

建國中學 113 學年度上學期 高三第一次段考

範圍：數列與函數的極限（選修數學甲上 第一章：數列的極限、無窮等比級數、函數、函數的極限與連續、夾擠定理、勘根定理） · 是非題 21 題（每題 2 分，共 42 分）、選填題 3 格（每格 6 分，共 18 分）、混合題 8 題（每題 5 分，共 40 分）；滿分 100 分。原卷注意事項：本卷出現的函數都滿足定義域與對應域都是實數的部分集合；若在呈現一個函數時未指明定義域，則定義域就是使函數有意義的最大集合



御藍教育

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/ck-113a-g12jia-1

一、是非題（每題 2 分，共 42 分）

- 1 由於 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ，因此無窮數列 $\left\langle 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right\rangle : 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots$ 不只遞增且有上界，為收斂數列。
- 2 當我們從校園走向圍牆時，若從出發點朝向牆腳 H 走直線，途中必定會經過一個中途點 M_1 。接著，從 M_1 再直線前往 H ，又會有另一個中途點 M_2 ，依此類推，從 M_2 再向 H 走，又會出現新的中途點 M_3 ，這樣不斷重複，會有無限多個中途點要經過，然而每個人的時間有限，因此我們走不到 H ，更不可能爬牆或穿牆。
- 3 若 $f(x) = \frac{(x-1)(x+91)}{x-1}$ ， $g(x) = x + 91$ ，則兩函數是同一個函數。
- 4 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+91)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+91)$
- 5 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2}$
- 6 若 $f(x) = 2024x$ ， $g(x) = \frac{x}{2024}$ ，則兩函數互為反函數。
- 7 若 $f(x) = |x|$ ， $g(x) = -|x|$ ，則兩函數互為反函數。
- 8 若 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數，則對於所有實數 x ，算式 $[1-3x] = -[3x-1]$ 恆成立。
- 9 若 $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ ，因為 $f(-1) < 0$ ， $f(1) > 0$ ，由勘根定理知，在區間 $(-1, 1)$ 內必有方程式 $f(x) = 0$ 的實根。
- 10 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ k, & x = 3 \end{cases}$ ($k \in \text{實數}$) 在 $x = 3$ 連續，則 $k = 6$ 。
- 11 若 $f(x) = x^2 + 2x$ ， $g(x) = x + 8$ ，則 $(g \circ f)(1) + (f \circ g)(2) = 131$ 。
- 12 $f(x) = \sqrt{36 - 2x - x^2}$ 的值域為 $[0, 6]$ 。
- 13
$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)^{102} - 1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)^{100}(x+1)^2 - 1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)^{100}(x+1)^2 - (x+1)^{100}}{x+2} =$$
$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)^{100}[(x+1)^2 - 1]}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)^{100}[(x+2)x]}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x+1)^{100}x = -2$$



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

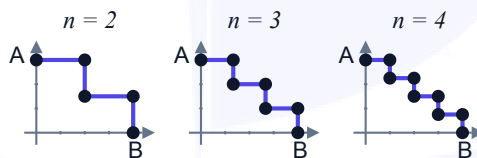
網頁版：royalblue-education.com/school-exams/ck-113a-g12jia-1

題組甲 已知無窮數列 $\langle a_n \rangle = \langle \overbrace{1.000\cdots 0}^{n \text{ 個 } 0} 1 \rangle : 1.01, 1.001, 1.0001, \dots, \overbrace{1.000\cdots 0}^{n \text{ 個 } 0} 1, \dots$ 。而且 $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列，極限為 L 。請判斷第 14~19 題的敘述是否正確。

- 14 L 可以用符號 $\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{1.000\cdots 0}^{n \text{ 個 } 0} 1$ 來表示。
- 15 $L > 1$
- 16 L 是集合 $\left\{ \overbrace{1.000\cdots 0}^{n \text{ 個 } 0} 1 \mid n \in \text{正整數} \right\}$ 中的一個元素。
- 17 $L > \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{0.999\cdots 9}^{n \text{ 個 } 9}$
- 18 $L > 0.\bar{9} \times 0.\bar{9}$
- 19 $L = 1.1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n 0.09 \times 10^{-k}$

