

潮州高中 114 學年度上學期 高一第一次段考



御藍教育

範圍：數與式（實數與根式、絕對值、算幾不等式、指數、常用對數） · 是非題 10 題（每題 2 分，共 20 分）、填充題 16 題（共 80 分，依配分表以答對格數給分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/czsh-114a-g10-1

一、是非題（一題 2 分，共 20 分，正確請畫○，錯誤請畫×）

- 1 若 $2^a + 2^{-a} = 3$ ，則 $(\sqrt{2})^a + (\sqrt{2})^{-a} = \sqrt{5}$ 。
- 2 已知 $\log a = 1.2$ ， $\log b = 3.2$ ，則 a 是 b 的 100 倍。
- 3 若 $a \neq 0$ ，則 $a^0 = 0$ 。
- 4 3.2100 的有效位數是 3。
- 5 $10^{19.1}$ 的整數部分為 19 位數。
- 6 $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2} = \sqrt{3} - \sqrt{5}$ 。
- 7 $\frac{21}{13}$ 與 $\frac{35}{21}$ 之間沒有有理數。
- 8 $7 = 10^{\log 7}$ 。
- 9 $2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^3}$ 。
- 10 若 a 、 b 、 c 、 d 為實數，且 $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ ，則 $a = c$ 且 $b = d$ 。

二、填充題（依配分表給分，共 80 分）（本頁第 11~26 題依序為原卷填充題第 1~16 題；配分表：答對 1~16 格依序得 6、12、18、24、30、36、40、44、48、52、56、60、65、70、75、80 分）

- 11 在圓周率 π 、 $0.\bar{3}$ 、 $\sqrt{\frac{169}{36}}$ 、 $\sqrt{2}$ 、 $0.\overline{123}$ 、 $\sqrt{\frac{81}{16}}$ 、 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 、 $1 - 2\sqrt{3}$ 、 $\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$ 之中，有理數有 _____ 個。

- 12 數線上 A 、 B 兩點的坐標分別是 -5 、 15 ，點 C 在直線 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AC} : \overline{BC} = 3 : 4$ ，則 C 點坐標為 _____。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/czsh-114a-g10-1

- 13 世界衛生組織計算男性標準體重之方法如下：(身高 (cm) -80) $\times 70\%$ = 標準體重 (kg)，且定義標準體重正負 10% 為正常體重。設身高 180 公分的男性正常體重為 x 公斤， x 的範圍表示成 $|x - a| \leq b$ ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

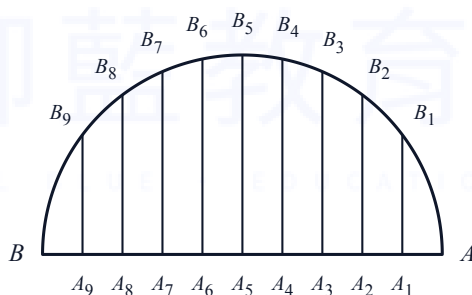
- 14 化簡 $(3 + \sqrt{10})^4(3 - \sqrt{10})^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 15 試求 $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 16 已知當正實數 x, y 滿足 $xy = 96$ ，則當 $(x, y) = (a, b)$ 時， $6x + y$ 有最小值 m ，則序組 $(a, b, m) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 17 已知 $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$ ，求 $x^2 + \frac{1}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 18 如附圖，有一半圓形拱橋，橋面位置恰為直徑 $\overline{AB}$ 。計畫將橋面 $\overline{AB}$ 十等分後（也就是 $\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \dots = \overline{A_8A_9} = \overline{A_9B}$ ），在每個等分點豎立一根鋼柱（ $\overline{A_1B_1}$ 、 $\overline{A_2B_2}$ 、...、 $\overline{A_9B_9}$ ）。已知 $\overline{AB} = 10$ 公尺，試求 $\overline{A_4B_4} = \underline{\hspace{2cm}}$ 公尺。



