

高雄中正高中 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數（弧度量、三角函數的圖形與週期、和差角與倍角半角公式、正餘弦的疊合） · 多選題 2 題、填充題 11 題、計算題 2 題，共 15 題；流傳版本未印配分

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/cchs-114a-g11a-1

一、多選題

1 下列選項何者正確？

- (1) $\sin \pi > \sin \pi^\circ$
- (2) $\cos \pi > \cos \pi^\circ$
- (3) $\cos \pi^\circ > \sin \pi^\circ$
- (4) $\tan \pi > \tan \pi^\circ$
- (5) $\sin \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

2 下列選項何者正確？

- (1) 函數 $y = \sin 2x$ 的週期是 4π
- (2) 函數 $y = |\sin x|$ 的週期是 π
- (3) 兩函數 $y = \sin x + 1$ 與 $y = 0.5 \cdot \sin x$ 的週期相同
- (4) 函數 $y = 1 + 2 \sin 2x$ 的最大值為 3、最小值為 -1
- (5) 將函數 $y = \sin x$ 的圖形向左移 $\frac{\pi}{3}$ 單位，會與 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的函數圖形重合

二、填充題（流傳版本題號 1~11，本頁接續編為第 3~13 題）

3 若三角形的三內角比為 3 : 4 : 5，試問此三角形的最大角是多少度？

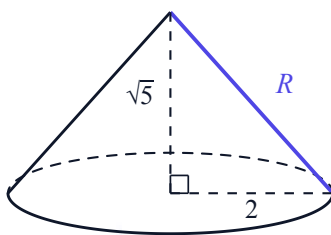
4 求 $\cos^2 22.5^\circ$ 的值。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/cchs-114a-g11a-1

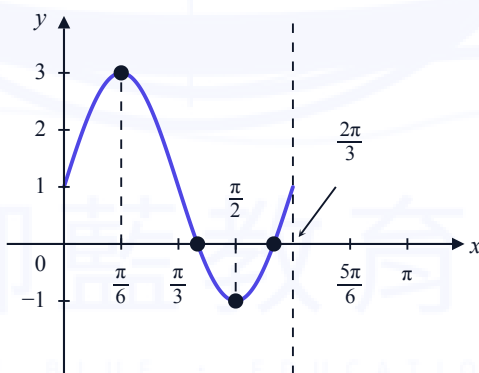
- 5 一直圓錐底圓半徑為 2 公分，高為 $\sqrt{5}$ 公分，將側面沿斜高 R 剪開成一扇形，求此扇形的圓心角為多少度？



- 6 試比較下列三數的大小： $a = 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ$ ， $b = \cos^2 55^\circ - \sin^2 55^\circ$ ， $c = \frac{2 \tan 25^\circ}{1 - \tan^2 25^\circ}$ 。

- 7 求 $4\sqrt{2} \sin 44^\circ + 4\sqrt{2} \cos 44^\circ$ 最接近的整數。

- 8 右圖是函數 $y = f(x) = a \sin kx + b$ 在某一個週期內的圖形，其中 a 、 k 、 b 是常數，且 $a > 0$ 、 $k > 0$ ，求序組 (a, k, b) 。



- 9 求 $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$ 的值。



- 10 求方程式 $\sin x = \frac{x}{12}$ 的實數解個數。

- 11 函數 $f(x) = 3\sin x - 3\sqrt{3}\cos x$ ，且 $0 \leq x \leq 2\pi$ ，當 $x = \alpha$ (徑) 時， $f(x)$ 有最小值 -6 ，求 α 的值。

- 12 若 $\sin \theta$ 為方程式 $6x^2 - 7x - 5 = 0$ 之一解，則 $\cos 2\theta = ?$

- 13 設 a, b 是實數且 $a > b$ ，若 $a\sin x + b\cos x$ 的最小值為 -5 ，且 $a + b = 7$ ，求數對 (a, b) 。

三、計算題 (流傳版本題號 1~2，本頁接續編為第 14~15 題)

- 14 某動物園貓熊館打造一個圓形摩天輪，當摩天輪開始運轉時，在摩天輪的圓仔恰坐在離地面最近的位置上， x 分鐘後，圓仔離地的高度 y (單位：公尺) 可表為 $y = 5\sin\left(\frac{2\pi}{25}x - \frac{\pi}{2}\right) + 6$ ，試問：(1) 摩天輪轉一圈需幾分鐘？ (2) 圓仔離地最高的高度是幾公尺？

- 15 已知 α, β 均為銳角， $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ， $\cos \beta = \frac{5}{13}$ ，試問：(1) $\sin(\alpha + \beta)$ (2) $\cos(\alpha + \beta)$ (3) $\alpha + \beta$ 為第幾象限角？





御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/cchs-114a-g11a-1

答案一覽

第 1 題 (3)

第 2 題 (2)(3)(4)

第 3 題 $\frac{5\pi}{12}$

第 4 題 $\frac{2 + \sqrt{2}}{4}$

第 5 題 $\frac{4\pi}{3}$

第 6 題 $c > a > b$

第 7 題 8

第 8 題 (2, 3, 1)

