

安康高中 114 學年度上學期 高一第一次段考



御藍教育

範圍：數與式（乘法公式、有理數與無理數、雙重根號、絕對值方程式與不等式、指數、常用對數） · 單選題 4 題（20 分）、多選題 2 題（10 分）、填充題 12 格（60 分）、非選擇題 1 題（10 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/akhs-114a-g10-1

一、單選題：每題 5 分，共 20 分。

1 關於乘法公式，請選出正確的選項：

- (A) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3b^3$
- (B) $(a - b)^3 = a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3$
- (C) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + ab + b^2)$
- (D) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- (E) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc$

2 已知 $a = \sqrt{41 - 12\sqrt{5}}$ ，求 a 在哪兩個整數之間？

- (A) 1 與 2 之間
- (B) 2 與 3 之間
- (C) 3 與 4 之間
- (D) 4 與 5 之間
- (E) 5 與 6 之間

3 已知 a, b 為有理數，且 $a - \sqrt{14 + \sqrt{180}} = b\sqrt{9 - \sqrt{80}} + 4$ ，求數對 $(a, b) = ?$

- (A) $(-4, 3)$
- (B) $(8, 7)$
- (C) $(3, -4)$
- (D) $(7, 11)$
- (E) $(9, -1)$

4 $\log 0.01 = ?$

- (A) -2
- (B) -1
- (C) 0
- (D) 1
- (E) 2



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/akhs-114a-g10-1

二、多選題：每題 5 分，答錯 1 個選項得 3 分，答錯 2 個選項得 1 分，其餘不給分，共 10 分。

(本頁第 5~6 題依序為原卷多選第 1~2 題)

5 已知 $9^a = 7$ ，請選出正確選項：

(A) $3^a = \sqrt{7}$

(B) $27^a = 21$

(C) $3^{4a} = 49$

(D) $9^{-a} = -7$

(E) $3^{a+1} - 7 \times 3^{-a} = 2\sqrt{7}$

6 請選出正確的選項：

(A) 若 a, b 皆為無理數，則 $a - b$ 必為無理數。

(B) 若 a 為有理數， b 為無理數，則 ab 必為無理數。

(C) 若 $a, b, a + b$ 皆為無理數，則 $a - b$ 必為無理數。

(D) 若 a 為有理數， b 為無理數，則 $a + b$ 必為無理數。

(E) 若 a, b 為有理數， c 為無理數，則 $a + bc$ 必為無理數。

三、填充題：每格 5 分，全對才給分，共 60 分。(本頁第 7~18 題依序為原卷填充第 1~12 題)

7 請將 $0.\overline{732}$ 化為最簡分數 = ____。

8 已知 $a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}$ ， $b = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{7}}{3}$ ， $c = \frac{\sqrt{3} + 5\sqrt{7}}{6}$ ，則將 a, b, c 三數由小到大排列為 ____。

9 方程式 $|3x + 2| = 7$ 的解為 $x = \underline{\hspace{1cm}}$ 。(有兩解)

10 已知 x, y 均為實數，且 $2 \leq x \leq 5$ ， $-4 \leq y \leq 3$ ，試求 $x - 2y$ 的範圍為 ____。

11 請利用乘法公式，展開： $(a^2 - 4)(a^2 + 2a + 4)(a^2 - 2a + 4) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



12 試求不等式 $5 \leq |2x - 3| < 9$ 的解為 ____。

13 試求方程式 $|x - 1| + |x + 3| = 9$ 之解為 ____。

14 已知 a, b 為實數，且絕對值不等式 $|ax + 3| \geq b$ 的解為 $x \leq -1$ 或 $x \geq 7$ ，則數對 $(a, b) =$ ____。

15 已知 $a = \log 6, b = \log 5$ ，試求 $10^{2a+b-1} =$ ____。

16 已知離地球最近的黑洞是 Gaia BH1，距離地球大約為 1600 光年，且一光年約 9×10^{12} 公里。試問該黑洞與地球的距離約為 ____ 公里？（請將答案取 2 位有效數字，並以科學記號表示。）

