $P(4)$ 、 $Q(-36)$ 四點，且 $a < b$ ，若 P 在 $\overline{AB}$ 上滿足 $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 1$ ， Q 在 $\overline{AB}$ 外滿足 $\overline{QA} : \overline{QB} = 2 : 3$ ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 7 若 x 為實數滿足方程式 $|x + 1| = 2x - 5$ ，則所有 x 的總和為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 8 設 a, b 為實數，已知不等式 $|ax - 3| \geq b$ 的解為 $x \geq 2$ 或 $x \leq 1$ ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 9 已知 $9^a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ，則 $\frac{27^a + 27^{-a}}{3^a - 3^{-a}}$ 的值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 10 $1 \div \sqrt[3]{\sqrt{81}^{-3}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \times \left(\frac{81}{625}\right)^{0.25} + ((3 + \sqrt{10})^9 \times (3 - \sqrt{10})^9) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 11 生物學家克萊柏發現多數哺乳動物（例如老鼠、貓、牛等）的基礎代謝率 B （千卡/天）與其體重 M （公斤）會滿足關係式 $B = kM^{\frac{3}{4}}$ ，其中 k 為大於 0 的常數。設老鼠的基礎代謝率為 b （千卡/天），體重為 m （公斤）。設一隻貓的基礎代謝率約為一隻老鼠的 $16\sqrt{2}$ 倍。試問：貓的體重 M （公斤）約為老鼠的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 倍。



- 12 若 $(3.2 \times 10^{-8}) \div (0.13 \times 10^{-2})$ 的值为 $b \times 10^n$ (取二位有效数字, 且以科学记号表示), 则数对 $(b, n) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 13 已知 $\sqrt{10} \approx 3.16$, 则满足 $1.5 < \log n < 2$ 的整数 n 有 个。

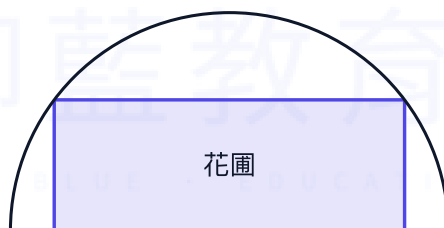
- 14 美国科学家 Donald Ervin Knuth 定义「双箭号」运算符, 用来表示重複的幂运算, 其表示法如下:

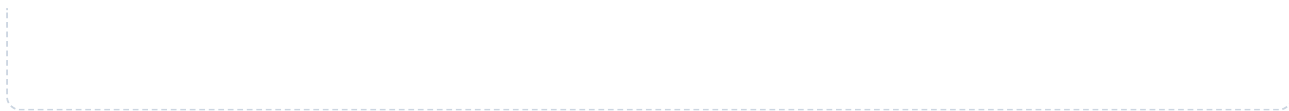
$a \uparrow\uparrow b = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^a}}}}}_b$ 。例如: $3 \uparrow\uparrow 2 = 3^3 = 27$; $2 \uparrow\uparrow 3 = 2^{2^2} = 2^4 = 16$ 。试求 $4 \uparrow\uparrow 3$ 为 位数。($\log 2 \approx 0.3010$)

- 15 溶液的酸鹼程度常以 pH 值来衡量。若溶液中的氢离子浓度为 x 莫耳/升, pH 值就定为 $-\log x$ 。今有 4 升 pH 值为 2 的 A 溶液, 若想将其调配成 pH 值为 3 的溶液, 则须与 升 pH 值为 4 的 B 溶液充分混合。(假设混合后体积不变)

三、计算题 (占 10 分) 说明: 第 16 题。

- 16 如图所示, 在一半径为 20 公尺的半圆形草皮上, 想要围出一长方形作为花圃, 且花圃的一边落在圆的直径上, 求此花圃的最大面积, 又此时长、宽分别为多少公尺。





