

彰化高中 113 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數（弧度量與扇形、三角函數的圖形與週期、和差角與倍角半角公式、正餘弦的疊合） · 單選題 5 題（每題 5 分，共 25 分）、多選題 2 題（每題 5 分，共 10 分）、填充題 13 題（依答對題數給分，全對 65 分），合計 100 分。

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/chsh-113a-g11a-1

一、單選題（占 25 分） 說明：第 1 題至第 5 題，每題 5 分。

1 若 $\frac{1}{\sin 70^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 70^\circ} = ?$

- (1) 4
- (2) -4
- (3) $\sin 130^\circ$
- (4) $-\sin 130^\circ$
- (5) -2

2 下列選項中的值何者最接近 1？

- (1) $\sin 10^\circ + \cos 10^\circ$
- (2) $\sin 20^\circ + \cos 20^\circ$
- (3) $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ$
- (4) $\sin 40^\circ + \cos 40^\circ$
- (5) $\sin 85^\circ + \cos 85^\circ$

3 方程式 $1 - \pi \sin(\pi x) = x$ 共有幾個實數解？

- (1) 3
- (2) 5
- (3) 7
- (4) 11
- (5) 9



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/chsh-113a-g11a-1

4 若 $a = 1 - 2 \sin^2 1$, $b = \sin 2$, $c = \cos 3$, $d = \sqrt{\frac{1 + \cos 2}{2}}$, $e = \frac{\sin 2}{1 + \cos 2}$, 求這五個數的中位數是?

- (1) a
- (2) b
- (3) c
- (4) d
- (5) e

5 若 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$, $f(x) = \cos 2x + 4 \cos x$, 則 $f(x)$ 最大值為何?

- (1) $\frac{1}{3}$
- (2) $\frac{3}{2}$
- (3) $-\frac{1}{2}$
- (4) 3
- (5) -1

二、多選題 (占 10 分) 說明: 第 6 題至第 7 題, 每題 5 分。(5-3-1-0)

6 下列哪些函數的最小正週期為 π

- (1) $\sin 2x$
- (2) $\tan x$
- (3) $\sin 2x + \cos 2x$
- (4) $\sin |x|$
- (5) $|\sin x|$

7 關於函數 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos x + 1$ 的敘述, 下列選項哪些正確?

- (1) 將 $y = \sqrt{3} \cos x$ 移動, 可以與之重疊
- (2) 振幅為 2
- (3) 週期為 π
- (4) 當 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi$ 時, 函數 y 最大值為 $\sqrt{3} + 1$
- (5) $x = \frac{\pi}{6}$ 為對稱軸

三、填充題 (占 65 分) 說明: 第 8 題至第 20 題。答對 1~13 題依序得 6、12、18、24、29、34、39、44、49、53、57、61、65 分。

8 已知扇形的半徑為 4 公分, 周長為 20 公分, 試求此扇形的面積 _____。



9 已知 α, β 均為銳角， $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ， $\cos \beta = \frac{5}{13}$ ，試求 $\sin(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10 試求兩直線 $L_1: 2x - y - 6 = 0$ 與 $L_2: 3x - y + 5 = 0$ 夾角的正弦值 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

11 將 $y = \sin x$ 以 y 軸為基準，左右（水平）伸縮為 a 倍，再向左平移 b ，其中 $a > 0, 0 < b < 2\pi$ ，得 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，則 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12 將函數 $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ 疊合成正弦曲線的形式，即 $r\sin(x + \theta)$ ，其中 $r > 0, -\pi < \theta < \pi$ ，則 $\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13 已知 $\tan A = 2, \tan B = 3$ ，求 $\frac{\sin(A+B)}{\cos(A-B)}$ 的值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

14 試求 $\cos\left(\frac{\pi}{33}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{33}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{33}\right)\cos\left(\frac{8\pi}{33}\right)\cos\left(\frac{16\pi}{33}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15 海水受到月球引力的影響會發生漲落的潮汐現象，下表是某港口在一天內海水漲落的記錄表（時間 t 的單位是小時，水深 y 的單位是公尺）：

