

安康高中 114 學年度上學期 高二第一次段考



御藍教育

範圍：三角函數（弧度量與同界角、弧長與扇形面積、弧度角的三角函數值、正弦函數的圖形與週期、週期性數學模型）
是非題 5 題（10 分）、單選題 5 題（25 分）、多選題 5 題（25 分）、填充題 8 格（32 分）、計算題 2 題（8 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

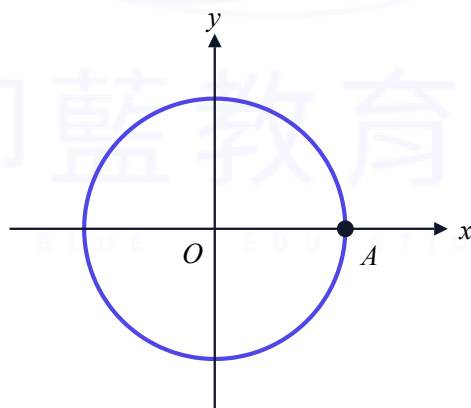
網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/akhs-114a-g11b-1

一、是非題（每題 2 分）

- 1 半徑為 1，弧長為 3 的扇形之圓心角為 3 徑。
- 2 廣義角 π 與 $-\pi$ 互為同界角。
- 3 函數 $y = 2 \sin 3x$ ，圖形對稱於原點。
- 4 函數 $y = 2 \sin 3x$ ，與 $y = 1$ 的圖形有無限多個交點。
- 5 $y = \sin 2x$ 的週期為 4π 。

二、單選題（每題 5 分）（本頁第 6~10 題依序為原卷單選第 1~5 題）

- 6 將一繩長為 100 公分的繩子一端固定在 A 點上，將此繩子逆時針纏繞在如圖的圓形輪上，輪子的半徑是 5 公分，輪子的圓心在 O 點，且繩子的另一端點為 B ，則 B 點在什麼位置？
 - (A) 第一象限
 - (B) 第二象限
 - (C) 第三象限
 - (D) 第四象限
 - (E) x 軸或 y 軸



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練
網頁版：royalblue-education.com/school-exams/akhs-114a-g11b-1

7 若 $\frac{55\pi}{12} < \theta < \frac{59\pi}{12}$ ，則角 θ 位於第幾象限？

- (A) 第一象限
- (B) 第二象限
- (C) 第三象限
- (D) 第四象限
- (E) 以上皆非

8 點 $P(\cos 10, \sin 10)$ 位於第幾象限？

- (A) 一
- (B) 二
- (C) 三
- (D) 四

9 比較 $a = \sin 110^\circ$ 、 $b = \sin 170^\circ$ 、 $c = \sin 230^\circ$ 的大小關係為

- (A) $a > b > c$
- (B) $c > b > a$
- (C) $b > a > c$
- (D) $b > c > a$
- (E) $a > c > b$

10 下列何者的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位，再向上平移 2 單位後得到？

- (A) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$
- (B) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$
- (C) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$
- (D) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$
- (E) $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



三、多選題（每題 5 分，錯一個選項扣 2 分，扣至該題 0 分）（本頁第 11~15 題依序為原卷多選第 1~5 題）

11 下列哪些敘述是正確的？

- (A) $\sin 3 > 0$
- (B) $\cos 3 > 0$
- (C) $\sin 3 > \frac{1}{2}$
- (D) $|\cos 3| > \frac{1}{2}$
- (E) $|\sin 3| < |\cos 3|$

12 設函數 $f(x) = 2 \sin 3x$ ，請問下列選項何者正確？

- (A) $-2 \leq f(x) \leq 2$
- (B) $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 時有最大值
- (C) $f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x = \frac{\pi}{6}$
- (D) $f(x)$ 的週期為 $\frac{2\pi}{3}$
- (E) $f(3) > 0$

13 有關 $y = f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ (x 為實數) 的圖形，下列何者正確？

- (A) 週期為 π
- (B) $-2 \leq f(x) \leq 2$
- (C) $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 時有最大值
- (D) 其圖形對稱於 y 軸
- (E) 與直線 $y + 1 = 0$ 之交點有無限多個

