

景美女中 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數（弧度量、三角函數的圖形、和差角與倍角半角公式、正餘弦的疊合） · 單選題 1 題（5 分）、多選題 5 題（每題 6 分，共 30 分）、填充題 9 題共 13 格（每格 5 分，共 65 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/cmgh-114a-g11a-1

一、單選題（占 5 分） | 說明：第 1 題，每題 5 分。

1 設 $a = \cos 4$ ，請選出正確的選項：

- (1) $-1 < a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (2) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (3) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < -\frac{1}{2}$
- (4) $-\frac{1}{2} < a < 0$
- (5) $0 < a < \frac{1}{2}$

二、多選題（占 30 分） | 說明：第 2 題至第 6 題，每題 6 分。(6-4-2-0)

2 請選出正確的選項：

- (1) $\cos 2 > \cos 3$
- (2) $\sin \pi^\circ > \cos \pi^\circ$
- (3) $\tan 1 > 1$
- (4) 點 $(\cos(\pi^2), \tan(\pi^2))$ 落在第三象限
- (5) $\sin 2 \cdot \sin 3 > \cos 2 \cdot \cos 3$

3 關於下列各週期函數，請選出週期為 π 的選項：

- (1) $y = \tan 2x$
- (2) $y = \sin \frac{x}{2}$
- (3) $y = |\tan x|$
- (4) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$
- (5) $y = 4 \sin^2 x$

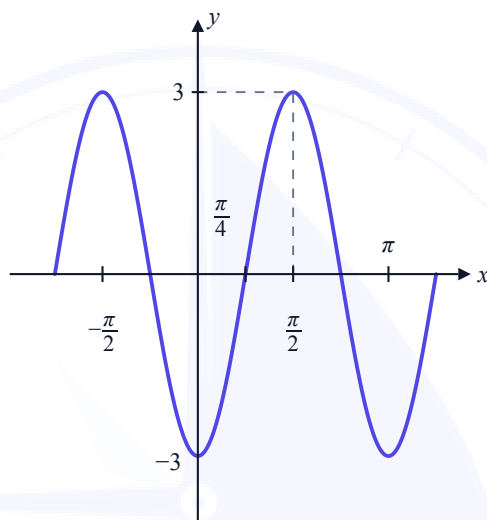


勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/cmgh-114a-g11a-1

4 如圖為函數 $y = f(x)$ 的部分圖形，其所代表的函數可能是下列哪些選項？

- (1) $y = 3 \cos 2x$
- (2) $y = -3 \cos 2x$
- (3) $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$
- (4) $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$
- (5) $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$



5 關於下列各方程式的解，請選出正確的選項：

- (1) 方程式 $2 - \cos x = 0$ 有實數解
- (2) 方程式 $\sin x = \frac{x}{8}$ 恰有 5 個實數解
- (3) 方程式 $x + \tan x = 0$ 在區間 $[-\pi, 2\pi]$ 中恰有 4 個實數解
- (4) 方程式 $\sin x \cos x = \frac{1}{3}$ 有實數解
- (5) 方程式 $\sin x + \cos x = \frac{3}{2}$ 有實數解

6 關於函數 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$ ，請選出正確的選項：

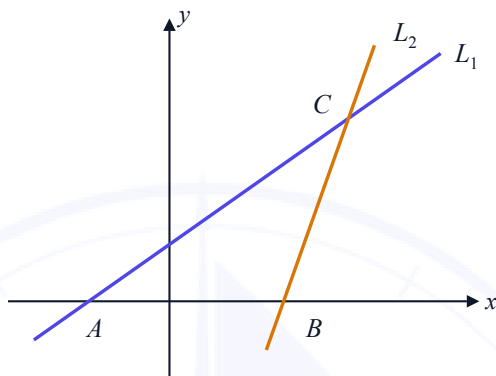
- (1) 直線 $x = \frac{\pi}{6}$ 為 $y = f(x)$ 圖形的對稱軸
- (2) 函數 $f(x)$ 在 $x = \frac{5\pi}{6}$ 時有最小值
- (3) 設 $y = f(x)$ 圖形在 y 軸上的交點坐標為 $(0, k)$ ，則 $k > -1$
- (4) 將 $y = f(x)$ 圖形向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 單位後，會與 $y = 2 \sin 2x$ 的圖形完全重合
- (5) 在區間 $[0, \pi)$ 中滿足 $f(x) = 1$ 的所有實數 x 之和小於 π