- 19 求 $\left(\frac{81}{25}\right)^{0.5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \times 0.09^{-0.5} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



20 若 $3^{\sqrt{2}} + 3^{-\sqrt{2}} = k$ ，請以 k 表示 $27^{\sqrt{2}} + 27^{-\sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

21 請比較下列實數大小，並由大到小排列： $a = \sqrt{5} + \sqrt{7}$ ， $b = \sqrt{9} + \sqrt{3}$ ， $c = \sqrt{10} + \sqrt{2}$ 。 $\underline{\hspace{2cm}}$

22 設 x 為實數，且滿足不等式 $|2x - 3| \leq |2x + 1|$ ，則 x 的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

23 滿足不等式 $1 < |2x - 3| < 7$ 的 x 的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

24 若不等式 $|ax + 10| \geq b$ 的解為 $x \leq 2$ 或 $x \geq 8$ ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

25 JOHN 想利用 21 公尺長的鐵絲網在屋後的空地上圍出一塊矩形的菜園，將菜園靠在屋後，則只須圍三邊，且為方便進出三邊都留下 1 公尺的出入口，若 JOHN 想圍成面積最大的菜園，則最大面積為 M 平方公尺，且此時長邊為 a 公尺，則數對 $(M, a) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

26 放射性物質的質量變成原來的一半所需的時間稱為半衰期。現在某一放射性物質質量為 M 克，經過 2 年後質量剩下 16 克，再經過 4 年後質量只剩下 1 克，則 M 值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/czsh-114a-g10-1

答案一覽

是非題：1 = 正確、2 = 錯誤

1 1	2 2	3 2	4 2	5 2	6 2	7 2
8 1	9 2	10 2				

第 11 題 4

第 12 題 $\frac{25}{7}$ 或 -65

第 13 題 (70, 7)

第 14 題 $-3 - \sqrt{10}$

第 15 題 5

第 16 題 (4, 24, 48)

第 17 題 $\sqrt{5}$

第 18 題 $2\sqrt{6}$

第 19 題 $\frac{50}{3}$

第 20 題 $k^3 - 3k$

第 21 題 $a > b > c$

第 22 題 $x \geq \frac{1}{2}$

第 23 題 $-2 < x < 1$ 或 $2 < x < 5$

第 24 題 (-2, 6)

第 25 題 (72, 12)

第 26 題 64

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。（不用註冊）
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit（可以先把姓名、座號遮掉）



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/czsh-114a-g10-1

是非 1~5：指數對稱式、log 的意義、有效位數與位數

- 1 **1** $(\sqrt{2})^a = 2^{\frac{a}{2}}$ 。把所求平方： $(2^{\frac{a}{2}} + 2^{-\frac{a}{2}})^2 = 2^a + 2 + 2^{-a} = 3 + 2 = 5$ 。 $2^{\frac{a}{2}}$ 和 $2^{-\frac{a}{2}}$ 都是正數，和也是正數，所以等於 $\sqrt{5}$ 。
平方後開根號有正負兩個可能，這裡因為兩項都是正的，只取正。
- 2 **2** $a = 10^{1.2}$ ， $b = 10^{3.2}$ ， $\frac{a}{b} = 10^{1.2-3.2} = 10^{-2} = \frac{1}{100}$ 。是 b 為 a 的 100 倍，不是 a 為 b 的 100 倍。
log 值差 2 表示相差 10^2 倍；log 值大的那個數比較大。
- 3 **2** $a \neq 0$ 時規定 $a^0 = 1$ ，不是 0。例如 $a^2 \div a^2 = a^{2-2} = a^0$ ，而同一個數相除是 1。
- 4 **2** 小數點後面結尾的 0 也算有效數字。3.2100 的有效數字是 3、2、1、0、0，有效位數是 5。
- 5 **2** $10^{19.1} = 10^{0.1} \times 10^{19}$ ，而 $1 < 10^{0.1} < 10$ ，所以 $10^{19} < 10^{19.1} < 10^{20}$ 。 10^{19} 是 1 後面 19 個 0，共 20 位，所以 $10^{19.1}$ 的整數部分是 20 位數。
 $10^n \leq N < 10^{n+1}$ 時， N 的整數部分是 $n+1$ 位數，位數是指數的整數部分再加 1。