14 設函數 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形往右平移 h 單位後得到。選出所有 h 可能的值。

- (A) $-\frac{\pi}{4}$
- (B) $\frac{\pi}{4}$
- (C) $\frac{9\pi}{4}$
- (D) $-\frac{7\pi}{4}$



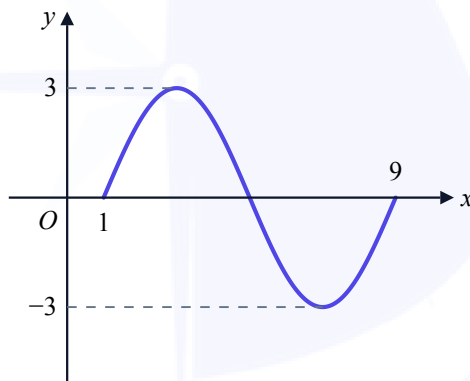
15 試問 $y = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ 的圖形如何由 $y = \sin x$ 的圖形平移得到？選出所有正確的選項。

- (A) 往左平移 $\frac{3\pi}{4}$ 單位
- (B) 往右平移 $\frac{3\pi}{4}$ 單位
- (C) 往左平移 $\frac{5\pi}{4}$ 單位
- (D) 往右平移 $\frac{5\pi}{4}$ 單位

四、填充題（每格 4 分）（本頁第 16～23 題依序為原卷答案格 A～H）

16 已知 $y = 4\cos^2 x + 4\sin x + 3$ ，且 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ ，則 y 值的範圍為 _____。

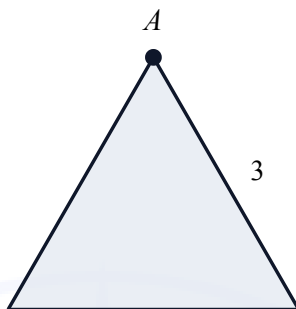
17 圖是函數 $y = a\sin(bx + c)$ ($a > 0, b > 0, |c| < \pi$) 在一個週期內的圖形，求 $a + b + c =$ _____。



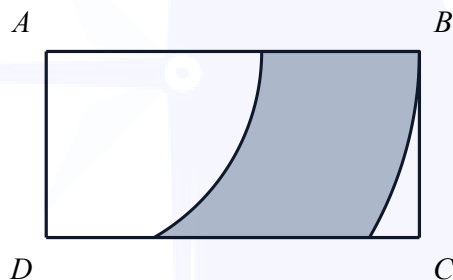
18 $f(x) = \sin(1 + \pi x)$ ，則 $f(x)$ 的週期為 _____。



- 19 一隻牛被拴在底座為 3 公尺的正三角形建築物上，且繩子綁在 A 點處，若此繩長為 4 公尺，則此牛在建築物外可活動範圍的面積為 ____ 平方公尺。



- 20 圖中， $\overline{AB} = 4\sqrt{3}$ ， $\overline{AD} = 2\sqrt{3}$ ，在矩形 $ABCD$ 中，以 A 為圓心，4 及 $4\sqrt{3}$ 為半徑作兩弧，則圖中鋪色部分的面積為 ____。



- 21 小夫家養了一隻貓咪，根據動物醫學中心研究發現，貓咪的體能模式為 $P = 40 \sin \omega t + 60$ ，常數 $\omega > 0$ ， $P\%$ 表能量的百分比， t 表示出生後的天數（ t 是正整數），如果小貓的體能週期是 40 天，則在一個週期中，最多有 ____ 天能量的百分比 $> 80\%$ 。