題組乙 已知 $A(0, 3), B(4, 0)$ 為坐標平面上兩點，現在用 n 段等長的水平線段與 n 段等長的鉛直線段連接這兩點，如下圖所示（由左至右分別展示了 $n = 2, 3, 4$ 的情形）。設 S_k 代表當 $n = k$ 時，這些連接 A 和 B 兩點的 k 段水平線與 k 段鉛直線的長度總和。例如 S_2 代表 2 段水平線與 2 段鉛直線的長度總和 $\frac{4}{2} + \frac{4}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$ 。請判斷第 20 與 21 題的敘述是否正確。

- 20 $S_3 = S_4 = 7$



- 21 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = 5$

二、選填題（3 格，每格 6 分，共 18 分） | （原卷題號 A~C，本頁編為第 22~24 題）

- 22 若數列 $\left\langle \frac{3n^3}{n^3 + 9} \right\rangle$ 的極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3}{n^3 + 9} = L$ ，則此數列從第 _____ 項開始，其值與 L 的差 $\left| \frac{3n^3}{n^3 + 9} - L \right|$ 會小於 $\frac{1}{1000}$ 。

- 23 假設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, n = 1, 2, 3, \dots$ ，設 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ，且已知 $\langle b_n \rangle$ 為收斂數列，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 24 設 $(1 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 其中 a_n 與 b_n 都是有理數, 且已知極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ 存在, 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{\quad}$ 。

三、混合題（每題 5 分，共 40 分，請在答案卷上作答） | （原卷題號 1~8，本頁編為第 25~32 題；含單選題、填充題與計算證明題）

混合題 建仔希望利用極限的概念來探討某物體的溫度 ($^{\circ}\text{C}$) 隨時間 (分鐘) 的變化過程, 假設物體在初始時刻 (時間 0) 的溫度為 128°C , 並且用函數 $f(x)$ 來表示物體在時間 x 的溫度, 例如 $f(0) = 128$ 。根據牛頓冷卻定律, 物體的瞬時溫度變化速率與室溫與當時的溫度之間的溫差成正比。所謂的「瞬時溫度變化速率」指的是在一段趨近於零的時間內, 溫度變化的量除以這段時間的長度。已知室溫恆定為 20°C , 且物體在任意時間 k 的溫度瞬時變化速率正好等於室溫與當時溫度的溫差, 即 $\lim_{x \rightarrow k} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} = 20 - f(k)$, $k \geq 0$ 。例如, 物體在時間 0 的瞬時溫度變化速率為 $20 - f(0) = 20 - 128 = -108^{\circ}\text{C} / \text{分鐘}$ 。由於溫度的瞬時變化速率隨時間不斷變化, 難以直接算出 $f(1)$ 的值。為此, 建仔計劃先進行溫度的估計, 包括低估與高估, 並最終利用極限的概念和夾擠定理來推導出 $f(1)$ 的值。特別說明: 若某值 α 被稱為 a 的低估值, 則表示 $\alpha \leq a$ 。例如, 3 是圓周率 $\pi = 3.14\dots$ 的一個低估值。請回答下列問題 (原卷第 1~8 題, 本頁第 25~32 題)。

- 25 若在對 $f(1)$ 進行估計時, 假設 1 分鐘內的溫度變化速率保持恆定, 且等於時間 0 的瞬時變化速率 $-108^{\circ}\text{C} / \text{分鐘}$ 。請問, 根據這樣的計算, $f(1)$ 的低估值是多少? (單選題)
- (1) 90
 - (2) 86
 - (3) 74
 - (4) 60
 - (5) 20

御藍教育

ROYAL BLUE • EDUCATION



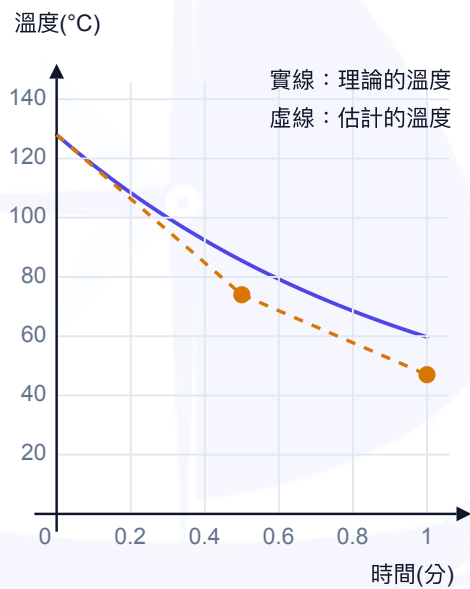
26

假設將時間從 0 到 1 分鐘均分為兩個階段：第一階段是 0 到 0.5 分鐘，第二階段是 0.5 分鐘到 1 分鐘。第一階段的溫度變化速率恆為時間 0 的瞬時變化速率，第二階段的溫度變化速率則根據 0.5 分鐘時的估計溫度推算。計算過程如下：