是非 6~10：根號取正、稠密性、分數指數與比較係數

- 6 **2** $\sqrt{x^2} = |x|$ 。 $\sqrt{3} < \sqrt{5}$ ，所以 $\sqrt{3} - \sqrt{5} < 0$ ， $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2} = |\sqrt{3} - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ 。根號開出來不會是負數。
- 7 **2** $\frac{35}{21} = \frac{5}{3}$ ，和 $\frac{21}{13}$ 是兩個不相等的有理數 ($\frac{21}{13} = \frac{63}{39}$ ， $\frac{5}{3} = \frac{65}{39}$)。任意兩個不相等的有理數之間都還有有理數，例如兩數的平均 $\frac{64}{39}$ 。
兩個有理數相加再除以 2 還是有理數，而且落在兩數之間。
- 8 **1** log 7 的意義就是「10 的幾次方等於 7」的那個次方，所以 $10^{\log 7} = 7$ 。
- 9 **2** $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$ ，而 $\frac{1}{2^3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$ ，兩者不相等。
分數指數是開方 ($2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$)，負指數才是倒數 ($2^{-3} = \frac{1}{2^3}$)。
- 10 **2** 題目只說 a 、 b 、 c 、 d 是實數。反例： $a = 2$ 、 $b = 0$ 、 $c = 0$ 、 $d = \sqrt{2}$ ，這時 $a + b\sqrt{2} = 2$ ， $c + d\sqrt{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ ，兩邊相等，但 $a \neq c$ 、 $b \neq d$ 。
要 a 、 b 、 c 、 d 都是有理數，才能由 $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ 推得 $a = c$ 且 $b = d$ 。

是非題看到「則...」先檢查條件夠不夠： $\sqrt{x^2}$ 要取絕對值、比較係數要有理數、位數是指數的整數部分加 1。



填充 1~8 (第 11~18 題)：有理數判斷、分點、根式化簡與算幾不等式

- 11 逐一判斷。 π 是無理數。 $0.\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ 是有理數。 $\sqrt{\frac{169}{36}} = \frac{13}{6}$ 是有理數。 $\sqrt{2}$ 是無理數。 $0.\overline{123} = \frac{123}{999}$ 是有理數。 $\sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$ 是有理數。 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 是無理數。 $1 - 2\sqrt{3}$ 是無理數。 $\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{(4 - 2\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{14 - 8\sqrt{3}}{1} = 14 - 8\sqrt{3}$ 是無理數。有理數共 4 個。

最後一個數要先有理化分母才看得出來：分子乘開是 $8 - 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 6 = 14 - 8\sqrt{3}$ 。

- 12 設 C 的坐標是 x ，條件是 $\overline{AC} : \overline{BC} = |x + 5| : |x - 15| = 3 : 4$ ，即 $4|x + 5| = 3|x - 15|$ 。 $4(x + 5) = 3(x - 15)$ 得 $x = -65$ ； $4(x + 5) = -3(x - 15)$ 得 $7x = 25$ ， $x = \frac{25}{7}$ 。檢查： $x = \frac{25}{7}$ 時 $\overline{AC} = \frac{60}{7}$ 、 $\overline{BC} = \frac{80}{7}$ ； $x = -65$ 時 $\overline{AC} = 60$ 、 $\overline{BC} = 80$ ，比都是 $3 : 4$ 。

C 在「直線」上，不一定在 A 、 B 之間： $\frac{25}{7}$ 是內分點， -65 是外分點（在 A 的左邊，因為 $\overline{AC}$ 比較短），兩個都要寫。流傳版本此處的記號印成線段的上橫線，依文字「直線」與參考答案，以直線解讀。

