

彰化女中 113 學年度上學期 高二第一次段考

範圍：三角函數（弧度量與扇形、三角函數的圖形與週期、和差角與倍角半角公式、正餘弦的疊合） · 單選題 4 題（每題 5 分）、多選題 2 題（每題 10 分）、填充題 10 題（每題 5 分）、混合題 1 題組 2 小題（各 5 分），共 100 分。



御藍教育

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/chgsh-113a-g11a-1

第壹部分：選擇（填）題（占 90 分） 一、單選題（占 20 分）說明：第 1 題至第 4 題，每題 5 分。

1 試選出最接近 $\sqrt{2}$ 的選項

- (1) $\sqrt{3} \cos 14^\circ + \sin 14^\circ$
- (2) $\sqrt{3} \cos 36^\circ + \sin 36^\circ$
- (3) $\sqrt{3} \cos 56^\circ + \sin 56^\circ$
- (4) $\sqrt{3} \cos 74^\circ + \sin 74^\circ$
- (5) $\sqrt{3} \cos 85^\circ + \sin 85^\circ$

2 設 x 為實數，求方程式 $2 \sin x = \frac{x}{5}$ 共有多少個實根

- (1) 5
- (2) 6
- (3) 7
- (4) 8
- (5) 9

3 下列哪一個函數的週期與其他函數不同

- (1) $y = \sin 2x$
- (2) $y = \tan x$
- (3) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
- (4) $y = |\sin x|$
- (5) $y = \sin x + \cos x$



4 下列選項中的數哪一個最小

- (1) $\cos 1$
- (2) $\cos 2$
- (3) $\cos 3$
- (4) $\cos 4$
- (5) $\cos 5$

二、多選題（占 20 分）說明：第 5 題至第 6 題，每題 10 分。

5 若 $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ， $\sin \theta = -\frac{4}{5}$ ，則下列選項哪些正確

- (1) $\cos 2\theta = -\frac{7}{25}$
- (2) $\tan 2\theta = -\frac{24}{7}$
- (3) $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
- (4) $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$
- (5) $\sin 4\theta = -\frac{336}{625}$

6 已知函數 $f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{3}{2} \cos 2x + 1$ 。則下列選項哪些是正確的？

- (1) $f(0) = \frac{5}{2}$
- (2) $f(x)$ 的週期為 π
- (3) $f(x)$ 的最小值為 -2
- (4) $y = f(x)$ 的圖形對稱 $x - \frac{2\pi}{3} = 0$
- (5) $g(x) = 3 \sin 2x + 1$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 後的圖形會與 $y = f(x)$ 的圖形重合

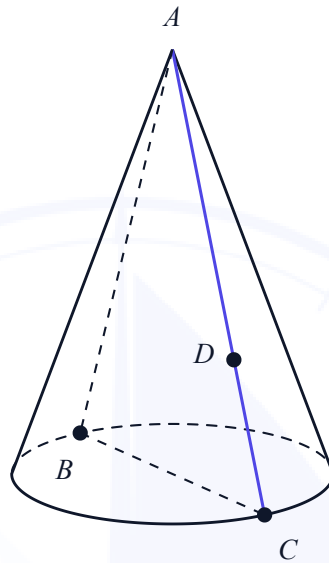
御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



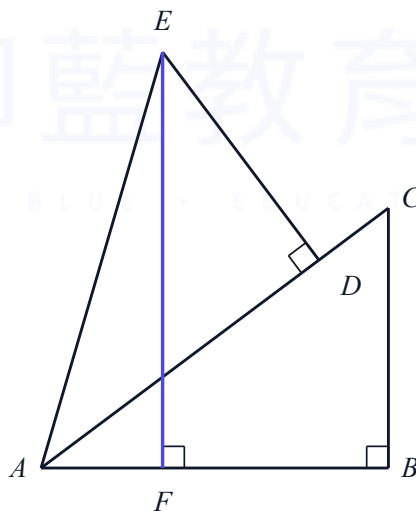
三、填充題（占 50 分）說明：第 7 題至第 16 題，每題 5 分。

- 7 如圖，直圓錐中底圓直徑 $\overline{BC} = 6$ 、 $\overline{AB} = 9$ 、 $\overline{AD} = 6$ 。試求從 C 點沿曲面繞圓錐一圈至 D 點的最短距離為 _____。