第 9 題 4

第 10 題 7

第 11 題 $\frac{11\pi}{6}$

第 12 題 $\frac{1}{2}$

第 13 題 (4, 3)

第 14 題 (1) 25 分鐘 (2) 11 公尺

第 15 題 (1) $\frac{56}{65}$ (2) $-\frac{33}{65}$ (3) 第二象限角

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)



多選題 (第 1、2 題)：弧度與度、週期與圖形

- 1 答案 (3)。沒有寫「°」的角是弧度： π 弧度是 180° ，所以 $\sin \pi = 0$ 、 $\cos \pi = -1$ 、 $\tan \pi = 0$ 。 π° 約 3.14° ，是很小的第一象限角， $\sin \pi^\circ$ 、 $\cos \pi^\circ$ 、 $\tan \pi^\circ$ 都是正的。(1) 錯： $0 > \sin \pi^\circ$ 不成立。(2) 錯： $-1 > \cos \pi^\circ$ 不成立。(3) 對：角度在 0° 到 45° 之間時餘弦比正弦大。(4) 錯： $0 > \tan \pi^\circ$ 不成立。(5) 錯： $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 在這裡是弧度 (約 0.87)，而 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 時 $\sin x < x$ ，所以 $\sin \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。
(5) 不是 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ； $\sin x < x$ 可以在單位圓上看：圓心角 x 弧度所對的弧長是 x ， $\sin x$ 是弧的端點到 x 軸的垂直距離，比弧短。
- 2 答案 (2)(3)(4)。(1) 錯： $y = \sin 2x$ 的週期是 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 。(2) 對： $|\sin(x + \pi)| = |-\sin x| = |\sin x|$ ，把 $y = \sin x$ 在 x 軸下方的部分往上翻，圖形每隔 π 重複一次。(3) 對：上下平移和鉛直伸縮都不改變週期，兩個函數的週期都是 2π 。(4) 對： $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ ，所以 $-1 \leq 1 + 2\sin 2x \leq 3$ ，兩端都取得到。(5) 錯：向左移 $\frac{\pi}{3}$ 是把 x 換成 $x + \frac{\pi}{3}$ ，得到 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ； $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 是向右移 $\frac{\pi}{3}$ 。
 x 的係數會改變週期，加在函數外面的常數和乘在外面的倍數都不會。

填充 1~4 (第 3~6 題)：弧度、半角、扇形、二倍角

- 3 三內角和是 π 弧度，依 $3:4:5$ 分成 12 份，最大角佔 5 份： $\pi \times \frac{5}{12} = \frac{5\pi}{12}$ 。
用度來算是 $180^\circ \times \frac{5}{12} = 75^\circ$ ，再乘 $\frac{\pi}{180}$ 換成弧度，結果相同。
- 4 22.5° 是 45° 的一半。由半角公式 $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$ ，取 $\theta = 45^\circ$ ： $\cos^2 22.5^\circ = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ 。
題目問的是平方，不必再開根號。
- 5 斜高 $R = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{9} = 3$ 。側面展開成的扇形，半徑是斜高 3，弧長等於底圓周長 $2\pi \times 2 = 4\pi$ 。由弧長 = 半徑 $\times$ 圓心角 (弧度)，圓心角 = $\frac{4\pi}{3}$ 。
扇形的半徑是斜高，不是圓錐的高，也不是底圓半徑。
- 6 三個數都是二倍角公式的樣子。 $a = 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ = \sin 40^\circ$ ，介於 0 與 1 之間。 $b = \cos^2 55^\circ - \sin^2 55^\circ = \cos 110^\circ$ ， 110° 是第二象限角， $b < 0$ 。 $c = \frac{2\tan 25^\circ}{1 - \tan^2 25^\circ} = \tan 50^\circ$ ，比 $\tan 45^\circ = 1$ 大。所以 $c > 1 > a > 0 > b$ ，即 $c > a > b$ 。
不必算出近似值，只要分別和 0、1 比就能排出順序。

填充 5~8 (第 7~10 題)：疊合估值、讀圖定係數、化簡、數交點

- 7 提出 $4\sqrt{2}$ 再疊合： $\sin 44^\circ + \cos 44^\circ = \sqrt{2}(\sin 44^\circ \cos 45^\circ + \cos 44^\circ \sin 45^\circ) = \sqrt{2}\sin 89^\circ$ ，所以原式 $= 4\sqrt{2} \times \sqrt{2}\sin 89^\circ = 8\sin 89^\circ$ 。 $\sin 89^\circ$ 比 1 小一點點 (約 0.9998)，原式約 7.999，最接近的整數是 8。
只要確定值在 7.5 與 8 之間即可： $\sin 89^\circ > \sin 75^\circ \approx 0.966$ ，所以 $8\sin 89^\circ > 7.7$ 。



- 8 由圖，最大值 3、最小值 -1。 $a > 0$ 時最大值是 $a + b$ 、最小值是 $-a + b$ ： $a + b = 3$ 、 $-a + b = -1$ ，解得 $a = 2$ 、 $b = 1$ 。最高點在 $x = \frac{\pi}{6}$ ，最低點在 $x = \frac{\pi}{2}$ ，相鄰的最高點到最低點是半個週期： $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ ，所以週期是 $\frac{2\pi}{3}$ ， $k = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$ 。得 $(a, k, b) = (2, 3, 1)$ 。

