

安康高中 114 學年度上學期 高三第一次段考



御藍教育

範圍：極限與函數（數列的極限、無窮等比級數、函數的定義域與合成、函數的極限、連續函數） · 是非題 10 題（20 分）、多重選擇題 4 題（20 分）、填充題 17 格（60 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/akhs-114a-g12jia-1

一、是非題（每題 2 分，共 20 分）

- 1 無窮數列 $\left\langle \frac{n-100}{3n} \right\rangle$ 的極限為 0。
- 2 若無窮數列 $\left\langle \frac{an^2-2n+1}{3n} \right\rangle$ 的極限存在，則 $a=0$ 。
- 3 $0.\overline{9} < 1$ 。
- 4 無窮等比級數 $1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \dots$ 的和為 $\frac{1}{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{2}{5}$ 。
- 5 若多項式函數 $f(x)$ 滿足 $f(0) = 2$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ 。
- 6 若函數 $f(x) = x^3 + 1$ ， $g(x) = 2x^2 - 3$ ，則 $(g \circ f)(x)$ 為五次多項式函數。
- 7 函數 $f(x) = \frac{5x-3}{x^2+x+1}$ 的定義域為所有實數。
- 8 極限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{|x|}$ 不存在。
- 9 設函數 $f(x) = \sqrt{x}$ ， $g(x) = \frac{1}{x}$ ，則函數 $(f+g)(x)$ 的定義域為 $\{x \in R \mid x \geq 0\}$ 。
- 10 設 $f(x) = x^2 - x$ ，則在 3 與 4 之間至少有一個實數 c ，滿足 $f(c) = 10$ 。

二、多重選擇題（每題全對得 5 分，錯 1 個選項得 3 分，錯 2 個選項得 1 分，其餘不給分）（本頁第 11~14 題依序為原卷多重選擇第 1~4 題）

- 11 選出正確的選項：
 - (1) 若數列 $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$ 均為收斂數列，則 $\langle a_n + b_n \rangle$ 為收斂數列
 - (2) 若 $\langle a_n + b_n \rangle$ 為收斂數列，則 $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$ 均為收斂數列
 - (3) 若數列 $\langle a_n \rangle$ 收斂於 0，則數列 $\langle |a_n| \rangle$ 收斂於 0
 - (4) 若數列 $\langle a_n \rangle$ 收斂於 0，則數列 $\langle a_n^2 \rangle$ 收斂於 0
 - (5) 若數列 $\langle a_n^2 \rangle$ 收斂於 1，則數列 $\langle a_n \rangle$ 收斂於 1。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/akhs-114a-g12jia-1

12 下列哪些數列為收斂數列？

- (1) $\left\langle \frac{n+2024}{n-2025} \right\rangle$
- (2) $\left\langle \frac{(n-1)(n-2)}{3n+5} \right\rangle$
- (3) $\left\langle \frac{2^{n+2} - 3^n}{2^n + 3^{n+1}} \right\rangle$
- (4) $\langle \cos(n\pi) \rangle$
- (5) $\langle \sin(n\pi) \rangle$

13 已知多項式 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5$ ，選出正確的選項。

- (1) $f(1) = 0$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)}{x-1} + \frac{x-1}{x} \right) = 5$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = 5$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 + x - 2} = \frac{5}{3}$
- (5) $\lim_{x \rightarrow 1} (x \cdot f(x)) = 0$

14 下列哪一個函數在 $x = 2$ 時連續？

- (1) $f(x) = |x - 2|$
- (2) $f(x) = (x - 2)^2$
- (3) $f(x) = \frac{1}{x}$
- (4) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 2 \\ 4, & x = 2 \\ -x + 6, & x < 2 \end{cases}$
- (5) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x > 2 \\ 1, & x = 2 \\ -x + 2, & x < 2 \end{cases}$

三、填充題（依答對格數給分：答對 1~17 格依序得 5、10、15、20、24、28、32、36、39、42、45、48、51、54、56、58、60 分）（本頁第 15~31 題依序為原卷答案格 (1)~(17)）

15 求下列無窮數列的極限： $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-3n^2 + 1}{2n^2 - 3n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

16 求下列無窮數列的極限： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2^{n+1}}{4^{n+1} + 3^n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 17 若數列 $\frac{2}{2n+1}, \frac{4}{2n+1}, \frac{6}{2n+1}, \dots, \frac{2n}{2n+1}$ 為等差數列，且這 n 項的算術平均數為 a_n ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____。