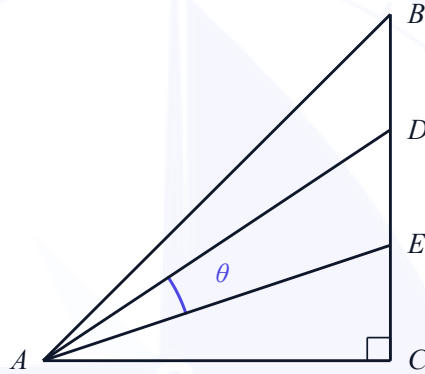
- 8 坐標平面上，圓 O 為圓心在原點的單位圓，若 $P(-\cos 1, \sin 1)$ 與 $Q(\sin 1, \cos 1)$ 都在圓 O 上，則 $\angle POQ =$ _____。

- 9 如圖，將兩個邊長為 3、4、5 的直角三角形積木疊放於桌上（ $\overline{AB} = \overline{AD} = 4$ 、 $\overline{BC} = \overline{DE} = 3$ 、 $\overline{AC} = \overline{AE} = 5$ ），求最高點到桌面（即 $\overline{EF}$ ）的距離為 _____。



- 10 若 $\triangle ABC$ 是等腰三角形， $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ 、 $\overline{BC} = 5$ ， P 點在三角形內部。已知線段長度 $\overline{PB} = 4$ 且 $\overline{PC} = 3$ ，求 $\cos \angle ABP = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

- 11 如圖， $\angle C$ 是直角， $\overline{AC} = \overline{BC}$ ， D, E 三等分 $\overline{BC}$ ， $\angle DAE = \theta$ ，則 $\tan \theta = \underline{\hspace{1cm}}$ 。



- 12 若 $0 \leq x \leq 24$ ，則不等式 $3 \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 14 \geq 15.5$ 的解 x 為 $\underline{\hspace{1cm}}$ 。

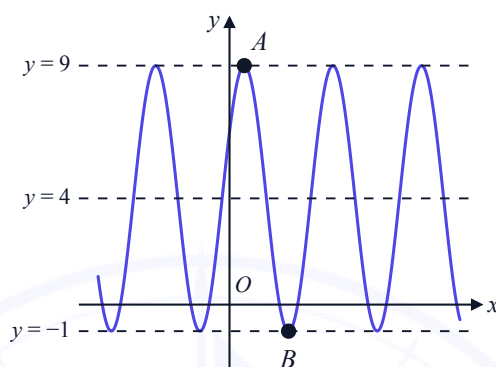
- 13 若 $\triangle ABC$ 中、 $\cos A = \frac{3}{5}$ 、 $\cos B = -\frac{1}{3}$ ，則 $\sin C = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



- 14 設 $a > 0, b > 0, 0 \leq c \leq 2\pi$ ，若函數 $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ 的部分圖形如圖所示，其中 $A\left(\frac{\pi}{9}, 9\right)$ ， $B\left(\frac{4\pi}{9}, -1\right)$ ，則數對 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 15 若 $0 \leq x \leq \pi$ ，函數 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x + 4$ 的最大值為 M ，最小值為 N ，則數對 $(M, N) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 16 若 $A(\cos \theta + 2, \sin \theta + 4)$ ，其中 $0 \leq \theta < 2\pi$ ，試求動點 A 與 $P(-2, 1)$ 的最近距離為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

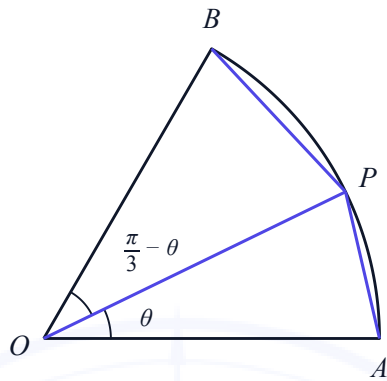
第貳部分：混合題（占 10 分） 說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

17-18 題組 如圖，已知扇形 OAB 的圓心角為 $\frac{\pi}{3}$ ，半徑為 1， P 為 AB 弧上的一個動點， $\angle POA = \theta$ 。