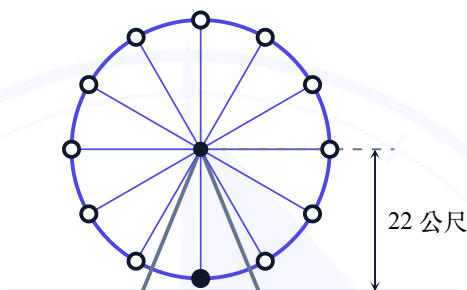
- 22 試問 12 弦是第 ____ 象限角。

- 23 設 θ 是 12 弦的同界角，且 $0 \leq \theta < 2\pi$ ，問： θ 為 ____ 弦。

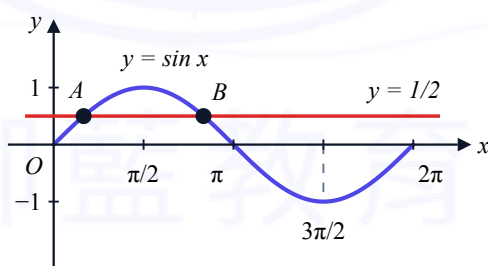


五、計算題（每題 4 分，請寫出計算過程才予以計分）（本頁第 24、25 題依序為原卷計算第 1、2 題）

- 24 遊樂區中有一圓形摩天輪，中心軸高 22 公尺，直徑 40 公尺，逆時針方向運轉一圈需時 15 分鐘。當摩天輪開始運轉時，阿美恰坐在離地最近的位置上， x 分鐘後，阿美離地的高度可表為 $y = a \sin\left(bx - \frac{\pi}{2}\right) + c$ ， $a > 0$ 且 $b > 0$ 。求實數數對 (a, b, c) 的值。



- 25 如圖所示，直線 $y = \frac{1}{2}$ 與 $y = \sin x$ 的圖形在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的範圍內有 A, B 兩個交點。在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 中，試求不等式 $\sin x \leq \frac{1}{2}$ 的解。





御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版 (答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章) : royalblue-education.com/school-exams/akhs-114a-g11b-1

答案一覽

是非題：1 = 正確、2 = 錯誤

1 1	2 1	3 1	4 1	5 2
--------	--------	--------	--------	--------

第 6 題 (A)

第 7 題 (B)

第 8 題 (C)

第 9 題 (A)

第 10 題 (D)

第 11 題 (A)(D)(E)

第 12 題 (A)(C)(D)(E)

第 13 題 (A)(C)(E)

第 14 題 (B)(C)(D)

第 15 題 (A)(D)

第 16 題 $7 \leq y \leq 5 + 2\sqrt{2}$

第 17 題 3

第 18 題 2

第 19 題 14π

第 20 題 $4\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$

第 21 題 13

第 22 題 四

第 23 題 $12 - 2\pi$

第 24 題 $(a, b, c) = \left(20, \frac{2\pi}{15}, 22\right)$

第 25 題 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$



對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)

是非 1~5：弧度的定義、同界角、正弦函數的圖形

- 1 **1** 弧長 s 、半徑 r 、圓心角 θ (徑) 的關係是 $s = r\theta$ 。 $3 = 1 \times \theta$ ，所以 $\theta = 3$ 徑。
徑就是「弧長是半徑的幾倍」。3 徑約 172° ，比半圓的 $\pi \approx 3.14$ 徑略小，是合理的扇形。
- 2 **1** 兩個角相差 2π 的整數倍時，終邊相同，互為同界角。 $\pi - (-\pi) = 2\pi$ ，所以 π 與 $-\pi$ 互為同界角。
兩個角的終邊都落在 x 軸的負向：一個逆時針轉半圈，一個順時針轉半圈。
- 3 **1** 設 $f(x) = 2\sin 3x$ 。 $f(-x) = 2\sin(-3x) = -2\sin 3x = -f(x)$ ，所以點 (x, y) 在圖形上時，點 $(-x, -y)$ 也在圖形上，圖形對稱於原點。
 $y = \sin x$ 的圖形對稱於原點；以原點為中心做左右壓縮、上下伸長，不會改變這個對稱性。
- 4 **1** $y = 2\sin 3x$ 的值在 -2 與 2 之間來回，1 介於其間，所以每一個週期 (長 $\frac{2\pi}{3}$) 裡圖形都會穿過直線 $y = 1$ 兩次。 x 是所有實數，週期有無限多個，交點也就有無限多個。
例如 $3x = \frac{\pi}{6}$ ，即 $x = \frac{\pi}{18}$ 就是一個交點；再加上週期 $\frac{2\pi}{3}$ 的整數倍都是交點。
- 5 **2** $y = \sin bx$ ($b > 0$) 的週期是 $\frac{2\pi}{b}$ 。 $b = 2$ ，週期 $= \frac{2\pi}{2} = \pi$ ，不是 4π 。
 x 的係數變大，圖形左右壓縮，週期變短；週期 4π 的是 $y = \sin \frac{x}{2}$ 。