17 已知直角三角形的兩股長為 a, b ($a > 0, b > 0$)，斜邊長為 12，求此直角三角形面積最大值 = ____。

18 已知 $2 \approx 10^{0.3010}, 3 \approx 10^{0.4771}$ ，則 12^{20} 乘開後是 ____ 位數。

四、非選擇題：共 10 分。請寫出完整計算過程，否則不給分。（本頁第 19 題為原卷非選擇第 1 題）

19 已知 $a > 0$ ，且 $a + a^{-1} = 3$ ，試求下列各式的值：(1) $a^2 + a^{-2}$ (3 分) (2) $a^3 + a^{-3}$ (3 分) (3) $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$ (4 分)





御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/akhs-114a-g10-1

答案一覽

第 1 題 (D)

第 2 題 (C)

第 3 題 (E)

第 4 題 (A)

第 5 題 (A)(C)(E)

第 6 題 (D)

第 7 題 $\frac{145}{198}$

第 8 題 $b < a < c$

第 9 題 $\frac{5}{3}$ 或 -3

第 10 題 $-4 \leq x - 2y \leq 13$

第 11 題 $a^6 - 64$

第 12 題 $-3 < x \leq -1$ 或 $4 \leq x < 6$

第 13 題 $x = \frac{7}{2}$ 或 $x = -\frac{11}{2}$

第 14 題 $(-1, 4)$

第 15 題 18

第 16 題 1.4×10^{16}

第 17 題 36

第 18 題 22

第 19 題 (1) 7 ; (2) 18 ; (3) $\sqrt{5}$

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit (可以先把姓名、座號遮掉)



單選 1~4：乘法公式、雙重根號、常用對數

- 1 答案 (D)。逐一與公式比對：(A) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ，最後一項是 b^3 ，不是 $3b^3$ 。(B) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ，中間兩項的係數是 3，不是 2。(C) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ ，括號裡中間是 $-ab$ 。(D) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ ，正確。(E) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ ，少了 $2ca$ 。

拿不準時代數字檢查：取 $a=2, b=1$ ，(C) 左邊 9、右邊 $3 \times 7 = 21$ ，不相等；(D) 左邊 7、右邊 $1 \times 7 = 7$ ，相等。

- 2 答案 (C)。先把裡面的根號前面湊成 2： $12\sqrt{5} = 2\sqrt{36 \times 5} = 2\sqrt{180}$ 。找兩個數相加為 41、相乘為 180：36 與 5。所以 $41 - 12\sqrt{5} = (\sqrt{36} - \sqrt{5})^2 = (6 - \sqrt{5})^2$ ，而 $6 > \sqrt{5}$ ， $a = 6 - \sqrt{5}$ 。因為 $2 < \sqrt{5} < 3$ ，所以 $3 < 6 - \sqrt{5} < 4$ ， a 在 3 與 4 之間。

$\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $a \approx 3.764$ 。也可以直接估： $12\sqrt{5} \approx 26.83$ ， $41 - 26.83 = 14.17$ ，介於 $3^2 = 9$ 與 $4^2 = 16$ 之間。

- 3 答案 (E)。化簡兩個雙重根號。 $\sqrt{180} = 2\sqrt{45}$ ，相加為 14、相乘為 45 的兩數是 9 與 5，所以 $\sqrt{14 + \sqrt{180}} = \sqrt{9} + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$ 。 $\sqrt{80} = 2\sqrt{20}$ ，相加為 9、相乘為 20 的兩數是 5 與 4，所以 $\sqrt{9 - \sqrt{80}} = \sqrt{5} - \sqrt{4} = \sqrt{5} - 2$ 。代入原式： $a - 3 - \sqrt{5} = b(\sqrt{5} - 2) + 4$ ，整理成 $(a + 2b - 7) = (b + 1)\sqrt{5}$ 。左邊是有理數；若 $b + 1 \neq 0$ ，右邊是無理數，不可能相等。所以 $b = -1$ ，再由 $a + 2b - 7 = 0$ 得 $a = 9$ 。 $(a, b) = (9, -1)$ 。