御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/dcsh-114a-g10-1

答案一覽

- 第 1 題 (2)(3)
第 2 題 (1)(3)(4)
第 3 題 (3)(5)
第 4 題 7
第 5 題 $\frac{103}{110}$
第 6 題 $(-6, 9)$
第 7 題 6
第 8 題 $(2, 1)$
第 9 題 $2\sqrt{5}$
第 10 題 $\frac{42}{5}$
第 11 題 64
第 12 題 $(2.5, -5)$
第 13 題 68
第 14 題 155
第 15 題 40
第 16 題 最大面積 400 平方公尺；長 $20\sqrt{2}$ 公尺、寬 $10\sqrt{2}$ 公尺

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。（不用註冊）
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit（可以先把姓名、座號遮掉）



多選 1~3：無理數的判斷、絕對值方程式、指數成長

- 1 答案 (2)(3)。(1) 錯：取 $a = \sqrt{2} + 1$ 、 $b = \sqrt{2} - 1$ ，兩數都是無理數， $\frac{a}{b} = (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ 也是無理數，但 $ab = 1$ 是有理數。(2) 對： $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$ ，有理數減無理數是無理數；如果 $a - b$ 是有理數，它的平方也會是有理數，矛盾，所以 $a - b$ 是無理數。(3) 對：取 $x = \frac{a+b}{2}$ ，它在 a 、 b 之間；若 x 是有理數，則 $b = 2x - a$ 也是有理數，矛盾，所以 x 是無理數。(4) 錯： $a = \sqrt{2}$ 時 $a^{108} = 2^{54}$ 、 $a^{114} = 2^{57}$ 都是有理數，但 a 是無理數。(5) 錯： a, b, c, d 只說是實數，例如 $a = \pi$ 、 $b = 0$ 、 $c = 0$ 、 $d = 1$ 時兩邊都等於 π ，但 $a \neq c$ 。

(5) 要 a, b, c, d 都是有理數才能比較係數；題目寫的是實數，所以不成立。

- 2 答案 (1)(3)(4)。把 $|x - 3|$ 、 $|x + 7|$ 看成 x 到 3、到 -7 的距離，兩點相距 10。(1) 到兩點等距，只有中點 $x = -2$ ，一個解。(2) 距離和是 $12 > 10$ ，兩點外側各有一個解 ($x = 4$ 與 $x = -8$)，兩個解。(3) $x \leq -7$ 時左式恆為 10、 $x \geq 3$ 時恆為 -10，都不等於 4； $-7 < x < 3$ 時左式 $= (3 - x) - (x + 7) = -2x - 4 = 4$ ，得 $x = -4$ ，一個解。(4) 同理只需看 $-7 < x < 3$ ： $(x + 7) - (3 - x) = 2x + 4 = 4$ ，得 $x = 0$ ，一個解。(5) $x - 3 = 2(x + 7)$ 得 $x = -17$ ； $x - 3 = -2(x + 7)$ 得 $x = -\frac{11}{3}$ ，兩個解。距離差 $|x - 3| - |x + 7|$ 的值介於 -10 和 10 之間，而且在 -7 與 3 之間每個值恰好出現一次。

- 3 答案 (3)(5)。設 12 點後經過 t 小時，甲的數量是 $X \cdot 2^{\frac{t}{4}}$ ，乙的數量是 $Y \cdot 3^{\frac{t}{6}}$ 。18 點 ($t = 6$) 兩者相同： $X \cdot 2^2 = Y \cdot 3^1$ ，即 $4X = 27Y$ 。(1) 錯：13 點時乙是 $Y \cdot 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}Y$ 。(2) 錯：應為 $4X = 27Y$ 。(3) 對： $X = \frac{27}{4}Y > Y$ 。(4) 錯：20 點 ($t = 8$) 時甲是 $X \cdot 2^2 = 4X = 27Y$ ，乙是 $3^2Y = 9Y$ ；比較 27 與 9 ：兩邊三次方得 $4 < 27$ ，所以甲比乙少。(5) 對：24 點 ($t = 12$) 時甲是 $16X = 16 \cdot \frac{27}{4}Y = 108Y$ ，乙是 $3^4Y = 81Y$ ， $\frac{108}{81} = \frac{4}{3}$ 。