$y = a \sin bx$ ：值的範圍是 $-|a|$ 到 $|a|$ ，週期是 $\frac{2\pi}{|b|}$ 。

單選 6~8 (原卷單選 1~3)：弧度角落在第幾象限

- 6 答案 (A)。繩子貼著輪緣繞，繞過的弧長就是繩長 100 公分。由 $s = r\theta$ ： $100 = 5\theta$ ， $\theta = 20$ 徑，也就是 B 點是由 A 點 (在 x 軸正向上) 逆時針轉 20 徑的位置。一圈是 $2\pi \approx 6.28$ 徑，三圈是 $6\pi \approx 18.85$ 徑， $20 - 6\pi \approx 1.15$ 徑。因為 $0 < 1.15 < \frac{\pi}{2} \approx 1.57$ ，所以 B 點在第一象限。
採用的讀法：繩子全部貼著輪緣纏繞， B 點在輪緣上，以 O 為原點、 A 在 x 軸正向。本卷來源無參考答案，以校方答案為準。
- 7 答案 (B)。 $\frac{55\pi}{12} = 4\pi + \frac{7\pi}{12}$ ， $\frac{59\pi}{12} = 4\pi + \frac{11\pi}{12}$ 。減去 4π (兩圈) 後， θ 的同界角介於 $\frac{7\pi}{12}$ 與 $\frac{11\pi}{12}$ 之間。而 $\frac{\pi}{2} = \frac{6\pi}{12} < \frac{7\pi}{12}$ 、 $\frac{11\pi}{12} < \pi = \frac{12\pi}{12}$ ，整段都在 $\frac{\pi}{2}$ 與 π 之間，所以 θ 是第二象限角。
把分母統一成 12 再比： $4\pi = \frac{48\pi}{12}$ ， $55 - 48 = 7$ ， $59 - 48 = 11$ 。



- 8 答案 (C)。這裡的 10 是 10 徑。 $10 - 2\pi \approx 10 - 6.28 = 3.72$ ，與 10 徑是同界角。 $\pi \approx 3.14 < 3.72 < \frac{3\pi}{2} \approx 4.71$ ，所以 10 徑是第三象限角， $\cos 10 < 0$ 且 $\sin 10 < 0$ ，點 P 在第三象限。
沒有寫度的記號就是徑。若當成 10° 會誤判成第一象限。

弧度角先減去 2π 的整數倍，再用 $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ 、 $\pi \approx 3.14$ 、 $\frac{3\pi}{2} \approx 4.71$ 判斷落在哪一個象限。

單選 9、10 (原卷單選 4、5)：正弦值比大小、圖形的平移

- 9 答案 (A)。都換成銳角的正弦值： $a = \sin 110^\circ = \sin(180^\circ - 110^\circ) = \sin 70^\circ$ ； $b = \sin 170^\circ = \sin 10^\circ$ ； $c = \sin 230^\circ = \sin(180^\circ + 50^\circ) = -\sin 50^\circ < 0$ 。銳角愈大正弦值愈大，所以 $\sin 70^\circ > \sin 10^\circ > 0 > c$ ，即 $a > b > c$ 。

230° 是第三象限角，正弦值為負，三個數裡它最小。

- 10 答案 (D)。向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位是把 x 換成 $x - \frac{\pi}{4}$ ，得 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ；再向上平移 2 單位是整個函數值加 2，得 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$ 。

可以用一個點檢查： $y = \sin x$ 上的原點 $(0, 0)$ 平移後到 $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ ，代入 (D)： $\sin 0 + 2 = 2$ ，符合。向右平移時括號內是減；(E) 的 2 乘在前面是把振幅放大，不是向上平移。