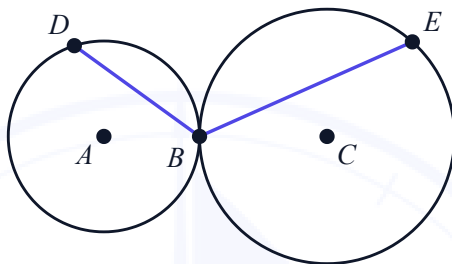
t	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y	5	4	-3	-2	5	4	-3	-2	5

經過長期的觀測得知，水深 y 與時間 t 可以用函數 $f(t) = a\sin bt + c\cos bt + d$ 來描述，根據上述資料，求出正數 a, b, c, d 的值，則 $a + c + d = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

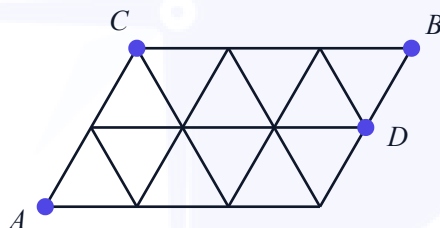
16 設 $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{2}$ ，若 $(1 + \sqrt{1 + \sin \theta})^2 + (1 + \sqrt{1 - \sin \theta})^2$ 最大值為 M ，最小值為 m ，求 $M - m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 17 如圖， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 4$ ，圓 A 為圓心 A 半徑 3，圓 C 為圓心 C 半徑 4，分別在圓 A 上取一點 D ，圓 C 上取一點 E 使得 $\angle DBE$ 為 $\frac{2\pi}{3}$ ，求 $\overline{BD} + \overline{BE}$ 為最大值時， $\overline{BD} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。



- 18 如圖，每個小三角形皆為正三角形，若直線 AB 與直線 CD 夾角為 θ ，則 $|\tan \theta| = \underline{\hspace{1cm}}$ 。



- 19 設銳角三角形 ABC 的內切圓半徑為 1。已知內切圓圓心 O ， $\overline{OB} = \sqrt{10}$ ， $\overline{OC} = \sqrt{5}$ ，則 $\overline{OA} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

- 20 若 $y = \sin |x|$ 與 $y = \frac{a}{\pi^2} x^2 - 1$ 交於 A 、 B 兩點，且 $\overline{AB} = \frac{\pi}{3}$ ，則 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ 。



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/chsh-113a-g11a-1

答案一覽

- 第 1 題 (2)
第 2 題 (5)
第 3 題 (3)
第 4 題 (4)
第 5 題 (2)
第 6 題 (1)(2)(3)(5)
第 7 題 (1)(5)
第 8 題 24 平方公分
第 9 題 $\frac{63}{65}$
第 10 題 $\frac{\sqrt{2}}{10}$
第 11 題 $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$
第 12 題 $-\frac{\pi}{6}$
第 13 題 $\frac{5}{7}$
第 14 題 $\frac{1}{32}$
第 15 題 8
第 16 題 $4 - 2\sqrt{2}$
第 17 題 $\frac{30\sqrt{37}}{37}$
第 18 題 $\frac{9\sqrt{3}}{17}$
第 19 題 $\sqrt{2}$
第 20 題 54

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。（不用註冊）
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit（可以先把姓名、座號遮掉）