三、填充題（占 65 分） | 說明：第 7 題至第 15 題，每格 5 分。

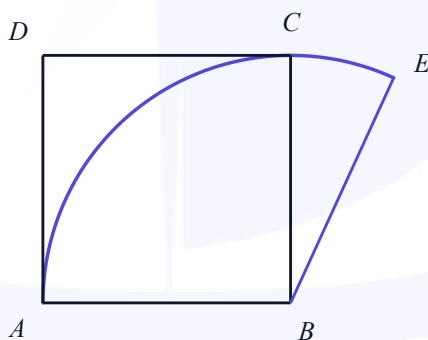
7 坐標平面上，已知兩點 $P(\cos 35^\circ, \cos 55^\circ)$ 、 $Q(\sin 5^\circ, -\cos 5^\circ)$ ，求 $\overline{PQ}$ 長度為 _____。



- 8 坐標平面上，設 $k > 1$ ，兩直線 $L_1: 2x - ky + 5 = 0$ 、 $L_2: kx - y - 10 = 0$ 與 x 軸圍成等腰三角形 ABC ，其中 $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，如圖所示。求實數 k 之值為 ____。



- 9 如圖，已知正方形 $ABCD$ 的邊長為 3，且扇形 ABE 之周長與正方形 $ABCD$ 之周長相等，求：(1) 扇形 ABE 的面積為 ____。(2) $\angle CBE =$ ____ 度。



- 10 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 的範圍內，求不等式 $\cos x \geq -\frac{1}{2}$ 的解為 ____。

- 11 坐標平面上， $A(10, 0)$ 、 $B(6, 8)$ 兩點在以原點 O 為圓心的圓上，圓上另有一點 C 位於第二象限滿足 $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ ，求三角形 OAC 面積為 ____。

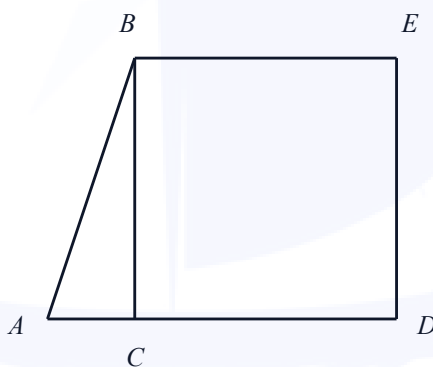


- 12 設 $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ， $270^\circ < \beta < 360^\circ$ ，且 $\cos \alpha = -\frac{1}{7}$ ， $\cos \beta = \frac{11}{14}$ ，求：(1) $\cos(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
(2) $\alpha - \beta = \underline{\hspace{2cm}}$ 度。(3) $\cos \frac{\alpha}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 13 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的範圍內，求函數 $f(x) = \sin x - \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 3$ 的最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 14 在 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 的範圍內，求方程式 $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 1$ 的實數解 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 15 如圖，直角三角形 ABC 中，已知 $\overline{AB} = 2$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ 。以邊 $\overline{BC}$ 作一正方形 $BCDE$ ，得到一個四邊形 $ABED$ ，求：(1) 四邊形 $ABED$ 的周長之最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(2) 承 (1)，此時正方形 $BCDE$ 的邊長為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/cmghsh-114a-g11a-1

答案一覽

第 1 題 (3)

第 2 題 (1)(3)

第 3 題 (3)(4)(5)

第 4 題 (2)(3)

第 5 題 (3)(4)

第 6 題 (2)(5)

第 7 題 $\sqrt{3}$

第 8 題 $2\sqrt{2}$

第 9 題 (1) 9 ; (2) $2 - \frac{\pi}{2}$

第 10 題 $-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$

第 11 題 48

第 12 題 (1) $\frac{1}{2}$; (2) $-\frac{\pi}{3}$; (3) $-\frac{\sqrt{21}}{7}$

第 13 題 2

第 14 題 $\frac{\pi}{4}$ 或 $-\frac{5\pi}{12}$

第 15 題 (1) $2 + 2\sqrt{10}$; (2) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)