時間	溫度 (估計)	溫度瞬時變化速率 (估計)
0	128	-108
$\frac{1}{2}$	$128 + \frac{1}{2} \times (-108) = 74$	-54
1	$74 + \frac{1}{2} \times (-54) = 47$	-27

請問，根據這樣的計算， $f(1)$ 的低估值是多少？（單選題）

- (1) 108
- (2) 74
- (3) 54
- (4) 47
- (5) 27



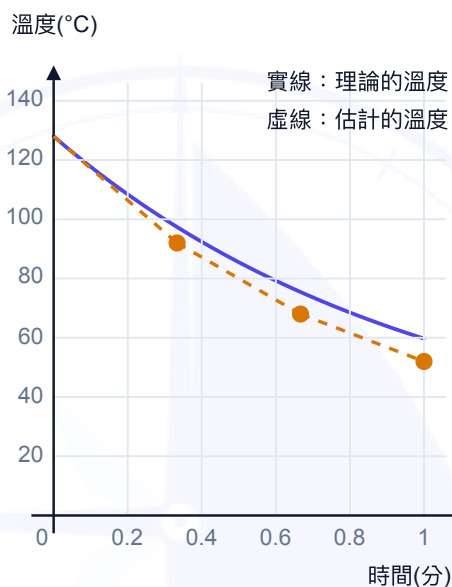
御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



- 27 假設將時間從 0 到 1 分鐘均分為三個階段，每個階段的時間長度為 $\frac{1}{3}$ 分鐘，請仿照前一題的估算方式，將下表完成：(填充題)

時間	溫度 (估計)	溫度瞬時變化速率 (估計)
0	128	-108
$\frac{1}{3}$	$128 + \frac{1}{3} \times (-108) = 92$	_____
$\frac{2}{3}$	_____	_____
1	_____	_____



- 28 假設將時間從 0 到 1 分鐘均分為 n 個階段，每個階段的時間長度為 $\frac{1}{n}$ 分鐘，並仿照前一題的方式進行計算。令 $t_{n,i}$ 表示在時間 $\frac{i}{n}$ 時，溫度的低估值，並定義 $d_{n,i} = 20 - t_{n,i}$ ， $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ 。

時間	溫度 (低估)	溫度瞬時變化速率 (估計)
0	$t_{n,0} = 128$	$d_{n,0} = -108$
$\frac{1}{n}$	$t_{n,1} = t_{n,0} + \frac{1}{n} \times d_{n,0}$	$d_{n,1} = 20 - t_{n,1}$
$\frac{2}{n}$	$t_{n,2} = t_{n,1} + \frac{1}{n} \times d_{n,1}$	$d_{n,2} = 20 - t_{n,2}$
...	...	...
$\frac{n-1}{n}$	$t_{n,n-1} = t_{n,n-2} + \frac{1}{n} \times d_{n,n-2}$	$d_{n,n-1} = 20 - t_{n,n-1}$
1	$t_{n,n} = t_{n,n-1} + \frac{1}{n} \times d_{n,n-1}$	$d_{n,n} = 20 - t_{n,n}$

請證明： $t_{n,n} = 108 \left(\frac{n-1}{n} \right)^n + 20$ 。



- 29 已知自然常數 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ，請證明： $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ 。提示： $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}$

- 30 將時間均分為 1、2、3、...、 n 個階段所計算的 $f(1)$ 的低估值寫成數列，再利用上一題的結果，找出當 n 趨近無限大時，該無窮數列的極限值。

