

政大附中 114 學年度上學期 高一第一次段考



御藍教育

範圍：數與式（實數、絕對值、指數、常用對數） · 單選題 4 題（20 分）、多選題 3 題（24 分）、填充題 10 題（50 分）、計算題 1 題（6 分）

班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____ 得分 _____

網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/ahsnccu-114a-g10-1

一、單選題（占 20 分）說明：第 1 題至第 4 題，每題 5 分。

1 設 $a = \sqrt[3]{9}$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{5}{6}}$, $c = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}$, 則 a 、 b 、 c 大小順序為何？

- (1) $a > b > c$
- (2) $c > b > a$
- (3) $c > a > b$
- (4) $b > a > c$
- (5) $b > c > a$

2 已知一不等式的解如圖塗色區域（含端點），試問下列哪一個選項為該不等式？

- (1) $|x - 3| < 2$
- (2) $|x - 3| > 2$
- (3) $|x - 3| \geq 2$
- (4) $|x - 3| \leq 2$
- (5) $|x - 3| > 3$



3 設 x 、 y 、 z 均為正整數，且 $6^x \times 8^y \times 9^z = 2^8 \times 3^7$ ，則 $x + 2y + z$ 的值為何？

- (1) 5
- (2) 6
- (3) 7
- (4) 8
- (5) 9



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/ahsnccu-114a-g10-1

4 設 p 、 q 、 x 、 y 為正實數，滿足 $px + qy = 50$ ，與 $xy = 23$ ，請問數對 (p, q) 可能是下列哪一個選項？

- (1) (3, 7)
- (2) (4, 7)
- (3) (5, 7)
- (4) (6, 7)
- (5) (7, 7)

二、多選題（占 24 分）說明：第 5 題至第 7 題，每題 8 分。（8-5-2-0）

5 若 $-2 < \log a < -1$ ，則下列哪些可能為 a 之值？

- (1) 0.1
- (2) 0.2
- (3) 0.03
- (4) 0.04
- (5) 0.09

6 若 $\sqrt{15} + \sqrt{176}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b 。請選出正確的選項。

- (1) $a = 2$
- (2) $b = -3 + \sqrt{11}$
- (3) $ab = -6 + 2\sqrt{11}$
- (4) $\frac{1}{b} = \frac{\sqrt{11}}{11}$
- (5) $\frac{2a - b - 3}{a + b - 2} = \frac{-11 + 10\sqrt{11}}{11}$

7 請問下列哪些敘述是正確？

- (1) $1.9 < 1.\overline{9} < 2$
- (2) 給定長度為 1 的線段，可用作圖做出長度為 $\sqrt{7}$ 的線段
- (3) 循環小數 $2.\overline{34}$ 無法用尺規在數線上精準作圖
- (4) 兩個相異無理數之間，有無限多個有理數和無限多個無理數
- (5) 若 a 為有理數， b 為無理數，則 $a + b$ 必為無理數

三、填充題（占 50 分）說明：第 8 題至第 17 題，每題 5 分。

8 化成最簡分數： $3.\overline{25} + 4.\overline{3} - 11 \times (0.\overline{27}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



9 滿足絕對值不等式 $|ax + 4| \leq b$ 的解為 $2 \leq x \leq 14$ ，則 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10 已知 $\log a = -4.321$ ， $\log b = -7.89$ ， $\log c = -13.711$ ，則 $\frac{ab}{c} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11 數線上 A 點代表 10^7 ， B 點代表 10^9 ， P 點在 $\overline{AB}$ 上且 $3\overline{PA} = 2\overline{PB}$ 。若 P 點在數線上代表的數以科學記號表示為 $k \times 10^n$ ，則數對 $(k, n) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12 設 a 、 b 為正實數，滿足 $ab = 50$ ，請問 $3a + 2b$ 的最小整數值為何？

13 試解不等式 $2|x + 1| - |2x - 3| > x + 2$ 得 x 的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

14 設 $\frac{3^{3x} - 3^{-3x}}{3^x - 3^{-x}} = \frac{13}{3}$ ，試求 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15 已知有理數 x, y 滿足 $x + y\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = x\sqrt{34 + 3\sqrt{128}} + 15$ ，則 $x^2 + y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