ROYAL BLUE · EDUCATION



- 17 試以 θ 表示四邊形 $OAPB$ 的面積。(非選擇題，5 分)



- 18 試求四邊形 $OAPB$ 的最大面積。(非選擇題，5 分)

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/chgsh-113a-g11a-1

答案一覽

第 1 題 (4)

第 2 題 (3)

第 3 題 (5)

第 4 題 (3)

第 5 題 (1)(2)(3)(5)

第 6 題 (1)(2)(3)(4)

第 7 題 $3\sqrt{19}$

第 8 題 $\frac{\pi}{2}$ (即 90°)

第 9 題 $\frac{5}{24}$

第 10 題 $\frac{4 + 3\sqrt{15}}{20}$

第 11 題 $\frac{3}{11}$

第 12 題 $1 \leq x \leq 5$ 或 $13 \leq x \leq 17$

第 13 題 $\frac{6\sqrt{2} - 4}{15}$

第 14 題 $\left(5, 3, \frac{\pi}{6}, 4\right)$

第 15 題 $(6, 4 - \sqrt{3})$

第 16 題 4

第 17 題 $\frac{1}{4} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \theta$ (也可寫成 $\frac{1}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$)

第 18 題 $\frac{1}{2}$

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/chgsh-113a-g11a-1

單選題 (第 1~4 題)：疊合、圖形的交點、週期、弧度

- 1 答案 (4)。疊合： $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2(\sin x \cos 60^\circ + \cos x \sin 60^\circ) = 2 \sin(x + 60^\circ)$ 。五個選項依序是 $2 \sin 74^\circ$ 、 $2 \sin 96^\circ = 2 \sin 84^\circ$ 、 $2 \sin 116^\circ = 2 \sin 64^\circ$ 、 $2 \sin 134^\circ = 2 \sin 46^\circ$ 、 $2 \sin 145^\circ = 2 \sin 35^\circ$ 。而 $\sqrt{2} = 2 \sin 45^\circ$ 。正弦在 0° 到 90° 之間遞增，角度比 45° 大的四個裡 46° 最靠近；再與另一側的 35° 比： $2 \sin 46^\circ \approx 1.439$ ， $2 \sin 35^\circ \approx 1.147$ ，而 $\sqrt{2} \approx 1.414$ ，所以最接近的是 (4)。
超過 90° 的角先用 $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ 化回銳角，才方便比大小。
- 2 答案 (3)。方程式即 $\sin x = \frac{x}{10}$ ，實根個數就是 $y = \sin x$ 與直線 $y = \frac{x}{10}$ 的交點個數。 $x = 0$ 是一個根；兩個圖形都對稱於原點，正根與負根一樣多，只需數正根。因為 $\sin x \leq 1$ ，正根只會出現在 $0 < x \leq 10$ ，而 $3\pi \approx 9.42 < 10 < 4\pi$ 。在 $0 < x < \pi$ ： $x = \frac{\pi}{2}$ 時 $\sin x = 1 > \frac{x}{10}$ ， $x = \pi$ 時 $\sin x = 0 < \frac{x}{10}$ ，有 1 個交點。在 $\pi \leq x \leq 2\pi$ ： $\sin x \leq 0 < \frac{x}{10}$ ，沒有交點。在 $2\pi < x < 3\pi$ ：兩端 $\sin x = 0$ 都在直線下方，而 $x = \frac{5\pi}{2}$ 時 $\sin x = 1 > \frac{x}{10} \approx 0.785$ ，曲線先穿到直線上方再穿回來，有 2 個交點。在 $3\pi \leq x \leq 10$ ： $\sin x \leq 0$ ，沒有交點。正根 3 個，負根 3 個，加上 0，共 7 個。
 $x = 0$ 只算一次；另外要確認直線在 $x = \frac{5\pi}{2}$ 時還沒超過 1，第二個「山」才碰得到。
- 3 答案 (5)。(1) $y = \sin 2x$ 的週期是 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 。(2) $y = \tan x$ 的週期是 π 。(3) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的週期是 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ ，平移不改變週期。(4) $y = |\sin x|$ 把 x 軸下方的部分翻上來，每隔 π 重複一次，週期是 π 。(5) $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，週期是 2π 。只有 (5) 不同。
- 4 答案 (3)。這裡的 1、2、3、4、5 都是弧度。 $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ 、 $\pi \approx 3.14$ 、 $\frac{3\pi}{2} \approx 4.71$ ，所以 1 在第一象限、5 在第四象限， $\cos 1$ 、 $\cos 5$ 為正；2、3 在第二象限，4 在第三象限，餘弦為負。餘弦在 $x = \pi$ 時最小，且 $\cos x$ 的圖形對稱於直線 $x = \pi$ ，離 π 越近值越小（在 0 到 2π 之間）。 $|3 - \pi| \approx 0.14$ 、 $|4 - \pi| \approx 0.86$ 、 $|2 - \pi| \approx 1.14$ ，3 最靠近 π ，所以 $\cos 3$ 最小。
用計算機核對（弧度模式）： $\cos 2 \approx -0.416$ ， $\cos 3 \approx -0.990$ ， $\cos 4 \approx -0.654$ 。