- 31 假設同樣將時間從 0 到 1 分鐘均分為 n 個階段，每個階段的時間長度為 $\frac{1}{n}$ 分鐘，令 $T_{n,i}$ 表示在時間 $\frac{i}{n}$ 時，溫度的高估值， $t_{n,i}$ 與 $d_{n,i}$ 的定義與第 4 題（本頁第 28 題）相同，並使用下表中的計算方式計算 $T_{n,i}$ ， $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ 。

時間	溫度（高估）	溫度瞬時變化速率（估計）
0	$T_{n,0} = 128$	$d_{n,1} = 20 - t_{n,1}$
$\frac{1}{n}$	$T_{n,1} = T_{n,0} + \frac{1}{n} \times d_{n,1}$	$d_{n,2} = 20 - t_{n,2}$
$\frac{2}{n}$	$T_{n,2} = T_{n,1} + \frac{1}{n} \times d_{n,2}$	$d_{n,3} = 20 - t_{n,3}$
...	...	...
$\frac{n-1}{n}$	$T_{n,n-1} = T_{n,n-2} + \frac{1}{n} \times d_{n,n-1}$	$d_{n,n} = 20 - t_{n,n}$
1	$T_{n,n} = T_{n,n-1} + \frac{1}{n} \times d_{n,n}$	

請利用第 4 題（本頁第 28 題）的結果，證明： $T_{n,n} = \left(\frac{n-1}{n}\right) t_{n,n} + \frac{128}{n}$ 。



- 32 請利用以上結果，推論並算出此物體 1 分鐘後的溫度，即 $f(1)$ 的值。



御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/ck-113a-g12jia-1

答案一覽

是非題：1 = 正確、2 = 錯誤

1 2	2 2	3 2	4 1	5 1	6 1	7 2
8 2	9 2	10 1	11 1	12 2	13 2	14 1
15 2	16 2	17 2	18 2	19 1	20 1	21 2

第 22 題 30

第 23 題 2

第 24 題 3 (即極限為 $\sqrt{3}$)

第 25 題 (5)

第 26 題 (4)

第 27 題 時間 $\frac{1}{3}$ ：速率 -72 ；時間 $\frac{2}{3}$ ：溫度 $92 + \frac{1}{3} \times (-72) = 68$ 、速率 -48 ；時間 1：溫度 $68 + \frac{1}{3} \times (-48) = 52$ 、速率 -32

第 28 題 (證明題) 由 $t_{n,i+1} - 20 = \frac{n-1}{n} (t_{n,i} - 20)$ ， $\langle t_{n,i} - 20 \rangle$ 是首項 108、公比 $\frac{n-1}{n}$ 的等比數列，見詳解

第 29 題 (證明題) 把分母拆成 $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \times \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)$ ，兩個因式的極限分別是 e 與 1，見詳解

第 30 題 $\frac{108}{e} + 20$

第 31 題 (證明題) $T_{n,n}$ 與 $t_{n,n}$ 各自把 n 個速率加起來，兩者只差 $\frac{1}{n} (d_{n,n} - d_{n,0})$ ，見詳解

第 32 題 $f(1) = \frac{108}{e} + 20$ (約 59.7°C)

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)



是非第 1、2 題：一般項趨近 0，和不一定收斂；無限多段，總和可以有限

- 1 2 這個數列確實遞增，但沒有上界。把各項分組： $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$ ，其中 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2}$ ，之後每一組（項數依序為 8, 16, ...）也都大於 $\frac{1}{2}$ 。所以加到第 2^m 項時，和大於 $1 + \frac{m}{2}$ ，可以比任何數都大，數列發散。
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 只說明「加上去的數越來越小」，推不出「加起來有上界」。
- 2 2 中途點有無限多個，但經過它們所需的時間總和是有限的。設以等速走完全程要 T 分鐘，則出發點到 M_1 花 $\frac{T}{2}$ ， M_1 到 M_2 花 $\frac{T}{4}$ ， M_2 到 M_3 花 $\frac{T}{8}$ ，依此類推。總時間是首項 $\frac{T}{2}$ 、公比 $\frac{1}{2}$ 的無窮等比級數，和為 $\frac{T/2}{1 - \frac{1}{2}} = T$ ，所以走 T 分鐘就到 H 。
「有無限多段」不等於「要花無限久」：公比的絕對值小於 1 的無窮等比級數會收斂。

