

家齊高中 114 學年度上學期 高一第一次段考



御藍教育

範圍：數與式、直線方程式（實數與根式、絕對值、指數與算幾不等式、常用對數、直線的斜率與方程式）
多重選擇題 5 題（25 分）、填充題 11 題共 13 格（75 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/ccsh-114a-g10-1

一、多重選擇題（一題 5 分，共 25 分，錯一個選項扣 2 分，扣到該題 0 分為止）

1 下列哪些可以化成有限小數？

- (A) $\frac{6733}{125}$
- (B) $\frac{235}{128}$
- (C) $\frac{91}{35}$
- (D) $\sqrt{\frac{49}{256}}$
- (E) $\frac{36}{102}$

2 下列選項中的大小關係，哪些是正確的？

- (A) $\sqrt{2023} + \sqrt{2025} \geq \sqrt{2022} + \sqrt{2026}$
- (B) $\frac{5 + 4\sqrt{7}}{9} > \frac{3 + 4\sqrt{7}}{7}$
- (C) $0.\overline{67} \geq \sqrt{\frac{4}{9}}$
- (D) $\frac{2^{10} + 3^{10}}{2} \geq 6^5$
- (E) $5^{\frac{2}{3}} \geq 3^{\frac{2}{3}}$

3 已知 $a > 0$ ， $a^x + a^{-x}$ 不可能為下列哪些數值？

- (A) 1
- (B) $\sqrt{3}$
- (C) 2
- (D) $\sqrt{\frac{21}{5}}$
- (E) 3.14



4 若 x 為實數且 $|x+3| + |x-17| = k$ 解有 3 個以上， k 可能為下列哪一個選項？

- (A) 3
- (B) 17
- (C) 20
- (D) 23
- (E) 無解

5 下列哪些敘述是正確的？

- (A) 若 a 是正的有理數，且 b 是無理數，則 ab 是無理數
- (B) 若 a, b 為實數， $a + b\sqrt{5} = 3 - 2\sqrt{5}$ ，則 $a + b = 1$
- (C) 若 $a \neq 0$ 且 a^4, a^7 是有理數，則 a^5 是有理數
- (D) 若 $3a + 2b$ 是無理數，且 $3a + b$ 是無理數，則 b 是無理數
- (E) 若 $3a + 2b$ 是有理數，且 $a - b$ 是有理數，則 b 是有理數

二、填充題（一格 6 分，最後 1 格 3 分，共 75 分）（本頁第 6~18 題依序為填充第 1、2、3、4(1)、4(2)、5、6、7、8 第一格、8 第二格、9、10、11 題）

6 求通過定點 $(3, -4)$ 且斜率為 -3 的直線方程式 = _____。

7 求出 $\sqrt{11} - \sqrt{72}$ 的小數部分 = _____。

8 將分數 $\frac{12}{7}$ 化成小數之後，設小數點後第 n 位的數字記為 $f(n)$ ，求 $f(2025) =$ _____。

填充第 4 題 已知 $a > 0$ ， $3(a^x + a^{-x})^2 - 17(a^x + a^{-x}) + 20 = 0$ ，求下列各式的值。

9 (1) $a^x + a^{-x} =$ _____。

10 (2) $a^{3x} + a^{-3x} =$ _____。



11 試估算 3^{-100} 小數點後第 ____ 位開始出現不為 0 的數字。($\log 3 \approx 0.4771$)

12 不等式 $|ax - 3| \geq b$ 的解為 $x \geq 3$ 或 $x \leq -5$ ，則 $a =$ ____。

13 設 a 為 $0 \sim 9$ 的整數，且 $\frac{21}{90} < 0.2\overline{a4} < \frac{25}{90}$ ，求 $a =$ ____。

填充第 8 題 已知一直線 L 通過定點 $(3, 4)$ 且與坐標軸在第一象限圍成一個三角形。

14 試求三角形面積最小值 = ____。

15 此時直線 L 的方程式 = ____。

16 解不等式 $|x + 1| + |2x - 4| > 9$ ， x 的範圍 = ____。

17 設 a 是正實數， a 的小數部分是 b ，且 $a^2 + b^2 = 28$ ，則 $a =$ ____。

18 已知 $m, n \geq 0$ 且 m, n 皆為整數，試求滿足 $m^3 + n^3 + 39mn - 13^3 = 0$ 的數對 (m, n) 有 ____ 組。



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/ccsh-114a-g10-1

答案一覽

第 1 題 (A)(B)(C)(D)

第 2 題 (A)(C)(D)

第 3 題 (A)(B)

第 4 題 (C)

第 5 題 (A)(C)(E)