18 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{5^n} =$ _____。

- 19 若無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n$ 的和存在，則 x 的範圍為 _____。

- 20 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{4n-2} - a_n\right) = 3$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 的值為 _____。

- 21 已知 a, b 為二實數，滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n+1} - an - b\right) = 2$ ，求 $(a, b) =$ _____。

- 22 某一無窮等比數列的和為 28，又其各項的平方和為 112。若此級數的首項為 a ，公比為 r ，則數對 $(a, r) =$ _____。

- 23 函數 $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$ 的定義域為 _____。

- 24 若無窮等比級數 $1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots = 0.5\bar{3}$ ，則 $r =$ _____。



25 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3 - 3x - x^2| + a}{x - 1} = b$ ，求 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

26 求下列極限： $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1}{x^2 + 3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

27 求下列極限： $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x + 1}{x - 2} - \frac{4x + 4}{x^2 - 4} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

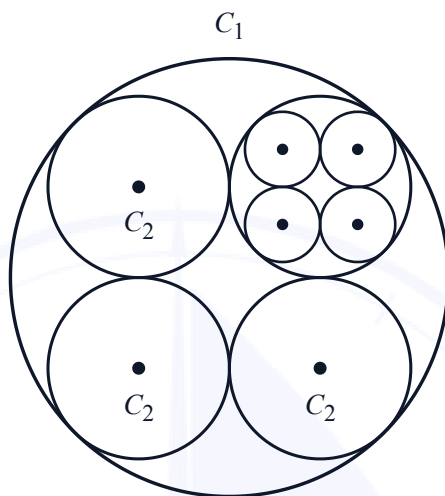
28 已知 a, b 為二實數，滿足 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{(x - 1)(x + 2)} = 2$ ，求數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

29 已知函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + a}{x - 2}, & \text{當 } x \neq 2 \\ b, & \text{當 } x = 2 \end{cases}$ 在 $x = 2$ 處連續，求 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

30 手機剩餘電量經常用格子數來顯示，有一款手機當充滿電時，螢幕的電量顯示為 5 格。設在待機 x 小時後，剩餘電量的顯示格數為 $f(x) = \left\lfloor \frac{60}{x + 11} \right\rfloor$ 格，其中符號 $\lfloor \cdot \rfloor$ 為高斯符號。試問：若剩餘電量的顯示格數是 3 格，則 x 的最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(註： $\lfloor x \rfloor$ 表示不大於 x 的最大整數)



- 31 如圖，圓 C_1 內部有四個等圓 C_2 彼此外切，且均與圓 C_1 內切；圓 C_2 內部有四個等圓 C_3 彼此外切，且均與圓 C_2 內切，依此類推可作出圓 $C_4, C_5, C_6, \dots$ ，若圓 C_1 的半徑為 2，且圓 C_n 的面積為 a_n ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/akhs-114a-g12jia-1

答案一覽

是非題：1 = 正確、2 = 錯誤

1 2	2 1	3 2	4 2	5 1	6 2	7 1
8 2	9 2	10 1				

第 11 題 (1)(3)(4)

第 12 題 (1)(3)(5)

第 13 題 (1)(2)(4)(5)

第 14 題 (1)(2)(3)(4)

第 15 題 $-\frac{3}{2}$

第 16 題 $\frac{1}{4}$

第 17 題 $\frac{1}{2}$

第 18 題 $\frac{17}{14}$

第 19 題 $-3 < x < 1$

第 20 題 $-\frac{9}{4}$

第 21 題 $(1, -3)$

第 22 題 $\left(7, \frac{3}{4}\right)$

第 23 題 $x < -3$ 或 $x > 2$

第 24 題 $-\frac{7}{8}$

第 25 題 4

第 26 題 $\frac{5}{7}$

第 27 題 $\frac{3}{4}$

第 28 題 $(4, -5)$

第 29 題 0

第 30 題 9

第 31 題 $(2 + 2\sqrt{2})\pi$



對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)