是非第 3~5 題：同一個函數與極限相等是兩回事

- 3 2 $f(x)$ 的分母不能為 0，定義域是 $x \neq 1$ 的所有實數； $g(x)$ 的定義域是全體實數。定義域不同，就不是同一個函數（ $g(1) = 92$ ，但 $f(1)$ 沒有定義）。
- 4 1 $x \rightarrow 1$ 的極限只看 x 靠近 1 但 $x \neq 1$ 的函數值。當 $x \neq 1$ 時 $\frac{(x-1)(x+91)}{x-1} = x+91$ ，兩個函數在 1 的附近（除了 1 本身）完全相同，所以極限相等，都是 92。
第 3 題與第 4 題是一組：函數不同，但在 $x \rightarrow 1$ 的極限相同。
- 5 1 $x-1 = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$ ，所以當 $x \neq 1$ 時 $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ 。 $x \rightarrow 1$ 時分母趨近 2，極限為 $\frac{1}{2}$ 。

是非第 6~8 題：反函數與高斯符號

- 6 1 $f(g(x)) = 2024 \times \frac{x}{2024} = x$ ， $g(f(x)) = \frac{2024x}{2024} = x$ ，對所有實數 x 都成立，所以 f 與 g 互為反函數。
- 7 2 互為反函數要滿足 $g(f(x)) = x$ 。但 $g(f(x)) = -||x|| = -|x|$ ，例如 $g(f(1)) = -1 \neq 1$ 。事實上 $f(1) = f(-1) = 1$ ， f 不是一對一函數，在全體實數上沒有反函數。
互為反函數的兩個圖形對稱於直線 $y = x$ ； $y = |x|$ 與 $y = -|x|$ 是對稱於 x 軸。
- 8 2 令 $y = 3x - 1$ ，題目的式子就是 $[-y] = -[y]$ ，它只在 y 是整數時成立。反例：取 $x = \frac{1}{2}$ ，則 $1 - 3x = -\frac{1}{2}$ ， $[1 - 3x] = -1$ ；而 $3x - 1 = \frac{1}{2}$ ， $-[3x - 1] = 0$ ，兩邊不相等。
 y 不是整數時， $[-y] = -[y] - 1$ 。



是非第 9、10 題：勘根定理的前提與連續的條件

- 9 2 $f(-1) = \frac{\cos(-1)}{-1} = -\cos 1 < 0$ 、 $f(1) = \cos 1 > 0$ 都沒錯，但勘根定理要求函數在閉區間 $[-1, 1]$ 上連續，而 $f(x)$ 在 $x = 0$ 沒有定義，不連續，定理不能用。事實上 $f(x) = 0$ 要 $\cos x = 0$ ，而 $1 < \frac{\pi}{2}$ ，在 $(-1, 1)$ 內 $\cos x > 0$ ，所以這個區間內沒有實根。
- 10 1 在 $x = 3$ 連續的條件是 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ 。當 $x \neq 3$ 時 $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$ ，所以 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$ ；而 $f(3) = k$ ，得 $k = 6$ 。

是非第 11~13 題：合成函數、值域、檢查每一個等號

- 11 1 $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = 11$ ； $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(10) = 100 + 20 = 120$ 。兩者相加 $11 + 120 = 131$ 。
- 12 2 配方： $36 - 2x - x^2 = 37 - (x + 1)^2$ ，最大值是 37 ($x = -1$ 時)，最小可以到 0。所以根號內的範圍是 $[0, 37]$ ， $f(x)$ 的值域是 $[0, \sqrt{37}]$ ，不是 $[0, 6]$ 。
 $[0, 6]$ 是把一次項 $-2x$ 漏掉、當成 $\sqrt{36 - x^2}$ 的結果。
- 13 2 第二個等號不成立：分子的 -1 被換成了 $-(x + 1)^{100}$ ，這兩個式子不相等，兩個極限也不相等。
正確算法：令 $u = x + 1$ ，則 $x \rightarrow -2$ 時 $u \rightarrow -1$ ，原式 $= \lim_{u \rightarrow -1} \frac{u^{102} - 1}{u + 1}$ 。因為 $u^{102} - 1 = (u^2 - 1)(u^{100} + u^{98} + \cdots + u^2 + 1)$ ，後一個括號共 51 項，所以 $\frac{u^{102} - 1}{u + 1} = (u - 1)(u^{100} + u^{98} + \cdots + 1)$ ， $u \rightarrow -1$ 時趨近 $(-2) \times 51 = -102$ 。原式的值是 -102 ，不是 -2 。
式子裡 $x \rightarrow -2$ 時 $(x + 1)^{100} \rightarrow 1$ ，看起來「反正都是 1」，但分母也趨近 0，這時分子差一點點，極限就可能差很多。