第 1~3 題：弧度角落在哪個象限、三角函數的週期

- 1 答案 (3)。角度是 4 徑。 $\pi \approx 3.14$ 、 $\frac{3\pi}{2} \approx 4.71$ ，所以 $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$ ，4 徑在第三象限， $a = \cos 4 = -\cos(4 - \pi)$ 。 $4 - \pi \approx 0.86$ ，而 $\frac{\pi}{4} \approx 0.79$ 、 $\frac{\pi}{3} \approx 1.05$ ，所以 $\frac{\pi}{4} < 4 - \pi < \frac{\pi}{3}$ 。餘弦在 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 之間遞減，得 $\frac{1}{2} < \cos(4 - \pi) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，加上負號： $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < -\frac{1}{2}$ 。

沒有寫度的記號，單位就是徑。換成度來看：4 徑約 229° ，參考角約 49° ，介於 45° 與 60° 之間。實際值 $\cos 4 \approx -0.654$ 。

- 2 答案 (1)(3)。(1) 2、3 都在 0 與 π 之間，餘弦在這段遞減， $2 < 3$ 所以 $\cos 2 > \cos 3$ ，對。(2) 這裡有度的記號，角度是 π 度，約 3.14° ；角度小於 45° 時正弦小於餘弦 ($\sin 3.14^\circ \approx 0.05$ ， $\cos 3.14^\circ \approx 1$)，錯。(3) 正切在 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 之間遞增，而 $\frac{\pi}{4} \approx 0.79 < 1 < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\tan 1 > \tan \frac{\pi}{4} = 1$ ，對。(4) 因為 $3 < \pi < 3.5$ ，同乘 π 得 $3\pi < \pi^2 < 3\pi + \frac{\pi}{2}$ ， π^2 徑與 $\pi^2 - 2\pi$ 是同界角，落在 π 與 $\frac{3\pi}{2}$ 之間，是第三象限角；此時 $\cos(\pi^2) < 0$ 、 $\tan(\pi^2) > 0$ ，點的坐標是 (負，正)，在第二象限，錯。(5) 由餘弦的和角公式， $\cos 2 \cos 3 - \sin 2 \sin 3 = \cos 5$ ； $\frac{3\pi}{2} \approx 4.71 < 5 < 2\pi \approx 6.28$ ，5 徑在第四象限， $\cos 5 > 0$ ，所以 $\cos 2 \cos 3 > \sin 2 \sin 3$ ，錯。

(4) 要分清楚「角在第三象限」與「點在第三象限」：第三象限角的餘弦為負、正切為正，點的兩個坐標一負一正。

(2) 與其他選項的單位不同，要看有沒有度的記號。

- 3 答案 (3)(4)(5)。(1) $y = \tan x$ 的週期是 π ， $y = \tan 2x$ 的週期是 $\frac{\pi}{2}$ ，錯。(2) $y = \sin \frac{x}{2}$ 的週期是 $2\pi \div \frac{1}{2} = 4\pi$ ，錯。(3) $y = \tan x$ 每隔 π 重複一次，取絕對值後仍然每隔 π 重複；而且在一個週期 $0 \leq x < \pi$ 內只有 $x = 0$ 時函數值為 0，不會更早重複，週期是 π ，對。(4) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ ，週期 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ ，對。(5) 由 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ 得 $4\sin^2 x = 2 - 2\cos 2x$ ，週期 π ，對。

(1) 的函數每隔 π 也會重複，但週期指的是最小的正週期 $\frac{\pi}{2}$ 。(4)(5) 先用二倍角公式把平方降成一次，再看週期。

第 4~6 題：由圖形決定函數、方程式的解、疊合後的性質

- 4 答案 (2)(3)。從圖上讀： $x = 0$ 時是最低點 $y = -3$ ， $x = \frac{\pi}{2}$ 時是最高點 $y = 3$ ， $x = \frac{\pi}{4}$ 時 $y = 0$ 。最低點到相鄰最高點是半個週期，所以週期是 π ，與各選項的 $2x$ 相符。逐一代 $x = 0$ ：(1) $3\cos 0 = 3$ ，不合。(2) $-3\cos 0 = -3$ ，再代 $x = \frac{\pi}{2}$ 得 $-3\cos \pi = 3$ ，相符，對。(3) $3\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -3\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = -3\cos 2x$ ，與 (2) 是同一個函數，對。(4) $3\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos 2x$ ，與 (1) 相同，不合。(5) $x = 0$ 時 $3\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，不是 -3 ，不合。