是非 1~5：數列的極限、循環小數、等比級數的收斂條件

- 1 **2** 分子分母同除以 n ： $\frac{n-100}{3n} = \frac{1-\frac{100}{n}}{3}$ ， $n \rightarrow \infty$ 時 $\frac{100}{n} \rightarrow 0$ ，所以極限是 $\frac{1}{3}$ ，不是 0。
前面幾項 ($n < 100$) 是負的， $n = 100$ 時剛好是 0，但極限看的是 n 很大以後的走向。
- 2 **1** $\frac{an^2-2n+1}{3n} = \frac{a}{3}n - \frac{2}{3} + \frac{1}{3n}$ 。後兩項趨近 $-\frac{2}{3}$ ；若 $a \neq 0$ ， $\frac{a}{3}n$ 的絕對值會愈來愈大，數列發散。所以極限存在時必有 $a = 0$ (此時極限為 $-\frac{2}{3}$)。
- 3 **2** $0.\bar{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots$ 是首項 $\frac{9}{10}$ 、公比 $\frac{1}{10}$ 的無窮等比級數，和為 $\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1$ 。所以 $0.\bar{9} = 1$ ，不小於 1。
也可以由 $0.\bar{3} = \frac{1}{3}$ 兩邊乘以 3 得到 $0.\bar{9} = 1$ 。
- 4 **2** 公比 $r = -\frac{3}{2}$ ， $|r| = \frac{3}{2} > 1$ ，這個無窮等比級數發散，沒有和。公式 $\frac{a}{1-r}$ 只有在 $|r| < 1$ 時才能用。
把部分和算幾項就看得出來： $1, -\frac{1}{2}, \frac{7}{4}, -\frac{13}{8}, \cdots$ ，正負交替而且離 0 愈來愈遠，不會靠近 $\frac{2}{5}$ 。
- 5 **1** 多項式函數在每一點都連續，所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2$ 。

用公式之前先檢查條件：無窮等比級數要公比的絕對值小於 1 才有和。

是非 6~10：合成函數、定義域、函數的極限與中間值定理

- 6 **2** $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(x^3+1)^2 - 3 = 2x^6 + 4x^3 - 1$ ，是六次多項式函數。
合成時次數相乘 ($3 \times 2 = 6$)，不是相加 ($3 + 2 = 5$)；相加是兩個多項式相乘時的次數。
- 7 **1** 分式函數只要分母不為 0 就有定義。 $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ ，對所有實數 x 分母都不為 0，所以定義域是所有實數。
- 8 **2** x 在 1 附近時 $x > 0$ ， $|x| = x$ ，所以 $\frac{x}{|x|} = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{|x|} = 1$ ，極限存在。
極限不存在的是 $x \rightarrow 0$ ：左極限 -1 、右極限 1 不相等。這題是 $x \rightarrow 1$ ，要看清楚趨近的點。
- 9 **2** $(f+g)(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ 要兩個函數都有定義： $\sqrt{x}$ 需要 $x \geq 0$ ， $\frac{1}{x}$ 需要 $x \neq 0$ 。兩個條件同時成立是 $x > 0$ ，定義域為 $\{x \in R \mid x > 0\}$ ，不含 0。



- 10 1 $f(x) = x^2 - x$ 是多項式函數，在 $[3, 4]$ 上連續。 $f(3) = 6$ ， $f(4) = 12$ ，而 10 介於 6 與 12 之間，由中間值定理，在 3 與 4 之間至少有一個 c 使 $f(c) = 10$ 。

也可以直接解： $c^2 - c - 10 = 0$ ， $c = \frac{1 + \sqrt{41}}{2}$ (取正)。因為 $6 < \sqrt{41} < 7$ ，所以 $3.5 < c < 4$ ，確實在 3 與 4 之間。

兩個函數相加、相乘，定義域是兩個定義域的共同部分；合成函數的次數是相乘。

多重選擇 11~14 (原卷多選 1~4)：收斂數列的性質、極限的運算、連續

- 11 答案 (1)(3)(4)。(1) 兩個收斂數列的和仍收斂，極限是兩個極限的和，對。(2) 反例： $a_n = n$ ， $b_n = -n$ ， $a_n + b_n = 0$ 收斂，但 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 都發散，錯。(3) $|a_n|$ 就是 a_n 與 0 的距離， a_n 趨近 0 表示這個距離趨近 0，所以 $|a_n| \rightarrow 0$ ，對。(4) $a_n^2 = a_n \cdot a_n \rightarrow 0 \cdot 0 = 0$ ，對。(5) 反例： $a_n = -1$ ， $a_n^2 = 1$ 收斂於 1，但 a_n 收斂於 -1 ；或 $a_n = (-1)^n$ ， $a_n^2 = 1$ ，但 $\langle a_n \rangle$ 發散，錯。

