

建國中學 114 學年度上學期 高一第一次段考



御藍教育

範圍：數與式 · 是非題 63 分、填充題 18 分、計算題 19 分

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/ck-114a-g10-1

一、是非題 (每題 3 分, 正確寫 1, 錯誤寫 2)

- 1 $\frac{2025 + 2026}{2} > \sqrt{2025 \times 2026}$
- 2 $5 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$, 因此 $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$
- 3 $\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \sqrt{5}}}}}$ 是實數
- 4 $\frac{0.\overline{355}}{0.\overline{113}} = \frac{355}{113}$
- 5 $1 = \frac{1 - 0.\overline{9}}{1 - 0.9}$
- 6 $10^{\log 119} = 119$
- 7 $\frac{\log 6}{\log 3} = \frac{6}{3} = 2$
- 8 已知 $1.63 < \sqrt{2}^{\sqrt{2}} < 1.64$, 因此 $\sqrt{2}^{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})} > \sqrt{2}$
- 9 無窮小數 $x = 0.1010010001 \dots$ 中, 第 n 個 1 與第 $n + 1$ 個 1 之間有 n 個 0, 則 x 是無理數
- 10 已知 $a = 10^{0.301}$, 則 $a^{-100} = 10^{-0.1} \times 10^{-30}$ 在小數點後第 30 位開始不為零

題組甲 設 a, b 為實數, 已知 $-6, -1, 0, 4$ 都滿足 $|x - a| \leq b$

- 11 $\sqrt{15}$ 也滿足 $|x - a| \leq b$
- 12 $-4, 0, 1, 6$ 都滿足 $|x + a| \leq b$
- 13 $-12, -2, 0, 8$ 都滿足 $|x - a| \leq 2b$
- 14 $b \geq 5$
- 15 $a - b$ 可能為 -7

題組乙 設 x, y 為正實數, $2x + y = 6$

- 16 由於 $\frac{x + y}{2} = \frac{x + (6 - 2x)}{2} \geq \sqrt{x(6 - 2x)}$, 因此 $x + y$ 的最小值發生在 $x = 6 - 2x$ 時
- 17 $2^{2x} + 2^y$ 的最小值為 16



勾你錯的題號, 看錯在哪幾章, 註冊後直接從那幾章開始練

網頁版 (每題下面可以做一題同型的) : royalblue-education.com/school-exams/ck-114a-g10-1

題組丙 設 a, b 為正實數， $a^2 + b^2 = 1$

18 $ab \leq \frac{1}{2}$

19 $ab + b \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

20 $(a + b)^2 = 1 + 2ab \leq 1 + 1 = 2$ ，因此 $a + b$ 的最大值為 $\sqrt{2}$

21 $\sqrt{(a + 1)b} \leq \frac{(a + 1) + b}{2} \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ ，因此 $(a + 1)b$ 的最大值為 $\left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right)^2$

二、填充題（每題 6 分）

22 一個長方形沿著長邊的垂直平分線對摺，得到的新長方形長寬比（長邊 ÷ 短邊）與原長方形相同，則原長方形的長寬比為 _____

23 已知 $\sqrt[3]{5 + 3\sqrt[3]{12} + 3\sqrt[3]{18}} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ ， a, b 為正整數，則 $a + b =$ _____

24 已知 $\begin{cases} |x - 2| \leq a \\ |x + 2| \geq b \end{cases}$ 的解為 $1 \leq x \leq 7$ ，則 $(a, b) =$ _____

三、計算題（占 19 分）

25 判斷命題 A 是否正確：

「若正數 a, b 為無理數，則 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 必為無理數。」

正確請給完整證明；不正確請舉反例說明。（7 分）

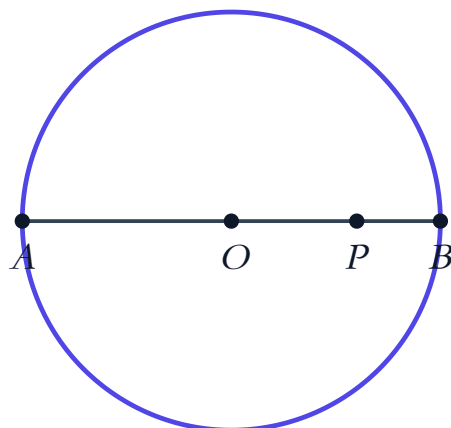


26

圖中圓的直徑 $\overline{AB} = a + b$ ， O 為圓心， $\overline{AP} = a$ ， $\overline{PB} = b$ 。

(1) 畫出一條長度為 $\sqrt{ab}$ 的線段，並說明原因。(6 分)

(2) 承上題，此圓內是否必然存在長度為 $\sqrt[4]{ab}$ 的弦？請給完整證明或舉反例。(6 分)



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版（每題下面可以做一題同型的）：royalblue-education.com/school-exams/ck-114a-g10-1

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/ck-114a-g10-1

答案一覽

是非題：1 = 正確、2 = 錯誤

1 對	2 錯	3 對	4 對	5 錯	6 對	7 錯
8 對	9 對	10 錯	11 對	12 對	13 錯	14 對
15 對	16 錯	17 對	18 對	19 錯	20 對	21 錯

22. $\sqrt{2}$

23. 5

24. $(a, b) = (5, 3)$

25. 不正確，反例 $a = 3 + 2\sqrt{2}$, $b = 6 - 4\sqrt{2}$

26. (1) 見詳解 (2) 不一定存在，反例 $a = 0.16$, $b = 0.01$

指數與對數的 三個陷阱

5 錯 $0.\bar{9} = 1$ ，分母 $1 - 0.\bar{9} = 0$ ，這個式子根本沒有意義。

8 對 底數 $\sqrt{2} > 1$ ，指數越大值越大。指數 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} > 1.63 > 1$ ，所以 $\sqrt{2}^{(\dots)} > \sqrt{2}^1 = \sqrt{2}$ 。