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/chsh-113a-g11a-1

單選第 1、2 題：把正弦與餘弦合成一個

- 1 答案 (2)。通分：原式 $= \frac{\cos 70^\circ - \sqrt{3} \sin 70^\circ}{\sin 70^\circ \cos 70^\circ}$ 。分子提出 2：2 $\left(\frac{1}{2} \cos 70^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 70^\circ \right) = 2(\sin 30^\circ \cos 70^\circ - \cos 30^\circ \sin 70^\circ) = 2 \sin(30^\circ - 70^\circ) = -2 \sin 40^\circ$ 。分母用倍角公式： $\sin 70^\circ \cos 70^\circ = \frac{1}{2} \sin 140^\circ = \frac{1}{2} \sin 40^\circ$ 。所以原式 $= \frac{-2 \sin 40^\circ}{\frac{1}{2} \sin 40^\circ} = -4$ 。
- 估計正負可先檢查： $\frac{1}{\sin 70^\circ} \approx 1.06$ ， $\frac{\sqrt{3}}{\cos 70^\circ} \approx 5.06$ ，相減約 -4 。
- 2 答案 (5)。疊合： $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ)$ 。五個選項依序是 $\sqrt{2} \sin 55^\circ$ 、 $\sqrt{2} \sin 65^\circ$ 、 $\sqrt{2} \sin 75^\circ$ 、 $\sqrt{2} \sin 85^\circ$ 、 $\sqrt{2} \sin 130^\circ = \sqrt{2} \sin 50^\circ$ 。這些角都在 45° 與 90° 之間，正弦值都比 $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 大，所以五個值都大於 1；其中 $\sin 50^\circ$ 最小， $\sqrt{2} \sin 50^\circ \approx 1.08$ 最接近 1。
- θ 愈靠近 0° 或 90° ， $\sin \theta + \cos \theta$ 愈接近 1； 85° 離 90° 只差 5° ，比 10° 離 0° 更近。

同一個角的正弦與餘弦相加減，先提出係數疊合成一個三角函數再處理。

單選第 3 題：把方程式看成兩個圖形的交點

- 3 答案 (3)。移項得 $\sin(\pi x) = \frac{1-x}{\pi}$ ，實數解的個數就是 $y = \sin(\pi x)$ (週期 2) 與直線 $y = \frac{1-x}{\pi}$ 的交點個數。 $x = 1$ 時兩邊都是 0，是一個解。令 $u = x - 1$ ， $\sin(\pi x) = \sin(\pi u + \pi) = -\sin(\pi u)$ ，方程式變成 $\sin(\pi u) = \frac{u}{\pi}$ ；兩邊都是奇函數， u 是解則 $-u$ 也是解，所以只要數 $u > 0$ 的解。正弦值不超過 1，所以 $\frac{u}{\pi} \leq 1$ ，即 $0 < u \leq \pi \approx 3.14$ 。在 $0 < u < 1$ ： $\sin(\pi u)$ 從 0 升到 1 再降回 0，直線由 0 慢慢升到 $\frac{1}{\pi} \approx 0.32$ ； $u \leq \frac{1}{2}$ 時曲線在連接原點與山頂 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 的線段上方， $\sin(\pi u) \geq 2u > \frac{u}{\pi}$ ，沒有交點， $\frac{1}{2} < u < 1$ 時正弦由 1 降到 0 而直線上升，恰有 1 個交點。在 $1 \leq u \leq 2$ ： $\sin(\pi u) \leq 0$ 而直線為正，沒有交點。在 $2 < u < 3$ ：正弦又是一個由 0 到 1 再回 0 的山峰，直線的高度在 $\frac{2}{\pi} \approx 0.64$ 到 $\frac{3}{\pi} \approx 0.95$ 之間，山頂 $u = 2.5$ 處直線高 $\frac{2.5}{\pi} \approx 0.80 < 1$ ，所以上坡、下坡各交 1 點，共 2 個。在 $3 \leq u \leq \pi$ ： $\sin(\pi u) \leq 0$ ，沒有交點。 $u > 0$ 共 3 個解， $u < 0$ 也 3 個，加上 $u = 0$ ，共 7 個。
- 流傳版本的參考答案寫 (5) (9 個)，但依題幹所印的方程式重算為 7 個 (數值求根得 $x \approx -1.68, -1.25, 0.09, 1, 1.91, 3.25, 3.68$)，本站答案寫 (3)。