第 6 題 $3x + y = 5$

第 7 題 $2 - \sqrt{2}$

第 8 題 4

第 9 題 4

第 10 題 52

第 11 題 48

第 12 題 -3

第 13 題 3、4、5、6、7

第 14 題 24

第 15 題 $4x + 3y = 24$

第 16 題 $x < -2$ 或 $x > 4$

第 17 題 $\frac{5 + \sqrt{31}}{2}$

第 18 題 14

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。（不用註冊）
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit（可以先把姓名、座號遮掉）



多重選擇 1~5：有限小數、比大小、算幾不等式、絕對值、有理數與無理數

- 1 答案 (A)(B)(C)(D)。分數約到最簡後，分母的質因數只有 2 或 5 才能化成有限小數。(A) 分母 $125 = 5^3$ ，可以。(B) 分母 $128 = 2^7$ ，可以。(C) $\frac{91}{35} = \frac{13}{5}$ ，可以。(D) $\sqrt{\frac{49}{256}} = \frac{7}{16}$ ，分母 $16 = 2^4$ ，可以。(E) $\frac{36}{102} = \frac{6}{17}$ ，分母有質因數 17，是循環小數。

要先約到最簡再看分母：(C) 的 35 有因數 7，但和分子約掉了。

- 2 答案 (A)(C)(D)。(A) 對：兩邊都是正數，比平方。左邊平方是 $4048 + 2\sqrt{2023 \times 2025} = 4048 + 2\sqrt{2024^2 - 1}$ ，右邊平方是 $4048 + 2\sqrt{2022 \times 2026} = 4048 + 2\sqrt{2024^2 - 4}$ ，左邊較大。(B) 錯：兩邊同乘以 63，左邊是 $7(5 + 4\sqrt{7}) = 35 + 28\sqrt{7}$ ，右邊是 $9(3 + 4\sqrt{7}) = 27 + 36\sqrt{7}$ ，左減右是 $8 - 8\sqrt{7} < 0$ ，所以左邊較小。(C) 對： $0.\overline{67} = \frac{67}{99}$ ， $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = \frac{66}{99}$ 。(D) 對：由算幾不等式 $\frac{2^{10} + 3^{10}}{2} \geq \sqrt{2^{10} \times 3^{10}} = 6^5$ 。(E) 錯：兩邊同取 15 次方， $(5^{\frac{2}{5}})^{15} = 5^6 = 15625$ ， $(3^{\frac{2}{3}})^{15} = 3^{10} = 59049$ ，左邊較小。

(A) 用到 $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$ 、 $(n-2)(n+2) = n^2 - 4$ ；(E) 的 15 是兩個指數分母 5 和 3 的最小公倍數。

- 3 答案 (A)(B)。 $a > 0$ 時 $a^x > 0$ 、 $a^{-x} > 0$ ，而且 $a^x \times a^{-x} = 1$ 。由算幾不等式 $\frac{a^x + a^{-x}}{2} \geq \sqrt{a^x \times a^{-x}} = 1$ ，所以 $a^x + a^{-x} \geq 2$ 。(A) $1 < 2$ 、(B) $\sqrt{3} \approx 1.73 < 2$ ，都不可能。(C) $x = 0$ 時就等於 2。(D) $\sqrt{\frac{21}{5}} = \sqrt{4.2} > 2$ 、(E) $3.14 > 2$ ，都可能。

題目問的是「不可能」的數值，選的是小於 2 的選項。

- 4 答案 (C)。 $|x+3| + |x-17|$ 是數線上 x 到 -3 的距離加上 x 到 17 的距離。 x 在 -3 和 17 之間（含端點）時，距離和固定是 20； x 在這段之外時，距離和大於 20。所以 $k < 20$ 時無解， $k = 20$ 時 $-3 \leq x \leq 17$ 都是解（無限多個）， $k > 20$ 時左右各一個、恰有 2 個解。解有 3 個以上只能是 $k = 20$ 。

$k = 23$ 時解是 $x = -4.5$ 和 $x = 18.5$ ，只有 2 個。

- 5 答案 (A)(C)(E)。(A) 對：如果 $ab = r$ 是有理數，因為 $a \neq 0$ ， $b = \frac{r}{a}$ 是有理數，矛盾。(B) 錯： a 、 b 只說是實數，不能比較係數；例如 $a = 3 + \sqrt{5}$ 、 $b = -3$ 時 $a + b\sqrt{5} = 3 - 2\sqrt{5}$ ，但 $a + b = \sqrt{5}$ 。(C) 對： $a^3 = \frac{a^7}{a^4}$ 是有理數， $a = \frac{a^4}{a^3}$ 是有理數，所以 a^5 是有理數。(D) 錯：取 $a = \sqrt{2}$ 、 $b = 0$ ， $3a + 2b$ 和 $3a + b$ 都是 $3\sqrt{2}$ ，但 b 是有理數。(E) 對： $(3a + 2b) - 3(a - b) = 5b$ 是有理數，所以 b 是有理數。