指數成長的模型在不是整數週期的時刻用分數次方，13 點的乙不是「 Y 與 $3Y$ 的平均 $2Y$ 」。

填充 4~8：根式、循環小數、分點、絕對值

- 4 整數部分加小數部分就是原數： $\sqrt{a - \sqrt{20}} = b + \sqrt{5} - 2$ 。兩邊平方： $a - 2\sqrt{5} = (b - 2)^2 + 5 + 2(b - 2)\sqrt{5}$ 。 a, b 是有理數，比較 $\sqrt{5}$ 的係數得 $2(b - 2) = -2$ ， $b = 1$ ；再比較有理數部分得 $a = 1 + 5 = 6$ 。檢查： $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1 \approx 1.236$ ，整數部分 1、小數部分 $\sqrt{5} - 2$ ，符合。所以 $a + b = 7$ 。

- 5 $1.1\overline{4} = 1 + \frac{14 - 1}{90} = 1 + \frac{13}{90} = \frac{103}{90}$ ， $0.8\overline{1} = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}$ 。相乘： $\frac{103}{90} \times \frac{9}{11} = \frac{103}{110}$ 。
 $0.1\overline{4}$ 的分母是 90 (一個循環位、一個不循環位)，分子是 $14 - 1$ 。

- 6 P 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 1$ ，由分點公式 $4 = \frac{a + 2b}{3}$ ，即 $a + 2b = 12$ 。 Q 在 $\overline{AB}$ 外且離 A 比較近，所以 Q 在 A 的左邊： $\overline{QA} = a + 36$ 、 $\overline{QB} = b + 36$ ， $3(a + 36) = 2(b + 36)$ ，即 $3a - 2b = -36$ 。兩式相加得 $4a = -24$ ， $a = -6$ ， $b = 9$ 。

外分點先判斷在哪一側： $\overline{QA} < \overline{QB}$ ，所以 Q 在靠近 A 的那一側。

- 7 左邊是絕對值，所以 $2x - 5 \geq 0$ ，即 $x \geq \frac{5}{2}$ 。 $x + 1 = 2x - 5$ 得 $x = 6$ ，符合； $x + 1 = -(2x - 5)$ 得 $x = \frac{4}{3}$ ，不符合 $x \geq \frac{5}{2}$ ，捨去。只有一個解 $x = 6$ ，總和為 6。

解出來要代回檢查： $x = \frac{4}{3}$ 時右邊是 $-\frac{7}{3}$ ，絕對值不可能是負數。



- 8 解的兩個端點 $x = 1$ 與 $x = 2$ 是 $|ax - 3| = b$ 的兩個解： $|a - 3| = b$ 且 $|2a - 3| = b$ 。若 $a - 3 = 2a - 3$ 則 $a = 0$ ，不等式沒有端點，不合；所以 $a - 3 = -(2a - 3)$ ， $a = 2$ ， $b = |2 - 3| = 1$ 。檢查： $|2x - 3| \geq 1$ 即 $2x - 3 \geq 1$ 或 $2x - 3 \leq -1$ ， $x \geq 2$ 或 $x \leq 1$ ，符合。 $(a, b) = (2, 1)$ 。