同一個圖形可以有不同的寫法；(3)(4) 先用 $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos \theta$ 換成餘弦再比。



- 5 答案 (3)(4)。(1) $\cos x = 2$ ，但 $-1 \leq \cos x \leq 1$ ，無解，錯。(2) 看 $y = \sin x$ 與直線 $y = \frac{x}{8}$ 的交點。 $x = 0$ 是一個解。 $x > 0$ 時直線在 $x = 8$ 處高度到 1，而 $2\pi \approx 6.28 < 8 < 3\pi \approx 9.42$ ：在 $0 < x < \pi$ 這個山峰有 1 個交點（另一個是原點）；在 $2\pi < x < 3\pi$ 這個山峰，峰頂 $x = \frac{5\pi}{2}$ 處直線高度是 $\frac{5\pi}{16} \approx 0.98 < 1$ ，直線從峰頂下方穿過，交 2 點；再往右直線高度超過 1，沒有交點。 $x > 0$ 有 3 個解，兩邊都是奇函數， $x < 0$ 也有 3 個，共 $3 + 3 + 1 = 7$ 個，錯。(3) 看 $y = \tan x$ 與直線 $y = -x$ 的交點。 $-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$ ：正切由 0 增加到無限大， $-x$ 由 π 減少到 $\frac{\pi}{2}$ ，交 1 點。 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ：只交在原點，1 點。 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ：正切由負無限大增加到正無限大， $-x$ 遞減，交 1 點。 $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$ ：正切由負無限大增加到 0， $-x$ 由 $-\frac{3\pi}{2}$ 減少到 -2π ，交 1 點。共 4 個，對。(4) $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ ，方程式變成 $\sin 2x = \frac{2}{3}$ ， $\frac{2}{3}$ 在 -1 與 1 之間，有解，對。(5) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，最大值 $\sqrt{2} \approx 1.414 < \frac{3}{2}$ ，無解，錯。

(3) 每一段正切圖形都是遞增、直線 $y = -x$ 是遞減，所以每一段最多交一點，只要確認兩端誰高誰低就知道有沒有交點。(2) 的關鍵是直線到 $x = \frac{5\pi}{2} \approx 7.85$ 時高度還沒到 1。

- 6 答案 (2)(5)。疊合： $f(x) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 。(1) 對稱軸要通過最高點或最低點，但 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1$ ，不是 ± 2 ，錯。(2) $x = \frac{5\pi}{6}$ 時 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$ ， $f = 2 \sin \frac{3\pi}{2} = -2$ ，是最小值，對。(3) $k = f(0) = -\cos 0 = -1$ ， k 等於 -1 ，不是大於 -1 ，錯。(4) 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 是把 x 換成 $x + \frac{\pi}{6}$ ： $2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，不是 $2 \sin 2x$ ，錯。(5) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ ； $0 \leq x < \pi$ 時 $-\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{11\pi}{6}$ ，這段裡正弦值為 $\frac{1}{2}$ 的角是 $\frac{\pi}{6}$ 與 $\frac{5\pi}{6}$ ，得 $x = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{2}$ ，和為 $\frac{2\pi}{3} < \pi$ ，對。
- (4) 要重合，應該向左平移 $\frac{\pi}{12}$ ： $f(x) = 2 \sin 2\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ ，平移量要從「 x 」本身看，不是看 $\frac{\pi}{6}$ 。