題組甲（第 14~19 題）：極限值 $L=1$

- 14 1 $a_n = 1.\overbrace{000 \cdots 0}^{n \text{ 個 } 0}1 = 1 + \frac{1}{10^{n+1}}$ 。數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限本來就記作 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ，把 a_n 的寫法代進去就是題目的符號。又 $\frac{1}{10^{n+1}} \rightarrow 0$ ，所以 $L = 1$ 。
- 15 2 $L = 1$ ，不大於 1。每一項 a_n 都大於 1，但取極限之後只能保證 $L \geq 1$ 。
「每一項都大於某數」取極限後，不等號要補上等號。
- 16 2 這個集合就是所有的 a_n ，而每個 $a_n = 1 + \frac{1}{10^{n+1}} > 1$ ，沒有任何一項等於 1，所以 $L = 1$ 不在集合裡。
極限是數列「趨近」的值，不一定是數列中的某一項。
- 17 2 $0.\overbrace{999 \cdots 9}^{n \text{ 個 } 9} = 1 - \frac{1}{10^n}$ ， $n \rightarrow \infty$ 時極限為 1。所以右邊等於 1，而 $L = 1$ ，兩邊相等， $L > 1$ 不成立。
- 18 2 $0.\bar{9} = 0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots = \frac{0.9}{1 - 0.1} = 1$ ，所以 $0.\bar{9} \times 0.\bar{9} = 1$ ，與 L 相等，不是 L 比較大。



- 19 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n 0.09 \times 10^{-k}$ 是首項 0.09、公比 $\frac{1}{10}$ 的無窮等比級數的和，等於 $\frac{0.09}{1-0.1} = 0.1$ 。所以右邊 $= 1.1 - 0.1 = 1 = L$ 。

k 從 0 開始，首項是 0.09，不是 0.009。

這一組六題都在問同一件事： a_n 每一項都比 1 大一點點，但極限恰好是 1； $0.\bar{9}$ 也恰好是 1，不是「比 1 小一點點」。

題組乙（第 20、21 題）：階梯折線的總長

- 20 1 $n = k$ 時，每段水平線段長 $\frac{4}{k}$ 、共 k 段，合計 4；每段鉛直線段長 $\frac{3}{k}$ 、共 k 段，合計 3。所以不論 k 是多少， $S_k = 4 + 3 = 7$ ， $S_3 = S_4 = 7$ 。
- 21 2 由上題， $\langle S_k \rangle$ 是每一項都等於 7 的常數數列，極限是 7，不是 5。
5 是線段 $\overline{AB}$ 的長 ($\sqrt{4^2 + 3^2}$)。階梯折線看起來越來越貼近 $\overline{AB}$ ，但折線的長度一直是 7，不會趨近 5；圖形看起來接近，長度不一定接近。