相減的雙重根號要寫成「大的減小的」： $\sqrt{5} - 2$ 是正的，不可以寫成 $2 - \sqrt{5}$ 。

- 4 答案 (A)。 $\log 0.01$ 是問「10 的幾次方等於 0.01」。 $0.01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$ ，所以 $\log 0.01 = -2$ 。

雙重根號先把裡面的根號前面湊成 2，再找相加、相乘的兩個數；相減時大的寫前面。

多選 5~6 (原卷多選 1~2)：指數律、有理數與無理數

- 5 答案 (A)(C)(E)。 $9^a = (3^a)^2 = 7$ ，而 $3^a > 0$ ，所以 $3^a = \sqrt{7}$ 。(A) 正確。(B) $27^a = (3^a)^3 = (\sqrt{7})^3 = 7\sqrt{7}$ ，不是 21。(C) $3^{4a} = (9^a)^2 = 7^2 = 49$ ，正確。(D) $9^{-a} = \frac{1}{9^a} = \frac{1}{7}$ ，不是 -7 。(E) $3^{a+1} = 3 \cdot 3^a = 3\sqrt{7}$ ， $7 \times 3^{-a} = \frac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}$ ，相減得 $2\sqrt{7}$ ，正確。

(B) $7\sqrt{7} \approx 18.52$ 。(D) 正數的任何次方都是正的，不可能等於 -7 ；負指數是取倒數，不是加負號。

- 6 答案 (D)。(A) 反例： $a = b = \sqrt{2}$ ， $a - b = 0$ 是有理數。(B) 反例： $a = 0$ ， $ab = 0$ 是有理數。(C) 反例： $a = \sqrt{2}$ ， $b = 1 + \sqrt{2}$ ， $a + b = 1 + 2\sqrt{2}$ 是無理數，但 $a - b = -1$ 是有理數。(D) 正確：若 $a + b$ 是有理數，則 $b = (a + b) - a$ 是兩個有理數相減，也是有理數，與 b 是無理數矛盾，所以 $a + b$ 必為無理數。(E) 反例： $b = 0$ ， $a + bc = a$ 是有理數。

(B) 與 (E) 只差在有理數能不能是 0：加上「不為 0 的有理數」的條件後，乘以無理數才必為無理數。

「必為無理數」的敘述先試 0 與兩個相同的無理數；有理數加無理數一定是無理數。



填充 7~12 (原卷填充 1~6) : 循環小數、比大小、絕對值、乘法公式

- 7 設 $x = 0.\overline{732} = 0.7323232\cdots$ 。 $10x = 7.323232\cdots$ ， $1000x = 732.323232\cdots$ ，兩式相減： $990x = 725$ ， $x = \frac{725}{990} = \frac{145}{198}$ 。 $145 = 5 \times 29$ ， $198 = 2 \times 3^2 \times 11$ ，沒有公因數，已是最簡分數。

原卷的循環線只蓋住 3 與 2，7 不循環，所以循環節是 32。驗算： $145 \div 198 = 0.7323232\cdots$ 。

- 8 通分成分母 6： $a = \frac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{7}}{6}$ ， $b = \frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{7}}{6}$ ， $c = \frac{\sqrt{3} + 5\sqrt{7}}{6}$ 。 $a - b = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{6} > 0$ ，所以 $b < a$ ； $c - a = \frac{2\sqrt{7} - 2\sqrt{3}}{6} > 0$ ，所以 $a < c$ 。由小到大為 $b < a < c$ 。