(B) 要有「 a 、 b 為有理數」才能得到 $a = 3$ 、 $b = -2$ 。

填充 1~3（第 6~8 題）：點斜式、雙重根號、循環小數

- 6 由點斜式， $y - (-4) = -3(x - 3)$ ，即 $y + 4 = -3x + 9$ ，整理得 $3x + y = 5$ 。
寫成 $3x + y - 5 = 0$ 或 $y = -3x + 5$ 是一條直線。



- 7 $\sqrt{72} = 2\sqrt{18}$ ，所以 $11 - \sqrt{72} = 11 - 2\sqrt{18}$ 。找兩數和 11、積 18：9 和 2，所以 $\sqrt{11 - \sqrt{72}} = \sqrt{9} - \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}$ 。 $1 < \sqrt{2} < 2$ ，所以 $1 < 3 - \sqrt{2} < 2$ ，整數部分是 1，小數部分是 $(3 - \sqrt{2}) - 1 = 2 - \sqrt{2}$ 。

要先把 $\sqrt{72}$ 改寫成 $2\sqrt{18}$ ，根號前面是 2 才能套「和、積」的做法。

- 8 直式除法得 $\frac{12}{7} = 1.\overline{714285}$ ，小數點後每 6 位循環一次，依序是 7, 1, 4, 2, 8, 5。 $2025 = 6 \times 337 + 3$ ，所以第 2025 位和第 3 位相同， $f(2025) = 4$ 。

填充 4~5 (第 9~11 題)：指數式求值與常用對數

- 9 (1) 令 $t = a^x + a^{-x}$ ，原式是 $3t^2 - 17t + 20 = 0$ ，分解成 $(3t - 5)(t - 4) = 0$ ， $t = \frac{5}{3}$ 或 $t = 4$ 。由算幾不等式 $t = a^x + a^{-x} \geq 2\sqrt{a^x \times a^{-x}} = 2$ ， $\frac{5}{3} < 2$ 不合，所以 $a^x + a^{-x} = 4$ 。

兩個根不能都留，要用 $a^x + a^{-x} \geq 2$ 去掉 $\frac{5}{3}$ 。

- 10 (2) 用 $p^3 + q^3 = (p + q)^3 - 3pq(p + q)$ ，取 $p = a^x$ 、 $q = a^{-x}$ ， $pq = 1$ ： $a^{3x} + a^{-3x} = 4^3 - 3 \times 1 \times 4 = 64 - 12 = 52$ 。

- 11 $\log 3 \approx 0.4771$ 表示 $3 \approx 10^{0.4771}$ ，所以 $3^{-100} \approx 10^{-47.71} = 10^{0.29} \times 10^{-48}$ 。 $10^0 < 10^{0.29} < 10^1$ ，也就是 $10^{0.29}$ 是一個介於 1 和 10 之間的數，所以 3^{-100} 寫成科學記號是 $1. \dots \times 10^{-48}$ ，小數點後第 48 位開始出現不為 0 的數字。

-47.71 要拆成 $-48 + 0.29$ (小數部分取正的)，不是 $-47 - 0.71$ 。

$N = c \times 10^{-n}$ ($1 \leq c < 10$) 時， N 在小數點後第 n 位開始出現不為 0 的數字。

填充 6~7 (第 12~13 題)：絕對值不等式回推係數、循環小數化分數

- 12 解是「 $x \geq 3$ 或 $x \leq -5$ 」，兩個端點的中點是 -1 ，到中點的距離是 4，所以解等於 $|x + 1| \geq 4$ 。兩邊乘以 3： $|3x + 3| \geq 12$ ，也就是 $|-3x - 3| \geq 12$ 。和 $|ax - 3| \geq b$ 對照，常數項要是 -3 ，所以 $a = -3$ (這時 $b = 12$)。

$|3x + 3|$ 和 $|-3x - 3|$ 相等，要配合題目的「 -3 」選後者，所以 a 是負的。

- 13 設 $y = 0.2\overline{a4}$ 。 $10y = 2.\overline{a4}$ ， $1000y = 2a4.\overline{a4}$ ($2a4$ 表示三位數 $200 + 10a + 4$)，相減得 $990y = (204 + 10a) - 2 = 202 + 10a$ ， $y = \frac{202 + 10a}{990}$ 。又 $\frac{21}{90} = \frac{231}{990}$ 、 $\frac{25}{90} = \frac{275}{990}$ ，所以 $231 < 202 + 10a < 275$ ， $2.9 < a < 7.3$ ， $a = 3, 4, 5, 6, 7$ 。