單選第 4、5 題：倍角與半角公式

- 4 答案 (4)。先化簡： $a = 1 - 2 \sin^2 1 = \cos 2$ ； $d = \sqrt{\frac{1 + \cos 2}{2}} = \sqrt{\cos^2 1} = \cos 1$ (1 弧度是銳角，餘弦為正)； $e = \frac{2 \sin 1 \cos 1}{2 \cos^2 1} = \tan 1$ 。1 弧度約 57.3° ，所以 2 弧度約 114.6° ，3 弧度約 171.9° 。逐一估計： $c = \cos 171.9^\circ$ 接近 -1 ； $a = \cos 114.6^\circ$ 介於 $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ 與 0 之間； $d = \cos 57.3^\circ$ 介於 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 之間； $b = \sin 114.6^\circ = \sin 65.4^\circ$ 介於 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 與 1 之間； $e = \tan 57.3^\circ > \tan 45^\circ = 1$ 。由小到大是 $c < a < d < b < e$ ，中位數是 d 。
- 這裡的 1、2、3 沒有寫度的記號，是弧度。計算機的值： $c \approx -0.99$ ， $a \approx -0.42$ ， $d \approx 0.54$ ， $b \approx 0.91$ ， $e \approx 1.56$ 。



- 5 答案 (2)。 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ，令 $t = \cos x$ ，則 $f = 2t^2 + 4t - 1 = 2(t+1)^2 - 3$ 。 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$ 時 $-1 \leq t \leq \frac{1}{2}$ 。拋物線開口向上、頂點在 $t = -1$ ，在 $-1 \leq t \leq \frac{1}{2}$ 上 t 愈大值愈大，最大值在 $t = \frac{1}{2}$ ($x = \frac{\pi}{3}$)： $2 \times \frac{9}{4} - 3 = \frac{3}{2}$ 。
 t 的範圍要跟著 x 的範圍縮小；若誤用 $-1 \leq t \leq 1$ 會得到 5，不在選項裡。最小值在 $t = -1$ ，為 -3 。

多選第 6、7 題：週期與疊合後的圖形

- 6 答案 (1)(2)(3)(5)。(1) 對： $y = \sin 2x$ 是 $y = \sin x$ 水平伸縮 $\frac{1}{2}$ 倍，週期 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 。(2) 對： $y = \tan x$ 的週期是 π 。(3) 對： $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，週期 π 。(4) 錯：令 $g(x) = \sin|x|$ ， $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ 而 $g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ ， π 不是它的週期。(5) 對： $|\sin(x+\pi)| = |-\sin x| = |\sin x|$ ， π 是週期；而函數值為 0 的位置只有 $x = k\pi$ (k 為整數)，每隔 π 才出現一次，不會有更小的週期。
 $\sin|x|$ 不是週期函數： $x \geq 0$ 時它就是 $\sin x$ ，若有週期只能是 2π 的整數倍；但 $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ， $g\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ (k 為正整數)，不相等。 $|\sin x|$ 是把 x 軸下方的圖形翻上來，週期減半。
- 7 答案 (1)(5)。先用和角公式展開： $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$ ，所以 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{3}{2}\cos x + 1$ 。
 疊合： $\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}$ ， $y = \sqrt{3}\left(\cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin x \cdot \frac{1}{2}\right) + 1 = \sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ 。(1) 對：把 $y = \sqrt{3}\cos x$ 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 、再向上平移 1 就重疊。(2) 錯：振幅是 $\sqrt{3}$ 。(3) 錯：週期是 2π 。(4) 錯：
 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi$ 時 $\frac{\pi}{12} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$ ，餘弦在這段遞減，最大值在 $x = \frac{\pi}{4}$ ，為 $\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{12} + 1 = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + 1 \approx 2.67$ ，比 $\sqrt{3} + 1 \approx 2.73$ 小。(5) 對： $x = \frac{\pi}{6}$ 時 $\cos 0 = 1$ ，是圖形的最高點，過最高點的鉛直線是對稱軸。
 $\sqrt{3} + 1$ 是整個函數的最大值，發生在 $x = \frac{\pi}{6}$ ，但 $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4}$ 不在 (4) 給的範圍內。 $\cos\frac{\pi}{12} = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ 。