填充 9~12：指數律與科學記號

- 9 令 $t = 3^a$ ，則 $t^2 = 9^a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ， $t^{-2} = \frac{2}{3 + \sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ，所以 $t^2 + t^{-2} = 3$ 。 $(t + t^{-1})^2 = 3 + 2 = 5$ ， $t + t^{-1} = \sqrt{5}$ ； $(t - t^{-1})^2 = 3 - 2 = 1$ ，又 $t^2 > 1$ 所以 $t > t^{-1}$ ， $t - t^{-1} = 1$ 。分子用立方和： $27^a + 27^{-a} = t^3 + t^{-3} = (t + t^{-1})(t^2 - 1 + t^{-2}) = \sqrt{5} \times 2 = 2\sqrt{5}$ 。所求 $= \frac{2\sqrt{5}}{1} = 2\sqrt{5}$ 。
 $27^a = (3^a)^3$ 、 $9^a = (3^a)^2$ ，全部換成 3^a 來看。
- 10 第一項： $\sqrt{81^{-3}} = \sqrt{3^{-12}} = 3^{-6}$ ，再開三次方得 3^{-2} ， $1 \div 3^{-2} = 9$ 。第二項： $(\frac{3}{2})^{-1} = \frac{2}{3}$ ， $(\frac{81}{625})^{0.25} = (\frac{3^4}{5^4})^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$ ，相乘得 $\frac{2}{5}$ 。第三項： $((3 + \sqrt{10})(3 - \sqrt{10}))^9 = (9 - 10)^9 = -1$ 。合計 $9 + \frac{2}{5} - 1 = \frac{42}{5}$ 。
- 11 貓： $B = kM^{\frac{3}{4}}$ ；老鼠： $b = km^{\frac{3}{4}}$ 。相除： $\frac{B}{b} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{3}{4}} = 16\sqrt{2} = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{9}{2}}$ 。兩邊取 $\frac{4}{3}$ 次方： $\frac{M}{m} = 2^{\frac{9}{2} \times \frac{4}{3}} = 2^6 = 64$ 。
- 12 $\frac{3.2 \times 10^{-8}}{0.13 \times 10^{-2}} = \frac{3.2}{0.13} \times 10^{-6} \approx 24.6 \times 10^{-6} = 2.46 \times 10^{-5}$ 。取二位有效數字得 2.5×10^{-5} ，所以 $(b, n) = (2.5, -5)$ 。
科學記號要求 $1 \leq b < 10$ ，所以 24.6×10^{-6} 要再改寫成 2.46×10^{-5} 。

填充 13~15：常用對數

- 13 $1.5 < \log n < 2$ 就是 $10^{1.5} < n < 10^2$ 。 $10^{1.5} = 10\sqrt{10} \approx 31.6$ ，所以 $31.6 < n < 100$ ，整數 $n = 32, 33, \dots, 99$ ，共 $99 - 32 + 1 = 68$ 個。
- 14 $4 \uparrow \uparrow 3 = 4^4 = 4^{256} = 2^{512}$ 。 $\log 2^{512} = 512 \times 0.3010 = 154.112$ ，所以 $10^{154} < 2^{512} < 10^{155}$ ，是 155 位數。
次方要從最上面算起：先算 $4^4 = 256$ ，再算 4^{256} ，不是 $(4^4)^4$ 。
- 15 pH 值 2、4、3 分別表示氫離子濃度 10^{-2} 、 10^{-4} 、 10^{-3} 莫耳/升。設加入 V 升 B 溶液，氫離子總量不變： $4 \times 10^{-2} + V \times 10^{-4} = (4 + V) \times 10^{-3}$ 。兩邊同乘 10^4 ： $400 + V = 10(4 + V)$ ， $9V = 360$ ， $V = 40$ 。
pH 值不能直接平均；要先換回濃度，用「莫耳數 = 濃度 × 體積」列式。

計算 16：算幾不等式

- 16 設圓心為 O ，花圃在直徑上的一邊長 $2x$ 公尺（圓心兩側各 x ），另一邊長 y 公尺， $x > 0$ 、 $y > 0$ 。面積最大時花圃的上面兩個頂點在半圓上，頂點到圓心的距離是半徑： $x^2 + y^2 = 20^2 = 400$ 。花圃面積為 $2xy$ 。由算幾不等式 $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2} = xy$ ，得 $2xy \leq x^2 + y^2 = 400$ 。等號在 $x^2 = y^2$ 時成立，即 $x = y = 10\sqrt{2}$ 。所以最大面積是 400 平方公尺，此時長 $2x = 20\sqrt{2}$ 公尺、寬 $y = 10\sqrt{2}$ 公尺。
長是 $2x$ 不是 x ；寫完不等式要交代等號成立的條件，才能說最大值做得到。



求極值的計算題照順序寫：設未知數、寫出限制式、用算幾不等式、交代等號成立的條件、回答題目問的量。



御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自大直高中 114 學年度上學期高一第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/dcsh-114a-g10-1