多選題 (第 5、6 題)：倍角半角的正負號、疊合後的圖形性質

- 5 答案 (1)(2)(3)(5)。 θ 在第三象限， $\cos \theta = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$ 。(1) 對： $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 1 - \frac{32}{25} = -\frac{7}{25}$ 。(2) 對： $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$ ， $\tan 2\theta = \frac{24/25}{-7/25} = -\frac{24}{7}$ 。(3) 對、(4) 錯： $\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4}$ ， $\frac{\theta}{2}$ 在第二象限，正弦為正、餘弦為負。 $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{4}{5}$ ， $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ； $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} = \frac{1}{5}$ ， $\cos \frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 。(5) 對： $\sin 4\theta = 2 \sin 2\theta \cos 2\theta = 2 \times \frac{24}{25} \times \left(-\frac{7}{25}\right) = -\frac{336}{625}$ 。
半角公式只給平方，正負號要另外由 $\frac{\theta}{2}$ 所在的象限決定。



- 6 答案 (1)(2)(3)(4)。疊合： $\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{3}{2}\cos 2x = 3\left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{6}\right) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，所以 $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ 。(1) 對： $f(0) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ 。(2) 對：週期 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 。(3) 對：正弦最小為 -1 ， $f(x)$ 的最小值為 $-3 + 1 = -2$ 。(4) 對：正弦型函數的圖形對稱於通過最高點或最低點的鉛直線； $x = \frac{2\pi}{3}$ 時 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$ ， $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2$ 是最小值，所以直線 $x = \frac{2\pi}{3}$ 是對稱軸。(5) 錯：向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 是把 x 換成 $x + \frac{\pi}{6}$ ，得 $3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$ ，不是 $f(x)$ ；因為 $f(x) = 3\sin 2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + 1$ ，應向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 才會重合。
- 平移量要先把 x 的係數提出來再看： $2x + \frac{\pi}{6} = 2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ 。