(2) 與 (5) 都是把正確性質反過來說。要判斷「若...則...」是錯的，找一個反例就夠了。

- 12 答案 (1)(3)(5)。(1) 分子分母同除以 n ： $\frac{1 + \frac{2024}{n}}{1 - \frac{2025}{n}} \rightarrow 1$ ，收斂。(2) 分子二次、分母一次，同除以 n 得 $\frac{n - 3 + \frac{2}{n}}{3 + \frac{5}{n}}$ ，分子愈來愈大，發散。(3) 同除以 3^n ： $\frac{4(\frac{2}{3})^n - 1}{(\frac{2}{3})^n + 3} \rightarrow \frac{-1}{3}$ ，收斂。(4) $\cos(n\pi) = (-1)^n$ ，在 -1 、 1 之間跳動，發散。(5) n 是正整數時 $\sin(n\pi) = 0$ ，每一項都是 0，收斂於 0。

(1) 的第 2025 項分母為 0、沒有定義；收斂與否看的是 n 很大以後的項，這裡照題意判為收斂。(4)(5) 先把 $n = 1, 2, 3$ 代進去寫出前幾項，就看得出一個在跳、一個全是 0。

- 13 答案 (1)(2)(4)(5)。(1) $f(x) = \frac{f(x)}{x-1} \cdot (x-1) \rightarrow 5 \cdot 0 = 0$ ，而多項式函數連續，所以 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ ，對。(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x} = \frac{0}{1} = 0$ ，兩個極限都存在，和的極限 $= 5 + 0 = 5$ ，對。(3) 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2}$ 存在，設為 L ，則 $\frac{f(x)}{x-1} = \frac{f(x)}{(x-1)^2} \cdot (x-1) \rightarrow L \cdot 0 = 0$ ，與已知的 5 矛盾，所以這個極限不存在，錯。(4) $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ ， $\frac{f(x)}{x^2 + x - 2} = \frac{f(x)}{x-1} \cdot \frac{1}{x+2} \rightarrow 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ ，對。(5) $x \cdot f(x) \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$ ，對。

可以拿 $f(x) = 5(x-1)$ 當例子檢查：(3) 變成 $\frac{5}{x-1}$ ， $x \rightarrow 1$ 時極限不存在；(4) 變成 $\frac{5}{x+2} \rightarrow \frac{5}{3}$ 。

- 14 答案 (1)(2)(3)(4)。在 $x = 2$ 連續的條件是 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 。(1) $|x-2|$ 在 $x \rightarrow 2$ 時趨近 $0 = f(2)$ ，連續。(2) 多項式函數處處連續。(3) $\frac{1}{x}$ 只在 $x = 0$ 沒有定義，在 $x = 2$ 附近分母不為 0， $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} = f(2)$ ，連續。(4) 右極限 $\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4$ ，左極限 $\lim_{x \rightarrow 2^-} (-x+6) = 4$ ， $f(2) = 4$ ，三者相等，連續。(5) 右極限 $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+1) = 5$ ，左極限 $\lim_{x \rightarrow 2^-} (-x+2) = 0$ ，左右極限不相等，極限不存在，不連續。

(1) 的圖形在 $x = 2$ 有尖點，但沒有斷開，仍然連續。(3) 的不連續點在 $x = 0$ ，不在 $x = 2$ 。

分段定義的函數要判斷連續，把左極限、右極限、函數值三個數都算出來比。



填充 15~20 (原卷第 (1)~(6) 格) : 數列的極限與無窮等比級數

15 分子分母同除以 n^2 : $\frac{-3 + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{3}{n}} \rightarrow \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$ 。

16 底數最大的是 4，分子分母同除以 4^n : 分子 $= 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 1$; 分母 $= 4 + \left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 4$ 。極限為 $\frac{1}{4}$ 。

$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$ 、 $4^{n+1} = 4 \cdot 4^n$ ，先把指數上的 +1 拆成係數再除。

17 這 n 項的和 $= \frac{2+4+6+\cdots+2n}{2n+1} = \frac{n(n+1)}{2n+1}$ ，算術平均數 $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1}$ 。分子分母同除以 n : $\frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{2}$ 。

等差數列的平均數也等於首項與末項的平均 : $\frac{1}{2} \left(\frac{2}{2n+1} + \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{n+1}{2n+1}$ ，結果相同。