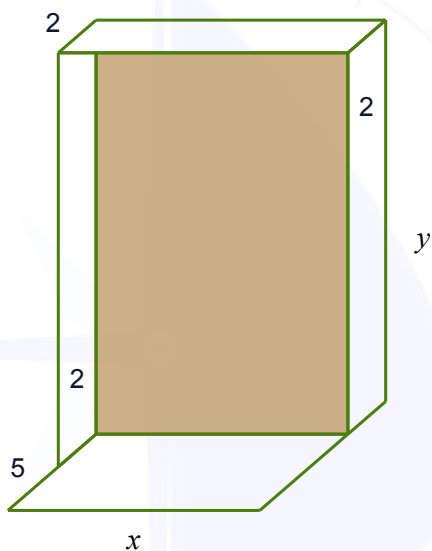
16 某種傳染病的感染率定義為：感染率 $y = \frac{1}{1 + a \times 7^{-bt}}$ ，其中 t 表時間（週）， a, b 為常數。若此種傳染病在某城市蔓延，已知剛開始（即 $t = 0$ ）時，有 2% 的人口被傳染；而經過 3 週後（即 $t = 3$ ）有 12.5% 的人口被傳染。則 $\underline{\hspace{2cm}}$ 週後，該城市的人口被傳染過該傳染病的比例達 87.5%。

17 設 $\log(\log A) = 4$ ，則 A 為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 位數。



四、計算題（占 6 分）說明：第 18 題，每個答案 2 分。

- 18 工匠接受委託，要製作一個掛在牆壁上的長方形公佈欄，用木板裁切，外圍用四片鋁片包框。買主未限制左右的寬度與上下的高度，只要求公佈欄的面積為 700 平方呎，且公佈欄下緣要置物，故下緣鋁片的寬度設計為 5 吋，左、右及上緣鋁片的寬度設計為 2 吋，如圖。因鋁片價格昂貴，故工匠希望裁切的鋁片面積愈少愈好，以降低製作成本，請問他應該如何設計這個公佈欄的寬度（ x 吋）與高度（ y 吋），才能使裁切的鋁片有最小面積？此最小面積為何？



御藍教育

ROYAL BLUE · EDUCATION



網頁版（答案、詳解、勾錯題號看錯在哪幾章）：royalblue-education.com/school-exams/ahsnccu-114a-g10-1

答案一覽

- 第 1 題 (5)
第 2 題 (3)
第 3 題 (4)
第 4 題 (1)
第 5 題 (3)(4)(5)
第 6 題 (2)(5)
第 7 題 (2)(4)(5)
第 8 題 $\frac{413}{90}$
第 9 題 $\frac{5}{2}$
第 10 題 $10\sqrt{10}$
第 11 題 (4.06, 8)
第 12 題 35
第 13 題 $x < -7$ 或 $1 < x < 3$
第 14 題 $\pm\frac{1}{2}$
第 15 題 13
第 16 題 9
第 17 題 10001
第 18 題 $x = 20$, $y = 35$ ；最小面積 280 平方吋

對完答案之後



1. 把錯的題號圈起來。
2. 掃左邊的 QR code，在網頁上勾你錯的題號，馬上看到錯在哪幾章。(不用註冊)
3. 下次段考前，註冊後在首頁填上段考日期和範圍，可以自己產生一份考前藍圖 PDF：一份模擬卷、詳解，還有考前每天練哪一章。
4. 你們學校今年的卷也想要詳解？考完把題目頁拍照上傳，收到會盡快做好放上來：royalblue-education.com/school-exams/submit（可以先把姓名、座號遮掉）



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/ahsnccu-114a-g10-1

單選 1~4：指數比大小、絕對值不等式、指數律與算幾不等式

- 1 答案 (5)。全部化成 3 的次方： $a = \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$ ； $b = (3^{-1})^{-\frac{5}{6}} = 3^{\frac{5}{6}}$ ； $c = \left((3^{-1})^{-3}\right)^{\frac{1}{4}} = (3^3)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4}}$ 。
通分比指數： $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ 、 $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$ 、 $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ 。底數 $3 > 1$ ，指數越大值越大，所以 $b > c > a$ 。
 $\frac{1}{3} = 3^{-1}$ ，負指數再取負次方會變成正的。
- 2 答案 (3)。塗色區域是 $x \leq 1$ 或 $x \geq 5$ 。1 和 5 的中點是 3，兩個端點到 3 的距離都是 2，所以解是「 x 到 3 的距離大於或等於 2」，也就是 $|x - 3| \geq 2$ 。
含端點要用 $\geq$ ；(2) 的 $>$ 不含 1 和 5。
- 3 答案 (4)。左邊 $= (2 \cdot 3)^x \times (2^3)^y \times (3^2)^z = 2^{x+3y} \times 3^{x+2z}$ 。和右邊比較 2 與 3 的次方： $x + 3y = 8$ ， $x + 2z = 7$ 。 y 是正整數，由第一式 $y = 1$ 時 $x = 5$ ， $y = 2$ 時 $x = 2$ 。 $x = 5$ 代入第二式得 $z = 1$ ； $x = 2$ 代入得 $z = \frac{5}{2}$ 不是整數。所以 $(x, y, z) = (5, 1, 1)$ ， $x + 2y + z = 5 + 2 + 1 = 8$ 。
 $y = 2$ 那一組也要代進第二式檢查，確認只有一組解。
- 4 答案 (1)。 px 和 qy 都是正數，由算幾不等式 $\frac{px + qy}{2} \geq \sqrt{px \cdot qy}$ ，即 $25 \geq \sqrt{23pq}$ ，兩邊平方得 $pq \leq \frac{625}{23} \approx 27.2$ 。五個選項的 pq 依序是 21、28、35、42、49，只有 (1) 不超過 27.2。檢查 (1) 真的做得到： $y = \frac{23}{3}$ 代入 $3x + 7y = 50$ 得 $3x^2 - 50x + 161 = 0$ ，判別式 $2500 - 1932 = 568 > 0$ ，兩根的和 $\frac{50}{3}$ 、積 $\frac{161}{3}$ 都是正的，所以有正數解。
算幾不等式給的是 pq 的上限； pq 超過上限的選項，找不到滿足條件的正數 x 、 y 。