循環節是 $a4$ 兩位，不循環的部分是 2 一位，所以分母是 990。答案有五個，要全部寫出。



填充 8~9 (第 14~16 題)：截距式配算幾不等式、分段討論

- 14 設 L 的 x 截距是 p 、 y 截距是 q (在第一象限圍成三角形，所以 $p > 0$ 、 $q > 0$)， $L: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ ，三角形面積是 $\frac{1}{2}pq$ 。 L 過 $(3, 4)$ ，所以 $\frac{3}{p} + \frac{4}{q} = 1$ 。由算幾不等式 $\frac{\frac{3}{p} + \frac{4}{q}}{2} \geq \sqrt{\frac{3}{p} \times \frac{4}{q}}$ ，即 $\frac{1}{2} \geq \sqrt{\frac{12}{pq}}$ ，兩邊平方得 $\frac{1}{4} \geq \frac{12}{pq}$ ， $pq \geq 48$ 。所以面積 $\frac{1}{2}pq \geq 24$ ，最小值是 24。

算幾不等式用在 $\frac{3}{p}$ 和 $\frac{4}{q}$ 這兩個「和是定值 1」的正數上，不是用在 p 和 q 上。

- 15 等號在 $\frac{3}{p} = \frac{4}{q} = \frac{1}{2}$ 時成立，也就是 $p = 6$ 、 $q = 8$ 。這時 $L: \frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$ ，兩邊乘以 24 得 $4x + 3y = 24$ 。驗算： $(3, 4)$ 代入 $12 + 12 = 24$ 成立，面積 $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$ 。

這時 $(3, 4)$ 剛好是兩個截距點 $(6, 0)$ 、 $(0, 8)$ 的中點。

- 16 絕對值裡面變號的地方是 $x = -1$ 和 $x = 2$ ，分三段。① $x \geq 2$ ： $(x+1) + (2x-4) > 9$ ， $3x > 12$ ， $x > 4$ ，和 $x \geq 2$ 取共同部分得 $x > 4$ 。② $-1 \leq x < 2$ ： $(x+1) + (4-2x) > 9$ ， $5-x > 9$ ， $x < -4$ ，和這一段沒有共同部分。③ $x < -1$ ： $-(x+1) + (4-2x) > 9$ ， $3-3x > 9$ ， $x < -2$ ，和 $x < -1$ 取共同部分得 $x < -2$ 。合起來： $x < -2$ 或 $x > 4$ 。

每一段解出來的範圍都要和那一段的前提取共同部分；第 ② 段解出 $x < -4$ ，但前提是 $-1 \leq x < 2$ ，所以這一段沒有解。

過定點的直線和兩軸圍成的三角形面積：設截距式，把定點代入得到「兩個正數的和是 1」，再用算幾不等式。

填充 10~11 (第 17~18 題)：小數部分、立方和公式

- 17 b 是小數部分，所以 $0 \leq b < 1$ ， $0 \leq b^2 < 1$ 。 $a^2 = 28 - b^2$ ，所以 $27 < a^2 \leq 28$ 。 $5^2 = 25 < 27$ 且 $28 < 36 = 6^2$ ，所以 $5 < a < 6$ ， a 的整數部分是 5， $a = 5 + b$ 。代入： $(5+b)^2 + b^2 = 28$ ， $2b^2 + 10b - 3 = 0$ ， $b = \frac{-10 \pm \sqrt{124}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{31}}{2}$ 。 $b \geq 0$ 取正的： $b = \frac{-5 + \sqrt{31}}{2} \approx 0.28$ ，符合 $0 \leq b < 1$ 。所以 $a = 5 + b = \frac{5 + \sqrt{31}}{2}$ 。

先用 $0 \leq b < 1$ 估出 a^2 的範圍，才能確定整數部分是 5。

- 18 令 $s = m + n$ 。由 $m^3 + n^3 = (m+n)^3 - 3mn(m+n) = s^3 - 3mns$ ，原式變成 $(s^3 - 13^3) - 3mn(s - 13) = 0$ 。 $s^3 - 13^3 = (s - 13)(s^2 + 13s + 169)$ ，提出 $s - 13$ ： $(s - 13)(s^2 + 13s + 169 - 3mn) = 0$ 。因為 $m, n \geq 0$ ，由算幾不等式 $mn \leq \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{4}$ ，所以 $s^2 + 13s + 169 - 3mn \geq \frac{s^2}{4} + 13s + 169 > 0$ ，第二個括號不會是 0。因此 $s = 13$ ，即 $m + n = 13$ 。 m 可以取 $0, 1, 2, \dots, 13$ ， $n = 13 - m$ 跟著決定，共 14 組。
39 = 3 × 13，看到 $m^3 + n^3$ 和 13^3 就把式子往 $m + n$ 和 13 的方向整理。 m, n 可以是 0，所以 $(0, 13)$ 和 $(13, 0)$ 也要算。



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自家齊高中 114 學年度上學期高一第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE • EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/ccsh-114a-g10-1