18 一般項 $\frac{3^n + (-2)^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(-\frac{2}{5}\right)^n$ 。兩個無窮等比級數的公比 $\frac{3}{5}$ 、 $-\frac{2}{5}$ 絕對值都小於 1，都收斂，可以分開求和 : $\frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} + \frac{-\frac{2}{5}}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{3}{2} - \frac{2}{7} = \frac{17}{14}$ 。

n 從 1 開始，首項是 $\frac{3}{5}$ 與 $-\frac{2}{5}$ ，不是 1。

19 這是首項與公比都是 $\frac{x+1}{2}$ 的無窮等比級數。和存在的條件是公比的絕對值小於 1 : $-1 < \frac{x+1}{2} < 1$ ， $-2 < x+1 < 2$ ，所以 $-3 < x < 1$ 。

$x = -1$ 時每一項都是 0，和為 0，也在這個範圍內。兩端 $x = -3$ (各項為 $-1, 1, -1, \dots$) 與 $x = 1$ (各項都是 1) 級數都發散，不能取等號；這與「數列 $\langle r^n \rangle$ 收斂」的條件 $-1 < r \leq 1$ 不同。

20 設 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{4n-2} = \frac{3}{4}$ ，兩個數列都收斂，差的極限等於極限的差 : $\frac{3}{4} - \alpha = 3$ ，所以 $\alpha = \frac{3}{4} - 3 = -\frac{9}{4}$ 。

原卷題幹的兩處 $\lim a_n$ 下方印作 $x \rightarrow \infty$ ，數列的變數是 n ，應為 $n \rightarrow \infty$ ，本頁已更正。

分式型同除以最高次項，指數型同除以底數最大的那一項；無窮等比級數要先看首項是哪一項。

填充 21~25 (原卷第 (7)~(11) 格) : 由極限求係數、等比級數、定義域

21 用長除法 : $n^2 + 1 = (n+1)(n-1) + 2$ ，所以 $\frac{n^2+1}{n+1} = n-1 + \frac{2}{n+1}$ 。括號內 $= (1-a)n - (1+b) + \frac{2}{n+1}$ 。若 $a \neq 1$ ， $(1-a)n$ 的絕對值會愈來愈大，極限不存在；所以 $a = 1$ ，此時極限 $= -(1+b) = 2$ ， $b = -3$ 。 $(a, b) = (1, -3)$ 。

22 級數的和 $\frac{a}{1-r} = 28$ 。各項平方 $a^2, a^2r^2, a^2r^4, \dots$ 是首項 a^2 、公比 r^2 的等比級數，和 $\frac{a^2}{1-r^2} = 112$ 。因為 $\frac{a^2}{1-r^2} = \frac{a}{1-r} \cdot \frac{a}{1+r}$ ，所以 $\frac{a}{1+r} = \frac{112}{28} = 4$ 。由 $a = 28(1-r) = 4(1+r)$ 得 $24 = 32r$ ， $r = \frac{3}{4}$ ， $a = 4 \cdot \frac{7}{4} = 7$ 。 $(a, r) = \left(7, \frac{3}{4}\right)$ 。

$|r| = \frac{3}{4} < 1$ ，兩個級數都收斂，符合題意。驗算 : $\frac{7}{1 - \frac{3}{4}} = 28$ ， $\frac{49}{1 - \frac{9}{16}} = 112$ 。



- 23 根號內要大於或等於 0，而且分母不為 0： $\frac{x+3}{x-2} \geq 0$ 且 $x \neq 2$ 。分子分母同號或分子為 0： $x > 2$ 時兩者皆正； $x < -3$ 時兩者皆負； $x = -3$ 時分式為 0。所以定義域為 $x \leq -3$ 或 $x > 2$ 。
 $x = -3$ 可以取（根號內是 0）， $x = 2$ 不能取（分母為 0）；兩個端點一個含、一個不含。

- 24 先把循環小數化成分數： $0.5\bar{3} = 0.5 + 0.0\bar{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$ 。級數的首項為 1、公比為 r ，和
 $\frac{1}{1-r} = \frac{8}{15}$ ， $1-r = \frac{15}{8}$ ， $r = -\frac{7}{8}$ 。
 $|r| = \frac{7}{8} < 1$ ，級數確實收斂。和比首項 1 小，可以先看出公比是負的。