三個數的分子係數和都等於分母，可以看成數線上 $\sqrt{3}$ 與 $\sqrt{7}$ 之間的分點： $\sqrt{7}$ 所占的比例依序是 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{5}{6}$ ，比例愈大愈靠近 $\sqrt{7}$ ，所以 $b < a < c$ 。數值約為 $b \approx 2.037$ 、 $a \approx 2.189$ 、 $c \approx 2.493$ 。

- 9 $|3x + 2| = 7$ 表示 $3x + 2 = 7$ 或 $3x + 2 = -7$ 。前者 $x = \frac{5}{3}$ ；後者 $3x = -9$ ， $x = -3$ 。

- 10 先求 $-2y$ 的範圍： $-4 \leq y \leq 3$ 各邊乘以 -2 ，不等號方向要反過來，得 $-6 \leq -2y \leq 8$ 。再與 $2 \leq x \leq 5$ 同向相加： $2 + (-6) \leq x - 2y \leq 5 + 8$ ，即 $-4 \leq x - 2y \leq 13$ 。

兩端都取得到： $x = 2, y = 3$ 時為 -4 ； $x = 5, y = -4$ 時為 13 。不等式只能同向相加，不能直接相減，所以先把 $-2y$ 的範圍算出來。

- 11 $a^2 - 4 = (a - 2)(a + 2)$ 。重新配對： $(a - 2)(a^2 + 2a + 4) = a^3 - 8$ (立方差)， $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) = a^3 + 8$ (立方和)。所以原式 $= (a^3 - 8)(a^3 + 8) = (a^3)^2 - 8^2 = a^6 - 64$ 。

代 $a = 1$ 檢查：原式 $= (-3)(7)(3) = -63$ ， $a^6 - 64 = -63$ ，相符。

- 12 分成兩種情形。 $2x - 3 \geq 0$ 時： $5 \leq 2x - 3 < 9$ ， $8 \leq 2x < 12$ ， $4 \leq x < 6$ 。 $2x - 3 < 0$ 時： $5 \leq -(2x - 3) < 9$ ，即 $-9 < 2x - 3 \leq -5$ ， $-6 < 2x \leq -2$ ， $-3 < x \leq -1$ 。所以解為 $-3 < x \leq -1$ 或 $4 \leq x < 6$ 。

也可以看成距離： $|2x - 3| = 2 \left| x - \frac{3}{2} \right|$ ，條件是 x 到 $\frac{3}{2}$ 的距離大於或等於 $\frac{5}{2}$ 、小於 $\frac{9}{2}$ 。等號在靠近 $\frac{3}{2}$ 的那一端 (-1 與 4)，遠的那一端 (-3 與 6) 不含。

不等式乘以負數要變號；絕對值不等式的等號要跟著哪一端一起帶到最後。

填充 13~18 (原卷填充 7~12) : 絕對值、對數、科學記號、算幾不等式

- 13 $|x - 1| + |x + 3|$ 是數線上 x 到 1 與到 -3 的距離和。 x 在 -3 與 1 之間時距離和固定是 4，不可能是 9，所以 x 在外側。 $x > 1$ 時： $(x - 1) + (x + 3) = 9$ ， $2x = 7$ ， $x = \frac{7}{2}$ 。 $x < -3$ 時： $-(x - 1) - (x + 3) = 9$ ， $-2x = 11$ ， $x = -\frac{11}{2}$ 。

兩個解到中點 -1 的距離都是 $\frac{9}{2}$ ，左右對稱：多出來的 $9 - 4 = 5$ 平分到兩側，各往外 $\frac{5}{2}$ 。



- 14 解的形式「 $x \leq -1$ 或 $x \geq 7$ 」是到某一點的距離大於或等於某個正數：中點為 $\frac{-1+7}{2} = 3$ ，半徑為 4，即 $|x-3| \geq 4$ 。另一方面， $a \neq 0$ 時 $|ax+3| = |a| \left| x + \frac{3}{a} \right|$ ，原不等式是 $\left| x + \frac{3}{a} \right| \geq \frac{b}{|a|}$ 。比較得 $-\frac{3}{a} = 3, a = -1; \frac{b}{|a|} = 4, b = 4 \circ (a, b) = (-1, 4) \circ$