左右平移改的是 x (向右 h 單位就把 x 換成 $x - h$)，上下平移改的是整個函數值。

多選 11~13 (原卷多選 1~3)： $\sin 3$ 與 $\cos 3$ 的估計、正弦函數的性質

- 11 答案 (A)(D)(E)。 $\frac{5\pi}{6} \approx 2.62 < 3 < \pi \approx 3.14$ ，所以 3 徑是第二象限角，而且很接近 π 。在第二象限，角愈大正弦值愈小、餘弦值也愈小，所以 $0 = \sin \pi < \sin 3 < \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ， $-1 = \cos \pi < \cos 3 < \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。(A) 對： $\sin 3 > 0$ 。(B) 錯： $\cos 3 < 0$ 。(C) 錯： $\sin 3 < \frac{1}{2}$ 。(D) 對： $|\cos 3| > \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}$ 。(E) 對： $|\sin 3| < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < |\cos 3|$ 。

實際數值 $\sin 3 \approx 0.141$ 、 $\cos 3 \approx -0.990$ 。不必算出數值，只要把 3 夾在 $\frac{5\pi}{6}$ 與 π 之間就夠判斷。

- 12 答案 (A)(C)(D)(E)。(A) 對： $-1 \leq \sin 3x \leq 1$ ，乘以 2 得 $-2 \leq f(x) \leq 2$ 。(B) 錯： $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{3\pi}{2} = -2$ ，是最小值。(C) 對： $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$ 是最大值，正弦型圖形對稱於通過最高點 (或最低點) 的鉛直線，所以對稱於直線 $x = \frac{\pi}{6}$ 。(D) 對：週期 $= \frac{2\pi}{3}$ 。(E) 對： $f(3) = 2 \sin 9$ ， $9 - 2\pi \approx 2.72$ ，而 $\frac{\pi}{2} \approx 1.57 < 2.72 < \pi \approx 3.14$ ，9 徑是第二象限角， $\sin 9 > 0$ 。

判斷是否對稱於某條鉛直線 $x = k$ ，只要看 $f(k)$ 是不是最大值或最小值。(B) 的 $x = \frac{\pi}{2}$ 也是對稱軸，但那裡是最低點。



- 13 答案 (A)(C)(E)。(A) 對： x 的係數是 2，週期 $= \frac{2\pi}{2} = \pi$ 。(B) 錯： $-2 \leq 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 2$ ，再加 1，得 $-1 \leq f(x) \leq 3$ 。(C) 對： $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2 \sin \frac{\pi}{2} + 1 = 3$ ，是最大值。(D) 錯： $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3$ ，但 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + 1 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$ ，兩者不相等，圖形不對稱於 y 軸。(E) 對： $y + 1 = 0$ 即 $y = -1$ ，正好是 $f(x)$ 的最小值；每一個週期圖形的最低點都碰到這條直線一次， x 是所有實數，所以交點有無限多個。

(B) 是把向上平移的 +1 漏掉了。(E) 的直線與圖形相切於每個最低點（例如 $x = -\frac{\pi}{6}$ ），每個週期一個交點。

$y = a \sin(bx + c) + d$ ($a > 0$)：範圍是 $d - a$ 到 $d + a$ ，週期是 $\frac{2\pi}{|b|}$ ，對稱軸通過最高點或最低點。

多選 14、15（原卷多選 4、5）：平移量相差一個週期的整數倍

- 14 答案 (B)(C)(D)。 $y = \sin x$ 的圖形往右平移 h 單位得到 $y = \sin(x - h)$ 。要與 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 是同一個圖形， h 與 $\frac{\pi}{4}$ 必須相差週期 2π 的整數倍： $h = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ (k 為整數)。 $k = 0$ 得 $\frac{\pi}{4}$ ，(B) 對； $k = 1$ 得 $\frac{9\pi}{4}$ ，(C) 對； $k = -1$ 得 $-\frac{7\pi}{4}$ ，(D) 對。(A) 錯： $h = -\frac{\pi}{4}$ 得到 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，例如 $x = \frac{\pi}{4}$ 時它的值是 1，而 $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ ，圖形不同。

採用的讀法： h 為負時，「往右平移 h 單位」表示往左平移 $|h|$ 單位（選項裡有兩個負數，題目是把 h 當成可正可負的平移量）。(D) 就是往左平移 $\frac{7\pi}{4}$ ： $\sin\left(x + \frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 。若只接受正的 h ，答案會是 (B)(C)。本卷來源無參考答案，以校方答案為準。