第 7~11 題：和角公式、正切二倍角、扇形、三角不等式、等弧與二倍角

- 7 先把坐標都寫成同一個角的正弦、餘弦： $\cos 55^\circ = \sin 35^\circ$ ， $\sin 5^\circ = \cos 85^\circ$ ， $\cos 5^\circ = \sin 85^\circ$ ，所以 $P(\cos 35^\circ, \sin 35^\circ)$ 、 $Q(\cos 85^\circ, -\sin 85^\circ)$ 。 $\overline{PQ}^2 = (\cos 35^\circ - \cos 85^\circ)^2 + (\sin 35^\circ + \sin 85^\circ)^2 = 1 + 1 - 2(\cos 35^\circ \cos 85^\circ - \sin 35^\circ \sin 85^\circ) = 2 - 2 \cos(35^\circ + 85^\circ) = 2 - 2 \cos 120^\circ = 3$ ， $\overline{PQ} = \sqrt{3}$ 。
- 也可以看成單位圓上的兩點： P 在 35° 、 Q 在 -85° ，圓心角 120° ，弦長 $= 2 \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ 。
- 8 L_1 的斜率是 $\frac{2}{k}$ ， L_2 的斜率是 k ，都是正的。 L_1 交 x 軸於 $A\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ ， L_2 交 x 軸於 $B\left(\frac{10}{k}, 0\right)$ ， C 是兩直線的交點。設 $\angle CAB = \theta$ ，它就是 L_1 與 x 軸正向的夾角， $\tan \theta = \frac{2}{k}$ 。因為 $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，所以 $\angle BCA = \angle CAB = \theta$ ； L_2 與 x 軸正向的夾角是三角形在 B 的外角，等於 $\angle CAB + \angle BCA = 2\theta$ ，所以 $\tan 2\theta = k$ 。由二倍角公式 $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{\frac{4}{k}}{1 - \frac{4}{k^2}} = \frac{4k}{k^2 - 4}$ ，令它等於 k ： $k^2 - 4 = 4$ ， $k^2 = 8$ ， $k = 2\sqrt{2}$ ($k > 1$)。
- 驗算： $k = 2\sqrt{2}$ 時 $\tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\tan 2\theta = \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$ ，與 L_2 的斜率相符。等腰三角形相等的兩邊是 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ ，所以相等的是 A 、 C 兩個角。



- 9 扇形 ABE 以 B 為圓心、半徑 $\overline{BA} = 3$ ，設圓心角 $\angle ABE = \theta$ 徑。扇形周長 = 兩條半徑 + 弧長 = $3 + 3 + 3\theta$ ，正方形周長 = 12，所以 $6 + 3\theta = 12$ ， $\theta = 2$ 。(1) 面積 = $\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 9 \times 2 = 9$ 。(2) $\angle ABC$ 是正方形的內角，等於 $\frac{\pi}{2}$ 徑，所以 $\angle CBE = \angle ABE - \angle ABC = 2 - \frac{\pi}{2}$ 。
扇形的周長要加上兩條半徑。 $2 - \frac{\pi}{2} \approx 0.43$ 徑，約 24.6° ，是正的，與圖中 E 在正方形外側相符。

- 10 先找等號成立的位置：在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 內， $\cos x = -\frac{1}{2}$ 的解是 $x = \frac{2\pi}{3}$ 與 $x = -\frac{2\pi}{3}$ 。 $y = \cos x$ 的圖形在 $x = 0$ 最高，往左右兩邊下降，所以圖形在直線 $y = -\frac{1}{2}$ 上方（含交點）的部分是中間這一段：
 $-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ 。

用 $x = 0$ ($\cos 0 = 1 \geq -\frac{1}{2}$ ，合) 與 $x = \pi$ ($\cos \pi = -1$ ，不合) 各代一次，就能確認要的是中間那段而不是兩側。

- 11 $\overline{OA} = 10$ ， $\overline{OB} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ，圓的半徑是 10。設 $\angle AOB = \theta$ ，由 B 的坐標得 $\cos \theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ， $\sin \theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ 。等弧對的圓心角相等， $\angle BOC = \theta$ ； C 在第二象限，是從 B 再逆時針轉 θ ，所以 $\angle AOC = 2\theta$ 。 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$ 。三角形 OAC 面積 = $\frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 2\theta = 50 \times \frac{24}{25} = 48$ 。
檢查位置： $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = -\frac{7}{25}$ ，所以 $C\left(-\frac{14}{5}, \frac{48}{5}\right)$ ，確實在第二象限；以 $\overline{OA}$ 為底、高是 C 的 y 坐標，面積 = $\frac{1}{2} \times 10 \times \frac{48}{5} = 48$ ，結果相同。

第 12~15 題：差角與半角公式、疊合求極值與解方程式

- 12 α 在第三象限， $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \frac{1}{49}} = -\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ； β 在第四象限， $\sin \beta = -\sqrt{1 - \frac{121}{196}} = -\frac{5\sqrt{3}}{14}$ 。(1)
 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \left(-\frac{1}{7}\right)\left(\frac{11}{14}\right) + \left(-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)\left(-\frac{5\sqrt{3}}{14}\right) = \frac{-11 + 60}{98} = \frac{1}{2}$ 。(2)