疊合成 $r\cos(x - \varphi) + k$ 之後，振幅、週期、平移量、最高點與對稱軸都可以直接讀出來；求限制範圍內的極值要先換成括號內角度的範圍。

填充第 8~10 題：扇形、和角公式、直線夾角

- 8 周長 = 兩條半徑 + 弧長，所以弧長 = $20 - 2 \times 4 = 12$ (公分)。扇形面積 = $\frac{1}{2} \times$ 半徑 $\times$ 弧長 = $\frac{1}{2} \times 4 \times 12 = 24$ (平方公分)。
 圓心角是 $\frac{12}{4} = 3$ 弧度；用 $\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 16 \times 3 = 24$ 結果相同。
- 9 α 、 β 是銳角， $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ ， $\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$ 。 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{15 + 48}{65} = \frac{63}{65}$ 。



- 10 L_1 的斜率是 2, L_2 的斜率是 3。設兩直線的斜角分別為 θ_1 、 θ_2 , $\tan \theta_1 = 2$, $\tan \theta_2 = 3$ 。由正切的差角公式, $\tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{3-2}{1+3 \times 2} = \frac{1}{7}$ 。正切為正, $\theta_2 - \theta_1$ 是銳角, 就是兩直線的一個夾角; 對邊 1、鄰邊 7 的直角三角形斜邊是 $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, 所以正弦值 $= \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$ 。

兩直線的另一個夾角與它互補, 正弦值相同, 所以答案只有一個。

填充第 11、12 題：伸縮平移、疊合

- 11 以 y 軸為基準水平伸縮為 a 倍, 是把 x 換成 $\frac{x}{a}$: $y = \sin \frac{x}{a}$ 。再向左平移 b , 是把 x 換成 $x+b$: $y = \sin \frac{x+b}{a}$ 。與 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 比較: $\frac{1}{a} = 2$, $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{\pi}{6}$ 。所以 $a+b = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$ 。

平移量要先把 x 的係數提出來再讀: 是 $\frac{\pi}{6}$ 不是 $\frac{\pi}{3}$ 。另外, $y = \sin 2x$ 的週期是 π , 向左平移 $\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$ 也得到同一個圖形, 而 $\frac{7\pi}{6}$ 也在題幹給的 $0 < b < 2\pi$ 之內, 此時 $a+b = \frac{1}{2} + \frac{7\pi}{6}$; 流傳版本的參考答案只寫 $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$ (取最小的平移量), 本站答案照此寫。

- 12 $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ 。 $y = 2\left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \cdot \frac{1}{2}\right) = 2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 。所以 $\theta = -\frac{\pi}{6}$ 。

檢查: $x=0$ 時原式 $= -1$, $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -1$ 。在 $-\pi < \theta < \pi$ 內滿足 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ 的角只有這一個。

填充第 13、14 題：和差角公式的變形

- 13 $\frac{\sin(A+B)}{\cos(A-B)} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B + \sin A \sin B}$ 。分子、分母同除以 $\cos A \cos B$: $= \frac{\tan A + \tan B}{1 + \tan A \tan B} = \frac{\frac{2+3}{1+6}}{\frac{5}{7}}$ 。

$\tan A$ 、 $\tan B$ 有定義, 所以 $\cos A \cos B \neq 0$, 可以同除。這個式子不是 $\tan(A+B)$, 分母的正負號不同。

- 14 角度一個是前一個的兩倍。令 P 為所求, 乘上 $\sin \frac{\pi}{33}$ 後連續用 $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$: $\sin \frac{\pi}{33} \cdot P = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{33} \cos \frac{2\pi}{33} \cos \frac{4\pi}{33} \cos \frac{8\pi}{33} \cos \frac{16\pi}{33} = \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{33} \cos \frac{4\pi}{33} \cos \frac{8\pi}{33} \cos \frac{16\pi}{33} = \dots = \frac{1}{32} \sin \frac{32\pi}{33}$ 。而 $\sin \frac{32\pi}{33} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{33}\right) = \sin \frac{\pi}{33}$, 所以 $P = \frac{1}{32}$ 。