- 15 答案 (A)(D)。(A) 對：往左平移 $\frac{3\pi}{4}$ 單位是把 x 換成 $x + \frac{3\pi}{4}$ ，得到 $y = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ 。(D) 對：往右平移 $\frac{5\pi}{4}$ 單位得 $y = \sin\left(x - \frac{5\pi}{4}\right)$ ，而 $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4}$ ，所以 $\sin\left(x - \frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ ，是同一個圖形。(B) 錯：往右平移 $\frac{3\pi}{4}$ 得 $y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ ， $x = 0$ 時是 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，而題目的函數在 $x = 0$ 時是 $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。(C) 錯：往左平移 $\frac{5\pi}{4}$ 得 $y = \sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$ ， $x = 0$ 時是 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，也不同。
往左 $\frac{3\pi}{4}$ 與往右 $\frac{5\pi}{4}$ 合起來剛好是一個週期： $\frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = 2\pi$ 。

$y = \sin x$ 的週期是 2π ：往左平移 d 單位與往右平移 $2\pi - d$ 單位得到同一個圖形。



填充 16~18 (原卷答案格 A~C) : 二次函數求範圍、讀圖、週期

- 16 用 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 把式子都換成 $\sin x$: $y = 4(1 - \sin^2 x) + 4\sin x + 3 = -4\sin^2 x + 4\sin x + 7$ 。
 令 $t = \sin x$, 配方得 $y = -4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 8$ 。再看 t 的範圍 : x 從 $\frac{\pi}{4}$ 到 $\frac{2\pi}{3}$, $\sin x$ 先從 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 上升到 1
 ($x = \frac{\pi}{2}$), 再下降到 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq 1$ 。這一段都在頂點 $t = \frac{1}{2}$ 的右邊, y 隨 t 增加而減少 :
 $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 時 $y = -4 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 7 = 5 + 2\sqrt{2}$ (最大); $t = 1$ 時 $y = -4 + 4 + 7 = 7$ (最小)。所以 $7 \leq y \leq 5 + 2\sqrt{2}$ 。

t 的範圍不能只代兩個端點 : $\frac{\pi}{2}$ 在區間裡面, $\sin x$ 的最大值是 1, 不是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。另外頂點 $t = \frac{1}{2}$ 不在 t 的範圍內, y 取不到 8。

- 17 最高 3、最低 -3, 且 $a > 0$, 所以 $a = 3$ 。圖形是一個完整的週期, 從 $x = 1$ 到 $x = 9$, 週期 = $9 - 1 = 8$; 由 $\frac{2\pi}{b} = 8$ 得 $b = \frac{\pi}{4}$ 。圖形在 $x = 1$ 通過 x 軸並往上升, 這相當於 $y = \sin \theta$ 在 $\theta = 0$ (或再加 2π 的整數倍) 的位置, 所以 $\frac{\pi}{4} \times 1 + c = 2k\pi$, $c = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$; 在 $|c| < \pi$ 的範圍內只有 $c = -\frac{\pi}{4}$ 。
 $a + b + c = 3 + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 3$ 。

也可以看成 $y = 3\sin \frac{\pi}{4}x$ 的圖形往右平移 1 單位 : $y = 3\sin \frac{\pi}{4}(x - 1) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4}\right)$ 。平移量 1 要乘上 b 才是 c 的大小。

- 18 $f(x) = \sin(\pi x + 1)$, x 的係數是 π , 週期 = $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ 。

括號裡的常數 1 只讓圖形左右平移, 不影響週期。驗算 : $f(x + 2) = \sin(\pi x + 2\pi + 1) = \sin(\pi x + 1) = f(x)$ 。