檢查： $f(x) = 2\sin 3x + 1$ ， $f(0) = 1$ 、 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin \frac{\pi}{2} + 1 = 3$ 、 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin \frac{3\pi}{2} + 1 = -1$ ，與圖相符；圖上從 0 到 $\frac{2\pi}{3}$ 剛好一個週期。

- 9 通分：原式 = $\frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$ 。分子 = $2\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right) = 2(\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ) = 2\sin 20^\circ$ 。分母 = $\frac{1}{2}\sin 20^\circ$ 。所以原式 = $\frac{2\sin 20^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ} = 4$ 。

分子用差角公式（疊合），分母用二倍角公式，兩邊都湊出 $\sin 20^\circ$ 就能約掉。

- 10 數 $y = \sin x$ 與直線 $y = \frac{x}{12}$ 的交點。 $x = 0$ 是一個解。因為 $-1 \leq \sin x \leq 1$ ，只需看 $-12 \leq x \leq 12$ ；而 $3\pi \approx 9.42 < 12 < 4\pi \approx 12.57$ 。 $x > 0$ 時直線在 x 軸上方，只可能在正弦為正的區間相交：在 $(0, \pi)$ ，原點附近 $\sin x$ 比 $\frac{x}{12}$ 大，到 $x = \pi$ 時 $\sin x = 0$ 比直線小，交 1 點；在 $(2\pi, 3\pi)$ ，直線的值在 0.52 到 0.79 之間，低於峰頂 1，交 2 點；下一個正的區間從 4π 開始，那裡直線的值已超過 1，沒有交點。所以 $x > 0$ 有 3 個解。兩個圖形都對稱於原點， $x < 0$ 也有 3 個解。合計 $3 + 3 + 1 = 7$ 個。 $x = 0$ 只能算一次；也要確認 12 落在 3π 與 4π 之間，才知道第三個峰碰不到直線。

填充 9~11（第 11~13 題）：疊合求極值、二倍角

- 11 $\sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$ ， $f(x) = 6\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 6\left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \sin \frac{\pi}{3}\right) = 6\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 。
最小值 -6 發生在 $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$ 。 $0 \leq x \leq 2\pi$ 時 $-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3}$ ，這個範圍內只有 $x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$ ，所以 $\alpha = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$ 。

驗算： $f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{9}{2} = -6$ 。

- 12 $6x^2 - 7x - 5 = (3x - 5)(2x + 1) = 0$ ， $x = \frac{5}{3}$ 或 $x = -\frac{1}{2}$ 。正弦值介於 -1 與 1 之間， $\frac{5}{3}$ 不合，所以 $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ 。由二倍角公式 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 1 - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ 。

兩個根要先用 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ 篩掉一個。

- 13 $a \sin x + b \cos x$ 疊合後是 $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$ ，最小值是 $-\sqrt{a^2 + b^2}$ ，所以 $a^2 + b^2 = 25$ 。又 $a + b = 7$ ， $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ，得 $49 = 25 + 2ab$ ， $ab = 12$ 。和為 7、積為 12 的兩數是 $t^2 - 7t + 12 = 0$ 的兩根 3、4。因為 $a > b$ ， $(a, b) = (4, 3)$ 。

x 沒有範圍限制，所以最小值一定是 $-\sqrt{a^2 + b^2}$ 。



計算題 (第 14、15 題)：摩天輪、和角公式

- 14 (1) 轉一圈就是函數的一個週期： $\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{25}} = 25$ (分鐘)。(2) 正弦值最大是 1，所以 y 最大是 $5 \times 1 + 6 = 11$ (公尺)；這發生在 $\frac{2\pi}{25}x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ ，即 $x = 12.5$ 分鐘，剛好轉了半圈。

可以對照題意： $x = 0$ 時 $y = 5 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 6 = 1$ ，是最低點，與「恰坐在離地面最近的位置」相符；摩天輪的半徑是 5 公尺，圓心離地 6 公尺。

- 15 α 、 β 是銳角，正弦、餘弦都為正： $\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$ ， $\sin \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$ 。(1)

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{20 + 36}{65} = \frac{56}{65}。 \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} - \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{15 - 48}{65} = -\frac{33}{65}。 \\ (2) \cos(\alpha + \beta) &= -\frac{33}{65} < 0，\text{所以 } \alpha + \beta \text{ 是第二象限角。}\end{aligned}$$

(3) 也可以這樣看：兩個銳角相加在 0 與 π 之間，餘弦為負就表示超過 $\frac{\pi}{2}$ 。驗算： $\left(\frac{56}{65}\right)^2 + \left(\frac{33}{65}\right)^2 = \frac{3136 + 1089}{4225} = 1$ 。

看到 $a \sin x + b \cos x$ 就先疊合成單一正弦；看到 $2 \sin \theta \cos \theta$ 、 $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ 、 $\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ 就想到二倍角。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自高雄中正高中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/cchs-114a-g11a-1