五個角都是銳角 ($\frac{16\pi}{33} < \frac{\pi}{2}$), 餘弦都為正, 答案為正。

連乘的餘弦若角度成兩倍關係, 乘上最小角的正弦, 用倍角公式一路收成一個正弦。



填充第 15、16 題：潮汐函數、根式的範圍

- 15 表中的水深每 12 小時重複一次，取週期 12： $\frac{2\pi}{b} = 12$ ， $b = \frac{\pi}{6}$ 。代入各時刻： $f(0) = c + d = 5$ ； $f(6) = a \sin \pi + c \cos \pi + d = -c + d = -3$ ；兩式解得 $d = 1$ ， $c = 4$ 。 $f(3) = a \sin \frac{\pi}{2} + c \cos \frac{\pi}{2} + d = a + d = 4$ ，得 $a = 3$ 。檢查 $f(9) = -a + d = -2$ ，與表相符。所以 $a + c + d = 3 + 4 + 1 = 8$ 。
 $a = 3$ 、 $b = \frac{\pi}{6}$ 、 $c = 4$ 、 $d = 1$ 都是正數，符合題意。 d 是最高與最低水位的平均位置；函數可疊合成 $5 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \varphi\right) + 1$ ，但表上的四個值不是它的最高、最低點，所以直接代點比較快。

- 16 令 $s = \sin \theta$ 。展開： $(1 + \sqrt{1+s})^2 + (1 + \sqrt{1-s})^2 = 1 + 2\sqrt{1+s} + (1+s) + 1 + 2\sqrt{1-s} + (1-s) = 4 + 2(\sqrt{1+s} + \sqrt{1-s})$ 。令 $k = \sqrt{1+s} + \sqrt{1-s} \geq 0$ ， $k^2 = 2 + 2\sqrt{1-s^2} = 2 + 2\sqrt{\cos^2 \theta} = 2 + 2|\cos \theta|$ 。在 $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{2}$ 內 $0 \leq \cos \theta \leq 1$ ，所以 $2 \leq k^2 \leq 4$ ， $\sqrt{2} \leq k \leq 2$ 。最大值 $M = 4 + 2 \times 2 = 8$ ($\theta = 2\pi$)，最小值 $m = 4 + 2\sqrt{2}$ ($\theta = \frac{3\pi}{2}$ 或 $\frac{5\pi}{2}$)。 $M - m = 4 - 2\sqrt{2}$ 。

s 的一次項會消掉，剩下兩個根式的和；平方後根號裡出現 $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$ ，開根號要寫成 $|\cos \theta|$ ，再由 θ 的範圍定正負。

填充第 17 題：弦長寫成餘弦，再疊合

- 17 $\overline{AB} = 3$ 、 $\overline{BC} = 4$ 恰為兩圓半徑， B 在兩圓上，圖中兩圓外切於 B ， A 、 B 、 C 共線。設 $\angle ABD = \alpha$ 。 $\triangle ABD$ 中 $\overline{AB} = \overline{AD} = 3$ ，是等腰三角形，底邊 $\overline{BD} = 2 \times 3 \cos \alpha = 6 \cos \alpha$ 。同理設 $\angle CBE = \beta$ ， $\overline{BE} = 8 \cos \beta$ 。如圖 D 、 E 在直線 AC 同側， $\alpha + \frac{2\pi}{3} + \beta = \pi$ ， $\beta = \frac{\pi}{3} - \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$)。 $\overline{BD} + \overline{BE} = 6 \cos \alpha + 8 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 6 \cos \alpha + 4 \cos \alpha + 4\sqrt{3} \sin \alpha = 10 \cos \alpha + 4\sqrt{3} \sin \alpha$ 。疊合：
 $\sqrt{10^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$ ，原式 $= 2\sqrt{37} \cos(\alpha - \varphi)$ ，其中 $\cos \varphi = \frac{10}{2\sqrt{37}} = \frac{5}{\sqrt{37}}$ ， $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{37}}$ 。 $\tan \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{5} < \sqrt{3}$ ，所以 $0 < \varphi < \frac{\pi}{3}$ ， $\alpha = \varphi$ 取得到，此時和最大 ($2\sqrt{37}$)。這時 $\overline{BD} = 6 \cos \varphi = \frac{30}{\sqrt{37}} = \frac{30\sqrt{37}}{37}$ 。