看到 $a \sin kx + b \cos kx$ 先疊合成一個正弦，週期、極值、對稱軸、平移量就都讀得出來。

填充題 (第 7~9 題)：圓錐展開、單位圓上的角、二倍角求高度

- 7 把圓錐側面沿母線 $\overline{AC}$ 剪開攤平，得到半徑 9 的扇形，弧長等於底圓周長 6π ，圓心角 $= \frac{6\pi}{9} = \frac{2\pi}{3}$ 。剪開後 C 出現在扇形的兩端，記作 C 與 C' ； D 在 $\overline{AC'}$ 上， $\overline{AD} = 6$ 。繞圓錐一圈的最短路徑就是展開圖上的線段 $\overline{CD}$ 。在 $\triangle ACD$ 中用餘弦定理： $\overline{CD}^2 = 9^2 + 6^2 - 2 \times 9 \times 6 \times \cos \frac{2\pi}{3} = 81 + 36 + 54 = 171$ ，所以 $\overline{CD} = \sqrt{171} = 3\sqrt{19}$ 。
- D 與 C 在同一條母線上，不繞的話距離只有 3；題目要繞一圈，所以起點與終點要放在展開扇形的兩條不同邊上。
- 8 把兩點都寫成 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 的形式。 $P(-\cos 1, \sin 1) = (\cos(\pi - 1), \sin(\pi - 1))$ ，是角 $\pi - 1$ 的終邊與單位圓的交點； $Q(\sin 1, \cos 1) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right)$ ，是角 $\frac{\pi}{2} - 1$ 的終邊與單位圓的交點。兩角相差 $(\pi - 1) - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\angle POQ = \frac{\pi}{2}$ 。
- 流傳版本的參考答案寫 90° ，與 $\frac{\pi}{2}$ 是同一個角。也可以用斜率檢查： $\overline{OP}$ 與 $\overline{OQ}$ 的斜率相乘 $= \frac{\sin 1}{-\cos 1} \times \frac{\cos 1}{\sin 1} = -1$ ，兩線段垂直。
- 9 設 $\angle BAC = \alpha$ ，在直角三角形 ABC 中 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ 、 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ 。直角三角形 ADE 的三邊同樣是 4、3、5，所以 $\angle DAE = \alpha$ ； D 在 $\overline{AC}$ 上，故 $\angle BAE = 2\alpha$ 。在直角三角形 AFE 中， $\overline{EF} = \overline{AE} \sin 2\alpha = 5 \times 2 \sin \alpha \cos \alpha = 5 \times 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{5}$ 。
- 可以再檢查 $\overline{AF} = 5 \cos 2\alpha = 5 \left(\frac{16}{25} - \frac{9}{25}\right) = \frac{7}{5}$ ， $\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2 = 25$ 。

填充題 (第 10~13 題)：差角公式、正切差角、三角不等式、和角公式

- 10 $\angle ABP = \angle ABC - \angle PBC$ ，分別求兩個角的正弦、餘弦。等腰三角形 ABC 中，自 A 作 $\overline{BC}$ 的高，垂足是 $\overline{BC}$ 中點， $\cos \angle ABC = \frac{5/2}{10} = \frac{1}{4}$ ， $\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{15}}{4}$ 。 $\triangle PBC$ 三邊為 3、4、5， $3^2 + 4^2 = 5^2$ ， $\angle BPC$ 是直角， $\cos \angle PBC = \frac{4}{5}$ ， $\sin \angle PBC = \frac{3}{5}$ 。由餘弦的差角公式： $\cos \angle ABP = \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{4 + 3\sqrt{15}}{20}$ 。
- P 在三角形內部，所以 $\overline{BP}$ 落在 $\angle ABC$ 裡面，兩角是相減不是相加。



- 11 設 $\overline{AC} = \overline{BC} = 3$ ，則 $\overline{CE} = 1$ 、 $\overline{CD} = 2$ 。在直角三角形 ACE 、 ACD 中， $\tan \angle CAE = \frac{1}{3}$ ， $\tan \angle CAD = \frac{2}{3}$ 。由正切的差角公式： $\tan \theta = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{11}{9}} = \frac{3}{11}$ 。

D 、 E 把 $\overline{BC}$ 分成三等分，但 $\angle BAC$ 並沒有被三等分，不能用 $45^\circ \div 3$ 。

- 12 移項得 $\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) \geq \frac{1}{2}$ 。令 $t = \frac{\pi}{6}x$ ， $0 \leq x \leq 24$ 時 $0 \leq t \leq 4\pi$ ，剛好兩個週期。在 $0 \leq t \leq 2\pi$ 內， $\sin t \geq \frac{1}{2}$ 的範圍是 $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}$ ；下一個週期是 $\frac{13\pi}{6} \leq t \leq \frac{17\pi}{6}$ 。換回 $x = \frac{6}{\pi}t$ ： $1 \leq x \leq 5$ 或 $13 \leq x \leq 17$ 。

x 的週期是 12，第二段就是第一段加 12。

- 13 A 、 B 是三角形的內角，正弦都為正： $\sin A = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ ， $\sin B = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。由 $C = \pi - (A + B)$ ，所以 $\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{5} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{6\sqrt{2} - 4}{15}$ 。