由圖形決定 $y = a\sin(bx + c)$: 最高最低定 a , 一個週期的長度定 b , 圖形通過 x 軸往上升的那一點定 c 。

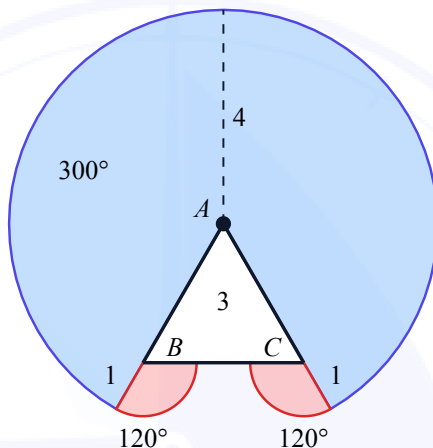
御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



填充 19、20 (原卷答案格 D、E)：拆成扇形與三角形求面積

- 19 把正三角形的另外兩個頂點叫做 B 、 C 。正三角形在 A 點的內角是 60° ，牛不能走進建築物，所以繩子拉直時能掃過的是以 A 為圓心、半徑 4、圓心角 $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ = \frac{5\pi}{3}$ 的扇形，面積 $= \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{5\pi}{3} = \frac{40\pi}{3}$ 。繩長 4 比邊長 3 多 1：繩子貼著 $\overline{AB}$ 到 B 點後還剩 1 公尺，可以繞過 B 再掃出一個以 B 為圓心、半徑 1 的扇形，圓心角是 B 點的外角 $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ ，面積 $= \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ ； C 點那一側相同。總面積 $= \frac{40\pi}{3} + 2 \times \frac{\pi}{3} = 14\pi$ (平方公尺)。



採用的讀法：「底座為 3 公尺的正三角形」指建築物的底面是邊長 3 公尺的正三角形，牛在平地上活動、不能進入建築物。兩個小扇形半徑只有 1，而 B 、 C 相距 3，彼此不重疊。本卷來源無參考答案，以校方答案為準。

- 20 兩段弧都以 A 為圓心，鋪色部分是「矩形內、離 A 的距離在 4 與 $4\sqrt{3}$ 之間」的區域，等於矩形內大弧以內的面積減去小弧以內的面積。大弧（半徑 $4\sqrt{3} = \overline{AB}$ ）從 B 畫到 $\overline{DC}$ 上的 Q 點：直角三角形 ADQ 中 $\overline{AD} = 2\sqrt{3}$ 、 $\overline{AQ} = 4\sqrt{3}$ ， $\overline{DQ} = \sqrt{48 - 12} = 6$ ， $\cos \angle DAQ = \frac{1}{2}$ ， $\angle DAQ = 60^\circ$ ，所以 $\angle BAQ = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ 。大弧以內 = 扇形 ABQ + $\triangle ADQ = \frac{1}{2} \times (4\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6 = 4\pi + 6\sqrt{3}$ 。小弧（半徑 4）從 $\overline{AB}$ 上畫到 $\overline{DC}$ 上的 P 點： $\overline{DP} = \sqrt{16 - 12} = 2$ ， $\cos \angle DAP = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\angle DAP = 30^\circ$ ，所以小弧所對的圓心角是 $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ 。小弧以內 $= \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = \frac{8\pi}{3} + 2\sqrt{3}$ 。鋪色面積 $= (4\pi + 6\sqrt{3}) - \left(\frac{8\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$ 。

兩段弧都沒有畫滿四分之一圓，因為半徑 4 與 $4\sqrt{3}$ 都比 $\overline{AD} = 2\sqrt{3}$ 長，弧會先碰到下邊 $\overline{DC}$ 。所以每一塊都是「扇形加一個直角三角形」，不能只用扇形面積相減。 P 、 Q 是本頁為了說明加上的點名。

以同一點為圓心的區域，先從圓心連到弧的端點，拆成扇形 $\left(\frac{1}{2}r^2\theta\right)$ 與三角形再加減。



填充 21~23 (原卷答案格 F~H)：週期模型、12 徑的象限與同界角

- 21 週期 40 天： $\frac{2\pi}{\omega} = 40$ ， $\omega = \frac{\pi}{20}$ 。 $P > 80$ 即 $40 \sin \frac{\pi t}{20} + 60 > 80$ ， $\sin \frac{\pi t}{20} > \frac{1}{2}$ 。在一個週期內 ($0 < \frac{\pi t}{20} \leq 2\pi$)，正弦值大於 $\frac{1}{2}$ 的角介於 $\frac{\pi}{6}$ 與 $\frac{5\pi}{6}$ 之間： $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi t}{20} < \frac{5\pi}{6}$ ，同乘 $\frac{20}{\pi}$ 得 $\frac{10}{3} < t < \frac{50}{3}$ ，即 $3.33 \dots < t < 16.66 \dots$ 。 t 是正整數， $t = 4, 5, \dots, 16$ ，共 $16 - 4 + 1 = 13$ 天。