10 錯 $10^{-0.1} \approx 0.794$ ，所以 $a^{-100} \approx 0.794 \times 10^{-30} = 7.94 \times 10^{-31}$ 。

小數點後第 31 位才開始不為零。 $10^{-0.1}$ 小於 1，會讓位數再往後退一位。

看到 $10^{-0.1}$ ：先判斷它比 1 大還是小，再決定位數要不要退一位。

題組甲 把不等式翻成區間

$|x - a| \leq b \iff a - b \leq x \leq a + b$ 。四個數都在裡面 $\Rightarrow$ 區間 $[a - b, a + b]$ 要蓋住 $[-6, 4]$ ：
 $a - b \leq -6$ 且 $a + b \geq 4$

11 對 $\sqrt{15} \approx 3.87$ 在 $[-6, 4]$ 裡，當然也在區間裡。

12 對 $|x + a| \leq b$ 的區間是 $[-a - b, -a + b]$ ，就是原區間對 0 翻過來，蓋住 $[-4, 6]$ 。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版（每題下面可以做一題同型的）：royalblue-education.com/school-exams/ck-114a-g10-1

- 13 錯 反例 $a = -1, b = 5 : |-12 + 1| = 11 > 10$ 。
- 14 對 兩式相減： $2b \geq 10$ 。
- 15 對 $a = -1, b = 6 : a - b = -7$ ，且 $-7 \leq -6, 5 \geq 4$ 都成立。

題組乙丙 等號要真的成立

- 16 錯 右邊 $\sqrt{x(6-2x)}$ 跟著 x 變，不是定值。其實 $x + y = 6 - x, 0 < x < 3$ ，沒有最小值。
- 17 對 $2^{2x} + 2^y \geq 2\sqrt{2^{2x+y}} = 16$ ，右邊是定值，等號在 $x = \frac{3}{2}, y = 3$ 。
- 19 錯 $ab + b = (a+1)b$ ，最大值是 $\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.30$ ，比 $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1.21$ 大。
- 21 錯 第一個等號要 $a+1=b$ ，第二個要 $a=b$ ，不能同時成立。真正最大值在 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

用算幾求最值先問兩件事：另一邊是不是定值？等號做不做得得到？

填充 23 · 24

- 23 設 $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ ，三次方展開：
 $a + b + 3\sqrt[3]{a^2b} + 3\sqrt[3]{ab^2}$
 對照 $5 + 3\sqrt[3]{12} + 3\sqrt[3]{18} : a + b = 5, a^2b = 12, ab^2 = 18 \Rightarrow a = 2, b = 3$ 。
 答案 $a + b = 5$ 。第一步是兩邊立方，不是去拆根號裡面。
- 24 $|x-2| \leq a \Rightarrow 2-a \leq x \leq 2+a$ ，右端 $2+a=7 \Rightarrow a=5$ ，區間 $[-3, 7]$ 。
 $|x+2| \geq b \Rightarrow x \leq -2-b$ 或 $x \geq b-2$ 。
 要剛好切到 $[1, 7] : b-2=1 \Rightarrow b=3$ ，此時 $x \leq -5$ 那段和 $[-3, 7]$ 不重疊。
 答案 $(5, 3)$ 。

計算 25 找反例的方法

- 25 不正確 想法：讓 $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ 的無理部分互相抵消。
 取 $\sqrt{a} = 1 + \sqrt{2}, \sqrt{b} = 2 - \sqrt{2}$ （兩個都是正數）
 $a = (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}, b = (2 - \sqrt{2})^2 = 6 - 4\sqrt{2}$ ，兩個都是正的無理數，
 但 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 3$ 是有理數。

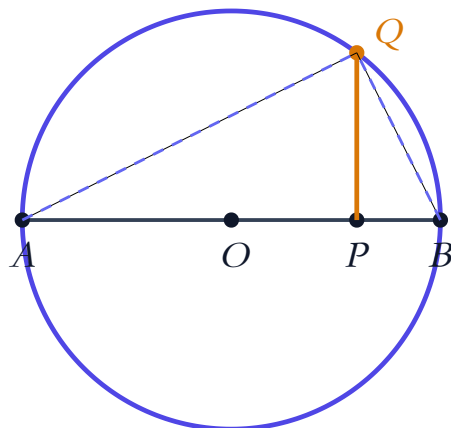
反例不是用猜的：先決定「答案要是無理數」，再倒推 a, b 。
 記得檢查 $b = 6 - 4\sqrt{2} \approx 0.34 > 0$ 。



計算 26

- (1) 過 P 作 AB 的垂線交圓於 Q ，則 $\overline{PQ} = \sqrt{ab}$ 。

直徑所對的圓周角是直角， $\triangle AQB$ 是直角三角形， $\overline{PQ}$ 是斜邊上的高： $\overline{PQ}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{PB} = ab$ 。



- (2) **不一定** 圓裡最長的弦是直徑 $a + b$ ，所以要 $\sqrt[4]{ab} \leq a + b$ 才存在。

反例 $a = 0.16, b = 0.01$ ： $\sqrt[4]{ab} = 0.2 > a + b = 0.17$ ，找不到這條弦。

你們學校的段考卷也想要詳解？考完把題目頁拍照或掃描上傳，我們收到後會盡快做好放上來，一樣免費下載。

上傳：royalblue-education.com/school-exams/submit（上傳前可以先把姓名、座號遮掉）

本卷題目取自建國中學 114 學年度上學期高一第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版（每題下面可以做一題同型的）：royalblue-education.com/school-exams/ck-114a-g10-1