- 13 標準體重是 $(180 - 80) \times 70\% = 70$ 公斤。正負 10% 是 $70 \times 10\% = 7$ 公斤，所以正常體重是 $63 \leq x \leq 77$ 。區間的中點是 70 、中點到端點的距離是 7 ，寫成 $|x - 70| \leq 7$ ， $(a, b) = (70, 7)$ 。

- 14 先湊出 $(3 + \sqrt{10})(3 - \sqrt{10}) = 9 - 10 = -1$ 。原式 $= (3 + \sqrt{10}) \times [(3 + \sqrt{10})(3 - \sqrt{10})]^3 = (3 + \sqrt{10}) \times (-1)^3 = -3 - \sqrt{10}$ 。

次方不一樣時，把多出來的那一個先拿出來，其餘的配成同次方再相乘。

- 15 $3 + 2\sqrt{2}$ ：找兩數和 3 、積 2 ，是 2 和 1 ，所以 $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$ 。 $18 - 8\sqrt{2} = 18 - 2\sqrt{32}$ ：找兩數和 18 、積 32 ，是 16 和 2 ，所以 $\sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = \sqrt{16} - \sqrt{2} = 4 - \sqrt{2}$ 。相加： $(\sqrt{2} + 1) + (4 - \sqrt{2}) = 5$ 。

裡面的根號前面要先化成係數 2 ： $8\sqrt{2} = 2 \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{32}$ 。相減的那一個要寫成大減小。

- 16 $6x$ 和 y 都是正數，由算幾不等式 $\frac{6x + y}{2} \geq \sqrt{6x \cdot y} = \sqrt{6 \times 96} = \sqrt{576} = 24$ ，所以 $6x + y \geq 48$ 。等號在 $6x = y$ 時成立，這時 $6x = y = 24$ ， $x = 4$ 、 $y = 24$ （檢查 $xy = 96$ ）。所以 $(a, b, m) = (4, 24, 48)$ 。

算幾不等式要用在 $6x$ 和 y 這兩個數上，等號成立的條件是 $6x = y$ ，不是 $x = y$ 。

- 17 兩邊平方： $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 2 + \sqrt{5}$ ，所以 $x^2 + \frac{1}{x^2} = \sqrt{5}$ 。

- 18 $\overline{AB} = 10$ ，十等分後每段長 1 公尺，半圓的半徑是 5 。設圓心（ $\overline{AB}$ 的中點）為 O ， O 就是 A_5 。 $\overline{AA_4} = 4$ ，所以 $\overline{OA_4} = 5 - 4 = 1$ 。 B_4 在半圓上， $\overline{OB_4} = 5$ 。鋼柱與橋面垂直，直角三角形 OA_4B_4 中 $\overline{A_4B_4} = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ 公尺。

把弧上的點和圓心連起來，連線就是半徑，再用畢氏定理。

雙重根號 $\sqrt{p \pm 2\sqrt{q}}$ ：找兩個正數和為 p 、積為 q ，答案是兩數的根號相加或大減小。



填充 9~16 (第 19~26 題)：指數律、根式比大小、絕對值不等式與應用題

19 $\left(\frac{81}{25}\right)^{0.5} = \sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{9}{5}$; $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$; $0.09^{-0.5} = \left(\frac{9}{100}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{100}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{10}{3}$ 。相乘：
 $\frac{9}{5} \times \frac{25}{9} \times \frac{10}{3} = \frac{50}{3}$ 。

20 令 $t = 3^{\sqrt{2}}$, 則 $3^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{t}$, $27^{\sqrt{2}} = (3^{\sqrt{2}})^3 = t^3$, $27^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{t^3}$ 。已知 $t + \frac{1}{t} = k$ 。把它三次方：
 $\left(t + \frac{1}{t}\right)^3 = t^3 + 3t + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^3} = t^3 + \frac{1}{t^3} + 3\left(t + \frac{1}{t}\right)$, 所以 $t^3 + \frac{1}{t^3} = k^3 - 3k$ 。
 $27 = 3^3$, 所以 $27^{\sqrt{2}} = (3^{\sqrt{2}})^3$; 指數是無理數時指數律照樣成立。