採用的讀法： t 只取正整數，一個週期取連續 40 天；因為 40 是整數，不論從哪一天起算，連續 40 天裡都恰有 13 天，所以「最多」也是 13。能量超過 80% 的時間長度是 $\frac{50}{3} - \frac{10}{3} = \frac{40}{3}$ 天 (三分之一個週期)，但問的是整數天數。本卷來源無參考答案，以校方答案為準。

- 22 $12 - 2\pi \approx 12 - 6.28 = 5.72$ ，與 12 徑是同界角。 $\frac{3\pi}{2} \approx 4.71 < 5.72 < 2\pi \approx 6.28$ ，所以 12 徑是第四象限角。

12 徑轉了一圈多、不到兩圈 (兩圈是 $4\pi \approx 12.57$)，只差約 0.57 徑就滿兩圈，所以停在第四象限。

- 23 同界角相差 2π 的整數倍： $\theta = 12 - 2k\pi$ 。 $k = 1$ 時 $\theta = 12 - 2\pi \approx 5.72$ ，在 0 與 $2\pi \approx 6.28$ 之間； $k = 2$ 時 $12 - 4\pi \approx -0.57$ 已經是負的。所以 $\theta = 12 - 2\pi$ 。

答案保留 π ，寫成 $12 - 2\pi$ ，不要寫成近似值 5.72。

週期模型先由週期求出 ω ，再在一個週期內用正弦的圖形解不等式。

計算 24、25 (原卷計算 1、2)：摩天輪的高度模型、用圖形解不等式

- 24 直徑 40 公尺，半徑 20 公尺；中心軸高 22 公尺，所以最高點離地 $22 + 20 = 42$ 公尺，最低點離地 $22 - 20 = 2$ 公尺。 $y = a \sin\left(bx - \frac{\pi}{2}\right) + c$ ($a > 0$) 的最大值是 $c + a$ 、最小值是 $c - a$ ： $c + a = 42$ ， $c - a = 2$ ，解得 $a = 20$ ， $c = 22$ 。轉一圈 15 分鐘，週期 $= \frac{2\pi}{b} = 15$ ， $b = \frac{2\pi}{15}$ 。所以 $(a, b, c) = \left(20, \frac{2\pi}{15}, 22\right)$ 。

檢查起點： $x = 0$ 時 $y = 20 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 22 = -20 + 22 = 2$ ，正是離地最近的位置； $x = 7.5$ (半圈) 時 $y = 20 \sin \frac{\pi}{2} + 22 = 42$ ，在最高點。 a 是半徑、 c 是中心軸的高度；高度只跟轉了多少角度有關，順時針或逆時針不影響。

- 25 先求交點：在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 中， $\sin x = \frac{1}{2}$ 的解是 $x = \frac{\pi}{6}$ 與 $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ，所以 $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$ 、 $B\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$ 。 $\sin x \leq \frac{1}{2}$ 就是 $y = \sin x$ 的圖形在直線 $y = \frac{1}{2}$ 上或直線下方的部分：由圖，從 $x = 0$ 到 A 點，以及從 B 點到 $x = 2\pi$ 。所以解為 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$ 。

不等式含等號，兩個交點 $\frac{\pi}{6}$ 、 $\frac{5\pi}{6}$ 都要取； A 、 B 之間圖形在直線上方，是 $\sin x > \frac{1}{2}$ 的部分。解有兩段，不要漏掉 $x = 0$ 到 $\frac{\pi}{6}$ 那一段。

圓周運動的高度模型：振幅是半徑，中心線是圓心的高度，週期是轉一圈的時間。



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自安康高中 114 學年度上學期高二第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/akhs-114a-g11b-1