$\cos B < 0$ 表示 B 是鈍角；答案約 0.299 為正，符合三角形內角的正弦值。

填充題（第 14~16 題）：由圖形定係數、限制範圍的疊合、距離的最小值

- 14 圖形在 $y = -1$ 與 $y = 9$ 之間振盪：振幅 $a = \frac{9 - (-1)}{2} = 5$ ，中線 $d = \frac{9 + (-1)}{2} = 4$ 。 A 是最高點， B 是它右邊緊鄰的最低點，兩點的 x 坐標相差半個週期： $\frac{4\pi}{9} - \frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{3}$ ，週期 $= \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{b}$ ，得 $b = 3$ 。代入最高點 A ： $5 \sin\left(3 \times \frac{\pi}{9} + c\right) + 4 = 9$ ， $\sin\left(\frac{\pi}{3} + c\right) = 1$ ， $\frac{\pi}{3} + c = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ （ k 為整數）， $c = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ；在 $0 \leq c \leq 2\pi$ 內只有 $c = \frac{\pi}{6}$ 。所以 $(a, b, c, d) = \left(5, 3, \frac{\pi}{6}, 4\right)$ 。
用 B 檢查： $3 \times \frac{4\pi}{9} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$ ， $5 \sin \frac{3\pi}{2} + 4 = -1$ ，相符。

- 15 疊合： $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，所以 $f(x) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 4$ 。 $0 \leq x \leq \pi$ 時 $-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$ 。這段範圍包含 $\frac{\pi}{2}$ ，正弦最大為 1（ $x = \frac{5\pi}{6}$ ）， $M = 6$ ；正弦最小出現在左端點， $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ （ $x = 0$ ）， $N = 4 - \sqrt{3}$ 。所以 $(M, N) = (6, 4 - \sqrt{3})$ 。

範圍有限制時，最小值不一定是 $-2 + 4 = 2$ ；要先看 $x - \frac{\pi}{3}$ 走過哪一段，這裡走不到 $-\frac{\pi}{2}$ 。

- 16 $\overline{AP}^2 = (\cos \theta + 2 + 2)^2 + (\sin \theta + 4 - 1)^2 = (\cos \theta + 4)^2 + (\sin \theta + 3)^2 = 26 + 8 \cos \theta + 6 \sin \theta$ 。疊合： $6 \sin \theta + 8 \cos \theta = 10 \sin(\theta + \varphi)$ （其中 $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ 、 $\sin \varphi = \frac{4}{5}$ ），範圍是 -10 到 10 ，且 $0 \leq \theta < 2\pi$ 走完一整圈， -10 取得到。所以 $\overline{AP}^2$ 的最小值是 $26 - 10 = 16$ ，最近距離為 4。

從圖形看： A 在以 $(2, 4)$ 為圓心、半徑 1 的圓上， P 到圓心的距離是 $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ ，最近距離 $= 5 - 1 = 4$ ，結果相同。



混合題 (第 17、18 題)：四邊形面積拆成兩個三角形，再疊合

- 17 連 $\overline{OP}$ ，把四邊形 $OAPB$ 分成 $\triangle OAP$ 與 $\triangle OPB$ ， $\overline{OA} = \overline{OP} = \overline{OB} = 1$ ， $\angle AOP = \theta$ ， $\angle POB = \frac{\pi}{3} - \theta$ 。面積 $= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \theta + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$ 。用差角公式展開： $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta$ ，所以面積 $= \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \sin \theta = \frac{1}{4} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \theta$ 。

流傳版本的參考答案寫 $\frac{\sqrt{3}}{4} \sin \theta + \frac{1}{4} \cos \theta$ ，正弦與餘弦的係數與本站相反。可用 $\theta = 0$ 檢查：此時 P 與 A 重合，面積就是 $\triangle OAB$ 的面積 $\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ；本站的式子代入得 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，流傳版本的式子代入得 $\frac{1}{4}$ 。本站答案寫 $\frac{1}{4} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \theta$ 。

- 18 由第 17 題，面積 $= \frac{1}{4} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \theta = \frac{1}{2} \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ 。 P 在弧 AB 上， $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ ，所以 $\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$ ，這段範圍包含 $\frac{\pi}{2}$ 。當 $\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ，即 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 時，面積最大，最大值為 $\frac{1}{2}$ 。

$\theta = \frac{\pi}{6}$ 表示 P 是弧 AB 的中點；此時兩個三角形的面積都是 $\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$ ，合計 $\frac{1}{2}$ 。

有共同頂點的圖形面積，拆成幾個「兩邊夾一角」的三角形相加，再把同角的正弦、餘弦疊合求極值。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自彰化女中 113 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/chgsh-113a-g11a-1