由 $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ 與 $-360^\circ < -\beta < -270^\circ$ 相加得 $-180^\circ < \alpha - \beta < 0^\circ$ ；這個範圍內餘弦值為 $\frac{1}{2}$ 的角只有 -60° ，所以 $\alpha - \beta = -\frac{\pi}{3}$ 徑。(3) $90^\circ < \frac{\alpha}{2} < 135^\circ$ ，在第二象限，餘弦為負。由半角公式
 $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \frac{1}{7}}{2} = \frac{3}{7}$ ， $\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{3}{7}} = -\frac{\sqrt{21}}{7}$ 。

流傳版本的參考答案寫「(2) $-\frac{\sqrt{21}}{7}$ ；(3) $-\frac{\pi}{3}$ 」，兩格的順序與題目相反；依題目 (2) 問的是 $\alpha - \beta$ 、(3) 問的是 $\cos \frac{\alpha}{2}$ ，本頁照題目順序寫，數值相同。(2) 要先定出 $\alpha - \beta$ 的範圍，才知道是 $-\frac{\pi}{3}$ 而不是 $\frac{\pi}{3}$ 。

- 13 先用差角公式展開： $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$ ，所以 $f(x) = \sin x - \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + 3 = \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + 3 = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 3$ 。 $0 \leq x \leq 2\pi$ 時 $-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3}$ ，這段包含 $\frac{3\pi}{2}$ ，正弦最小可以到 -1 。最小值 = $-1 + 3 = 2$ 。

最小值發生在 $x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$ ，即 $x = \frac{11\pi}{6}$ ，在範圍內。兩項的角不同 (x 與 $\frac{\pi}{6} - x$)，要先展開成同一個角才能疊合。



14

疊合： $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \right) = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$ ，方程式變成

$\sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$ 。 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 時 $-\frac{4\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$ 。在這個範圍內正弦值為 $\frac{1}{2}$ 的角有 $\frac{\pi}{6}$ 與 $-\frac{7\pi}{6}$ 。 $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ 得 $x = \frac{\pi}{4}$ ； $2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{6}$ 得 $x = -\frac{5\pi}{12}$ 。

$-\frac{7\pi}{6}$ 是 $\frac{5\pi}{6}$ 減一圈，介於 $-\frac{4\pi}{3}$ 與 $\frac{2\pi}{3}$ 之間，不要漏掉； $\frac{5\pi}{6}$ 本身已超過 $\frac{2\pi}{3}$ ，不在範圍內。驗算 $x = -\frac{5\pi}{12}$ ：
 $\sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) - \sqrt{3} \cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$ 。

15

設 $\angle BAC = \theta$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$)。直角三角形 ABC 的斜邊 $\overline{AB} = 2$ ，所以 $\overline{BC} = 2 \sin \theta$ 、 $\overline{AC} = 2 \cos \theta$ ；正方形的邊長就是 $\overline{BC} = 2 \sin \theta$ 。由圖， A 、 C 、 D 在同一直線上， $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = 2 \cos \theta + 2 \sin \theta$ 。(1) 周長 $= \overline{AB} + \overline{BE} + \overline{ED} + \overline{DA} = 2 + 2 \sin \theta + 2 \sin \theta + (2 \cos \theta + 2 \sin \theta) = 2 + 6 \sin \theta + 2 \cos \theta$ 。疊合： $6 \sin \theta + 2 \cos \theta = 2\sqrt{10} \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{10}} \cos \theta \right) = 2\sqrt{10} \sin(\theta + \varphi)$ ，其中 $\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$ 、 $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 。當 $\theta + \varphi = 90^\circ$ 時最大，周長最大值為 $2 + 2\sqrt{10}$ 。(2) 此時 $\sin \theta = \sin(90^\circ - \varphi) = \cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ，邊長 $= 2 \sin \theta = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$ 。

確認取得到： $\varphi \approx 18.4^\circ$ ， $\theta \approx 71.6^\circ$ ($\tan \theta = 3$)，在 0° 與 90° 之間。周長裡正方形的邊出現三次 ($\overline{BE}$ 、 $\overline{ED}$ 、 $\overline{CD}$)， $\overline{BC}$ 在四邊形內部，不算在周長裡。

看到 $a \sin x + b \cos x$ 先疊合成單一正弦，再把 x 的範圍換成整個角的範圍，極值與方程式的解都在那個範圍裡找。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自景美女中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/cmgsh-114a-g11a-1