- 25 $x \rightarrow 1$ 時分母趨近 0，極限要存在，分子也必須趨近 0。 $x = 1$ 時 $3 - 3x - x^2 = -1$ ，所以 $|-1| + a = 0$ ， $a = -1$ 。 x 在 1 附近時 $3 - 3x - x^2 < 0$ ， $|3 - 3x - x^2| = x^2 + 3x - 3$ ，分子 $= x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$ 。極限 $b = \lim_{x \rightarrow 1} (x+4) = 5$ 。 $a + b = -1 + 5 = 4$ 。
 去絕對值前先把 $x = 1$ 代進絕對值裡面看正負；裡面是負的，去掉絕對值要變號。若直接拿掉絕對值，會得到 $a = 1$ 、 $b = -5$ ，算成 -4 。

極限存在而分母趨近 0，分子一定也趨近 0；絕對值先看裡面在那一點附近的正負。

填充 26~31（原卷第 (12)~(17) 格）：函數的極限、連續、高斯符號與圖形級數

- 26 $x \rightarrow 2$ 時分母 $x^2 + 3 \rightarrow 7 \neq 0$ ，直接代入： $\frac{2 \cdot 2 + 1}{2^2 + 3} = \frac{5}{7}$ 。
- 27 兩項各自在 $x \rightarrow 2$ 時沒有極限，先通分。 $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ ，原式 =
 $\frac{(x+1)(x+2) - (4x+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2 - x - 2}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+1}{x+2}$ ($x \neq 2$)。 $x \rightarrow 2$ 時趨近 $\frac{3}{4}$ 。
- 28 $x \rightarrow 1$ 時分母趨近 0，極限存在，所以分子在 $x = 1$ 的值為 0： $1 + a + b = 0$ ，即 $a = -1 - b$ 。分子
 $x^2 - (1+b)x + b = (x-1)(x-b)$ ，約去 $x-1$ 後極限 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-b}{x+2} = \frac{1-b}{3} = 2$ ， $b = -5$ ， $a = 4$ 。
 $(a, b) = (4, -5)$ 。
 驗算： $x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$ ， $\frac{x+5}{x+2}$ 在 $x \rightarrow 1$ 時趨近 $\frac{6}{3} = 2$ 。
- 29 在 $x = 2$ 連續表示 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + a}{x - 2}$ 存在且等於 b 。分母趨近 0，所以分子也要趨近 0： $4 + a = 0$ ， $a = -4$ 。
 此時 $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$ ($x \neq 2$)，極限為 4，所以 $b = 4$ 。 $a + b = 0$ 。
- 30 $\left\lceil \frac{60}{x+11} \right\rceil = 3$ ，由高斯符號的定義， $3 \leq \frac{60}{x+11} < 4$ 。 $x \geq 0$ 時 $x+11 > 0$ ，取倒數再乘以 60： $15 < x+11 \leq 20$ ，所以 $4 < x \leq 9$ 。 x 的最大值為 9。
 用題意檢查： $x = 9$ 時 $\frac{60}{20} = 3$ ，顯示 3 格；再久一點， $\frac{60}{x+11}$ 小於 3，就掉到 2 格。 $x = 0$ 時 $\left\lceil \frac{60}{11} \right\rceil = 5$ ，與「充滿電顯示 5 格」相符。



31 先找相鄰兩層半徑的比。設大圓半徑為 R 、圓心為 O ，裡面四個等圓半徑為 r 。四個等圓的圓心是一個邊長 $2r$ 的正方形的四個頂點，正方形的中心就是 O ，所以 O 到每個小圓圓心的距離是對角線的一半 $\sqrt{2}r$ 。小圓與大圓內切： $\sqrt{2}r + r = R$ ， $r = \frac{R}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} - 1)R$ 。所以每往內一層，半徑乘以 $\sqrt{2} - 1$ ，面積乘以 $(\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ 。 $a_1 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$ ， $\langle a_n \rangle$ 是首項 4π 、公比 $3 - 2\sqrt{2}$ 的等比數列，公比約 0.17，絕對值小於 1。所求 $= \frac{4\pi}{1 - (3 - 2\sqrt{2})} = \frac{4\pi}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{2\pi}{\sqrt{2} - 1} = 2(\sqrt{2} + 1)\pi = (2 + 2\sqrt{2})\pi$ 。

a_n 是「一個」圓 C_n 的面積，不是那一層所有圓的面積和。原卷題幹第二句印作「圓 C_2 部有四個等圓 C_3 」，漏「內」字，本頁已補上；本題在原卷的題號是填充第 17 題。

圖形一層一層縮小的題目，先找相鄰兩層的長度比，面積比是它的平方，再用無窮等比級數求和。

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自安康高中 114 學年度上學期高三第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/akhs-114a-g12jia-1