21 三個數都是正數，比平方就可以。 $a^2 = 12 + 2\sqrt{35}$, $b^2 = 12 + 2\sqrt{27}$, $c^2 = 12 + 2\sqrt{20}$ 。 $\sqrt{35} > \sqrt{27} > \sqrt{20}$, 所以 $a^2 > b^2 > c^2$, $a > b > c$ 。

三組根號裡的數相加都是 12，平方後只差在乘積： $5 \times 7 = 35$ 、 $9 \times 3 = 27$ 、 $10 \times 2 = 20$ 。

22 兩邊同除以 2： $\left|x - \frac{3}{2}\right| \leq \left|x + \frac{1}{2}\right|$, 意思是 x 到 $\frac{3}{2}$ 的距離不超過 x 到 $-\frac{1}{2}$ 的距離。 $\frac{3}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 的中點是 $\frac{1}{2}$, 在中點上兩個距離相等，在中點右邊離 $\frac{3}{2}$ 比較近，所以 $x \geq \frac{1}{2}$ 。另一個做法：兩邊都不是負數，可以平方， $4x^2 - 12x + 9 \leq 4x^2 + 4x + 1$, $8 \leq 16x$, $x \geq \frac{1}{2}$ 。

23 $1 < |2x - 3| < 7$ 分成兩種： $1 < 2x - 3 < 7$ 得 $4 < 2x < 10$, $2 < x < 5$; 或 $-7 < 2x - 3 < -1$ 得 $-4 < 2x < 2$, $-2 < x < 1$ 。所以 $-2 < x < 1$ 或 $2 < x < 5$ 。

兩邊都夾住的絕對值不等式，解是左右對稱（對稱中心 $\frac{3}{2}$ ）的兩段區間。

24 解是「 $x \leq 2$ 或 $x \geq 8$ 」，兩個端點的中點是 5，到中點的距離是 3，所以解等於 $|x - 5| \geq 3$ 。和 $|ax + 10| \geq b$ 對照，常數項要變成 +10：兩邊乘以 2 得 $|2x - 10| \geq 6$ ，也就是 $|-2x + 10| \geq 6$ 。所以 $a = -2$ 、 $b = 6$ 。

$|2x - 10|$ 和 $|-2x + 10|$ 相等，要配合題目的「+10」選後者，所以 a 是負的。

25 三邊各留 1 公尺出入口不用鐵絲網，所以三邊的總長是 $21 + 3 = 24$ 公尺。設垂直房屋的兩邊各長 x 公尺、平行房屋的一邊長 y 公尺，則 $2x + y = 24$ ，面積是 xy 。由算幾不等式 $\frac{2x + y}{2} \geq \sqrt{2x \cdot y}$ ，即 $12 \geq \sqrt{2xy}$ ，平方得 $144 \geq 2xy$, $xy \leq 72$ 。等號在 $2x = y = 12$ ，也就是 $x = 6$ 、 $y = 12$ 時成立。最大面積 $M = 72$ ，這時長邊是 12 公尺， $(M, a) = (72, 12)$ 。

鐵絲網長 21 公尺，加上三個 1 公尺的出入口，三邊的總長才是 24 公尺。

26 從剩 16 克到剩 1 克，質量變成 $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ ，也就是過了 4 個半衰期，花了 4 年，所以半衰期是 1 年。前面的 2 年是 2 個半衰期： $M \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 16$, $M = 64$ 。

檢查： $64 \rightarrow 32 \rightarrow 16$ (2 年)，再 $16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ (4 年)。

由解回推絕對值不等式：先用兩個端點的中點和半徑寫成 $|x - \text{中點}| \geq \text{半徑}$ ，再同乘一個數去配合題目給的常數項。



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自潮州高中 114 學年度上學期高一第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/czsh-114a-g10-1