選填 A~C（第 22~24 題）：數列的極限

- 22 分子分母同除以 n^3 ： $\frac{3n^3}{n^3+9} = \frac{3}{1+\frac{9}{n^3}} \rightarrow 3$ ，所以 $L = 3$ 。差 $\left| \frac{3n^3}{n^3+9} - 3 \right| = \left| \frac{3n^3 - 3n^3 - 27}{n^3+9} \right| = \frac{27}{n^3+9}$ 。要它小於 $\frac{1}{1000}$ ，即 $n^3 + 9 > 27000$ ， $n^3 > 26991$ 。因為 $29^3 = 24389 < 26991$ 、 $30^3 = 27000 > 26991$ ，且 $\frac{27}{n^3+9}$ 隨 n 變大而變小，所以從第 30 項開始。
30³ 剛好是 27000，只比 26991 多 9；分母的 +9 不能省略，省略後會變成 $n^3 > 27000$ 而答成 31。
- 23 各項 a_n 都是正數，遞迴式兩邊同除以 a_{n+1} ： $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{2a_n}{a_{n+1}}$ ，即 $b_{n+1} = 1 + \frac{2}{b_n}$ 。由此 $b_{n+1} > 1$ ，所以極限 $r = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq 1$ ，不為 0。兩邊取極限： $r = 1 + \frac{2}{r}$ ， $r^2 - r - 2 = 0$ ， $(r-2)(r+1) = 0$ ，取 $r = 2$ ($r = -1$ 不合)。
實際列幾項： a_n 為 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, ...， b_n 為 1, 3, $\frac{5}{3}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{21}{11}$, $\frac{43}{21}$, ...，在 2 的兩側來回靠近。
- 24 $(1 + \sqrt{3})^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = (a_n + 3b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{3}$ 。 a_n, b_n 都是有理數，比較兩邊得 $a_{n+1} = a_n + 3b_n$ 、 $b_{n+1} = a_n + b_n$ 。由 $a_1 = b_1 = 1$ 知各項都是正數。令 $r_n = \frac{a_n}{b_n}$ ，則 $r_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{a_n + b_n} = \frac{r_n + 3}{r_n + 1}$ 。設極限為 r ($r \geq 0$)，兩邊取極限： $r = \frac{r+3}{r+1}$ ， $r^2 + r = r + 3$ ， $r^2 = 3$ ， $r = \sqrt{3}$ 。
。空格填 3。
另一個看法：同樣展開可得 $(1 - \sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$ ，而 $|1 - \sqrt{3}| < 1$ ，所以 $a_n - b_n\sqrt{3} \rightarrow 0$ ； b_n 越來越大，除以 b_n 後 $\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{3} \rightarrow 0$ 。

題目已經告訴你極限存在時，把遞迴式改寫成「下一項＝這一項的式子」，兩邊同時取極限解方程式，再用各項的正負號或範圍挑出合理的根。



混合題 1~3 (第 25~27 題)：分段估計 $f(1)$

- 25 答案 (5)。整整 1 分鐘都用速率 $-108^{\circ}\text{C} / \text{分鐘}$ ： $128 + 1 \times (-108) = 20$ 。

實際上溫度越接近室溫降得越慢，全程都用一開始最快的速率來降，估出來的溫度會偏低，所以是低估值。

- 26 答案 (4)。照表格： 0.5 分鐘時估計 $128 + \frac{1}{2} \times (-108) = 74$ ，此時的速率估計為 $20 - 74 = -54$ ； 1 分鐘時估計 $74 + \frac{1}{2} \times (-54) = 47$ 。所以 $f(1)$ 的低估值是 47 。

問的是 1 分鐘時的溫度，是表格最後一列的溫度 47 ； -27 是那個時刻的速率， 74 是 0.5 分鐘時的溫度。

- 27 每一列的速率 = $20 -$ 該列的估計溫度，下一列的溫度 = 這一系列的溫度 + $\frac{1}{3} \times$ 這一系列的速率。時間 $\frac{1}{3}$ ：溫度 92 ，速率 $20 - 92 = -72$ 。時間 $\frac{2}{3}$ ：溫度 $92 + \frac{1}{3} \times (-72) = 68$ ，速率 $20 - 68 = -48$ 。時間 1 ：溫度 $68 + \frac{1}{3} \times (-48) = 52$ ，速率 $20 - 52 = -32$ 。

三次的低估值 20 、 47 、 52 越來越大：分得越細，低估得越少。溫差 $108, 72, 48, 32$ 是公比 $\frac{2}{3}$ 的等比數列，下一題就是把這個規律寫成一般式。

混合題 4~6 (第 28~30 題)：低估值的一般式與極限

- 28 由表格，對 $i = 0, 1, \dots, n-1$ 都有 $t_{n,i+1} = t_{n,i} + \frac{1}{n} d_{n,i} = t_{n,i} + \frac{1}{n} (20 - t_{n,i})$ ($i = 0$ 時 $d_{n,0} = -108 = 20 - t_{n,0}$ 也符合)。兩邊同減 20 ： $t_{n,i+1} - 20 = (t_{n,i} - 20) - \frac{1}{n} (t_{n,i} - 20) = \frac{n-1}{n} (t_{n,i} - 20)$ 。所以 $t_{n,0} - 20, t_{n,1} - 20, \dots, t_{n,n} - 20$ 是首項 $128 - 20 = 108$ 、公比 $\frac{n-1}{n}$ 的等比數列，第 n 次之後 $t_{n,n} - 20 = 108 \left(\frac{n-1}{n} \right)^n$ ，即 $t_{n,n} = 108 \left(\frac{n-1}{n} \right)^n + 20$ 。