此時 $\overline{BE} = 2\sqrt{37} - \frac{30}{\sqrt{37}} = \frac{44\sqrt{37}}{37}$ 。若 D 、 E 分在直線 AC 的兩側， $\overline{BD} + \overline{BE}$ 最大只有 11，比 $2\sqrt{37} \approx 12.17$ 小，所以最大值發生在圖中的同側情形。

過圓上一點的弦長 $= 2 \times \text{半徑} \times \cos$ (弦與過該點的半徑的夾角)；兩段弦的和寫成同一個角的正弦、餘弦後用疊合求最大值。

ROYAL BLUE EDUCATION



填充第 18~20 題：格點上的夾角、內切圓、偶函數的交點

- 18 設小正三角形邊長為 2，以 A 為原點、最下面那一列為 x 軸。每往上一列，高度增加 $\sqrt{3}$ 、往右錯開 1。
由圖讀出： $A(0, 0)$ ， $C(2, 2\sqrt{3})$ ， $B(8, 2\sqrt{3})$ ， $D(7, \sqrt{3})$ 。直線 AB 的斜率 $m_1 = \frac{2\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ；直線 CD 的斜率 $m_2 = \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{7 - 2} = -\frac{\sqrt{3}}{5}$ 。由正切的差角公式， $|\tan \theta| = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{5}}{1 - \frac{3}{20}} = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{20}}{\frac{17}{20}} = \frac{9\sqrt{3}}{17}$ 。

兩個互補的夾角正切只差正負號，取絕對值後答案唯一。圖中上、中、下三列的左端依序往右錯開半個邊長，讀坐標時要算進去。

- 19 內心 O 到三邊的距離都是 1，且 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 、 $\overline{OC}$ 分別平分三個內角。由 O 向邊作垂線得直角三角形： $\sin \frac{B}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ， $\cos \frac{B}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ； $\sin \frac{C}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ， $\cos \frac{C}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 。因為 $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ$ ， $\sin \frac{A}{2} = \cos \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。所以 $\overline{OA} = \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} = \sqrt{2}$ 。
由 $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 得 $\frac{A}{2} = 45^\circ$ ，即 $\angle A = 90^\circ$ ；流傳版本題幹寫「銳角三角形」，但依所給的 $\overline{OB}$ 、 $\overline{OC}$ 算出來的是直角三角形， $\overline{OA} = \sqrt{2}$ 這個答案不受影響。

- 20 $\sin |x|$ 與 $\frac{a}{\pi^2} x^2 - 1$ 把 x 換成 $-x$ 都不變，兩個圖形都對稱於 y 軸，所以交點也對稱於 y 軸。只有兩個交點 A 、 B ，它們互相對稱、 y 坐標相同， $\overline{AB}$ 是水平線段，長 $\frac{\pi}{3}$ ，所以 x 坐標是 $\pm \frac{\pi}{6}$ 。代 $x = \frac{\pi}{6}$ ： $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \frac{a}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{36} - 1$ ， $\frac{a}{36} = \frac{3}{2}$ ， $a = 54$ 。

檢查確實只有兩個交點： $a = 54$ 時拋物線由 $(0, -1)$ 往兩側上升， $x > 0$ 時只在 $x = \frac{\pi}{6}$ 穿過 $y = \sin x$ 一次；之後拋物線上升得很快，到 $x = \frac{\pi}{2}$ 已高 $\frac{54}{4} - 1 = 12.5$ ，遠超過正弦的最大值 1，不會再相交。

御藍教育

ROYAL BLUE EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自彰化高中 113 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/chsh-113a-g11a-1