驗算： $|-x+3| \geq 4$ 就是 $|x-3| \geq 4$ ，解為 $x \leq -1$ 或 $x \geq 7$ 。也可以把兩個端點代入等號： $|-a+3| = b$ 且 $|7a+3| = b$ ，解出 $a = -1$ ($a = 0$ 時左邊是常數，解不會是這個形式)。

- 15 $a = \log 6$ 表示 $10^a = 6, b = \log 5$ 表示 $10^b = 5$ 。由指數律， $10^{2a+b-1} = \frac{(10^a)^2 \times 10^b}{10^1} = \frac{36 \times 5}{10} = 18$ 。

- 16 距離 $= 1600 \times 9 \times 10^{12} = 14400 \times 10^{12} = 1.44 \times 10^4 \times 10^{12} = 1.44 \times 10^{16}$ 公里。取 2 位有效數字，第三位 4 捨去，約為 1.4×10^{16} 公里。

科學記號的寫法是 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq a < 10$ ，所以不寫成 14×10^{15} 。

- 17 由畢氏定理， $a^2 + b^2 = 12^2 = 144$ ；面積為 $\frac{1}{2}ab$ 。對正數 a^2, b^2 用算幾不等式： $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2} = ab$ ，所以 $ab \leq 72$ ，面積 $\frac{1}{2}ab \leq 36$ 。等號在 $a^2 = b^2$ ，即 $a = b = 6\sqrt{2}$ 時成立，所以面積最大值為 36。

不用算幾不等式也可以： $(a-b)^2 \geq 0$ 展開得 $2ab \leq a^2 + b^2 = 144$ ，結果相同。求極值時要檢查等號取得到，這裡是等腰直角三角形。

- 18 $12 = 2^2 \times 3 \approx 10^{0.3010 \times 2 + 0.4771} = 10^{1.0791}$ ，所以 $12^{20} \approx 10^{1.0791 \times 20} = 10^{21.582}$ 。因為 $10^{21} \leq 12^{20} < 10^{22}$ ，而 10^{21} 是最小的 22 位數，所以 12^{20} 是 22 位數。

指數的整數部分是 21，位數要加 1。實際上 $12^{20} = 3833759992447475122176$ ，共 22 位。

兩個絕對值相加看成數線上的距離和；10 的 n 點多次方是 n 加 1 位數。

非選擇 19 (原卷非選擇 1)：指數的對稱式求值

- 19 (1) 把 $a + a^{-1} = 3$ 兩邊平方： $a^2 + 2 \cdot a \cdot a^{-1} + a^{-2} = 9$ ，其中 $a \cdot a^{-1} = 1$ ，所以 $a^2 + a^{-2} = 9 - 2 = 7$ 。(2) 用立方和公式： $a^3 + a^{-3} = (a + a^{-1})(a^2 - a \cdot a^{-1} + a^{-2}) = 3 \times (7 - 1) = 18$ 。(3) 設 $t = a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$ ，平方得 $t^2 = a + 2 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} + a^{-1} = 3 + 2 = 5$ 。因為 $a > 0$ ， $a^{\frac{1}{2}}$ 與 $a^{-\frac{1}{2}}$ 都是正數， $t > 0$ ，所以 $t = \sqrt{5}$ 。
- (2) 也可以用 $(a + a^{-1})^3 = a^3 + a^{-3} + 3(a + a^{-1})$ ： $27 = a^3 + a^{-3} + 9$ ，同樣得 18。(3) 開根號後要說明取正的理由，答案不寫 $\pm\sqrt{5}$ 。

a 與它的倒數相乘是 1，所以平方、立方之後中間項都是常數；開根號前先判斷正負。



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自安康高中 114 學年度上學期高一第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/akhs-114a-g10-1