關鍵是看「與室溫的差」 $t_{n,i} - 20$ ：每走一個階段，這個差就乘上 $1 - \frac{1}{n}$ 。用 $n = 2$ 檢查： $108 \times \frac{1}{4} + 20 = 47$ ； $n = 3$ ： $108 \times \frac{8}{27} + 20 = 52$ ，與前兩題相同。

- 29 對 $n \geq 2$ ，照提示 $\left(\frac{n-1}{n} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} \times \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)}$ 。令 $m = n - 1, n \rightarrow \infty$ 時 $m \rightarrow \infty$ ，所以 $\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m \rightarrow e$ ；又 $1 + \frac{1}{n-1} \rightarrow 1$ 。兩個因式的極限都存在，且乘積的極限 $e \times 1 = e \neq 0$ ，由極限的運算性質， $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n = \frac{1}{e \times 1} = \frac{1}{e}$ 。

已知的是「底數 $1 + \frac{1}{m}$ 、指數也是 m 」的極限，指數與分母要湊成同一個數才能用，多出來的一次方另外處理。

- 30 分成 n 個階段的低估值就是第 28 題的 $t_{n,n} = 108 \left(\frac{n-1}{n} \right)^n + 20$ 。由第 29 題， $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{n,n} = 108 \times \frac{1}{e} + 20 = \frac{108}{e} + 20$ 。

$e \approx 2.718$ ，這個值約為 59.7 。數列的前三項是 $20, 47, 52$ ，逐漸往 59.7 靠近。



混合題 7、8 (第 31、32 題)：高估值與夾擠定理

- 31 把高估表的各列加起來： $T_{n,n} = 128 + \frac{1}{n}(d_{n,1} + d_{n,2} + \cdots + d_{n,n})$ 。同樣把第 28 題低估表的各列加起來： $t_{n,n} = 128 + \frac{1}{n}(d_{n,0} + d_{n,1} + \cdots + d_{n,n-1})$ 。兩式相減，中間的 $d_{n,1}, \dots, d_{n,n-1}$ 全部消掉： $T_{n,n} - t_{n,n} = \frac{1}{n}(d_{n,n} - d_{n,0})$ 。代入 $d_{n,n} = 20 - t_{n,n}$ 、 $d_{n,0} = -108$ ： $T_{n,n} = t_{n,n} + \frac{1}{n}(20 - t_{n,n} + 108) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)t_{n,n} + \frac{128}{n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)t_{n,n} + \frac{128}{n}$ 。

高估表每個階段用的是「階段結束時」的速率（降得比較慢），低估表用的是「階段開始時」的速率（降得比較快），兩張表用的速率只差頭尾各一個。

- 32 對每個正整數 n ， $t_{n,n}$ 是 $f(1)$ 的低估值、 $T_{n,n}$ 是高估值，所以 $t_{n,n} \leq f(1) \leq T_{n,n}$ 。由第 30 題， $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{n,n} = \frac{108}{e} + 20$ 。由第 31 題， $T_{n,n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)t_{n,n} + \frac{128}{n}$ ，其中 $\frac{n-1}{n} \rightarrow 1$ 、 $\frac{128}{n} \rightarrow 0$ ，所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{n,n} = 1 \times \left(\frac{108}{e} + 20\right) + 0 = \frac{108}{e} + 20$ 。 $f(1)$ 是一個固定的數，被兩個極限相同的數列夾在中間，由夾擠定理， $f(1) = \frac{108}{e} + 20$ （約 59.7°C ）。

答案寫成 $\frac{108}{e} + 20$ 即可；圖中實線在時間 1 的高度略低於 60，與 59.7 相符。

整個混合題是同一條路：分段估計 → 寫成等比數列 → 取極限 → 用低估與高估把真正的值夾住。每一小題的結果都是下一小題的工具。

御藍教育

ROYAL BLUE • EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自建國中學 113 學年度上學期高三第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE • EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/ck-113a-g12jia-1