多選 5~7：log 的範圍、雙重根號、實數的性質

- 5 答案 (3)(4)(5)。 $\log a$ 是「 a 等於 10 的幾次方」， $-2 < \log a < -1$ 表示 $10^{-2} < a < 10^{-1}$ ，也就是 $0.01 < a < 0.1$ 。(1) 0.1 剛好等於右端點，不在範圍內。(2) $0.2 > 0.1$ ，不在。(3) 0.03、(4) 0.04、(5) 0.09 都介於 0.01 和 0.1 之間。
兩邊都是嚴格的 $<$ ， $a = 0.1$ 時 $\log a = -1$ ，不合。
- 6 答案 (2)(5)。 $\sqrt{176} = 2\sqrt{44}$ ，所以 $15 + \sqrt{176} = 15 + 2\sqrt{44}$ ，找兩數和 15、積 44：11 和 4，原式 $= \sqrt{11} + \sqrt{4} = \sqrt{11} + 2$ 。 $3 < \sqrt{11} < 4$ ，所以 $5 < \sqrt{11} + 2 < 6$ ，整數部分 $a = 5$ ，小數部分 $b = \sqrt{11} + 2 - 5 = \sqrt{11} - 3$ 。(1) 錯： $a = 5$ 。(2) 對。(3) 錯： $ab = 5\sqrt{11} - 15$ 。(4) 錯： $\frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{11} - 3} = \frac{\sqrt{11} + 3}{11 - 9} = \frac{\sqrt{11} + 3}{2}$ 。(5) 對：分子 $2a - b - 3 = 10 - (\sqrt{11} - 3) - 3 = 10 - \sqrt{11}$ ，分母 $a + b - 2 = \sqrt{11}$ ，相除並有理化得 $\frac{(10 - \sqrt{11})\sqrt{11}}{11} = \frac{10\sqrt{11} - 11}{11}$ 。
 $a + b$ 就是原數 $\sqrt{11} + 2$ ，(5) 的分母可以直接寫成 $\sqrt{11}$ 。
- 7 答案 (2)(4)(5)。(1) 錯： $1.\bar{9} = 1 + 0.\bar{9} = 1 + \frac{9}{9} = 2$ ，不小於 2。(2) 對：作一個斜邊長 4、一股長 3 的直角三角形，另一股長 $\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ 。(3) 錯： $2.\overline{34} = 2 + \frac{34}{99} = \frac{232}{99}$ 是有理數，把單位長用平行線等分成 99 份就能在數線上作出。(4) 對：任意兩個相異實數之間都有無限多個有理數，也有無限多個無理數。(5) 對：若 $a + b = r$ 是有理數，則 $b = r - a$ 是有理數，矛盾。
(1) 的 $0.\bar{9}$ 化成分數是 $\frac{9}{9} = 1$ ，所以 $1.\bar{9}$ 和 2 是同一個數。



填充 8~12：循環小數、絕對值、對數與算幾不等式

- 8 $3.2\bar{5} = 3.2 + 0.0\bar{5} = \frac{32}{10} + \frac{5}{90} = \frac{288+5}{90} = \frac{293}{90}$ ； $4.\bar{3} = 4 + \frac{3}{9} = \frac{13}{3} = \frac{390}{90}$ ； $0.\bar{27} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$ ，乘以 11 得 $3 = \frac{270}{90}$ 。合計 $\frac{293+390-270}{90} = \frac{413}{90}$ 。413 = 7 × 59，和 90 沒有公因數，已是最簡分數。
 $3.2\bar{5}$ 只有 5 在循環， $0.0\bar{5} = \frac{5}{90}$ ，不是 $\frac{25}{99}$ 。

- 9 $2 \leq x \leq 14$ 的中點是 8、半徑是 6，所以解等於 $|x - 8| \leq 6$ 。要讓常數項變成 +4，兩邊同乘以 $\frac{1}{2}$ ：
 $\left| \frac{1}{2}x - 4 \right| \leq 3$ ，也就是 $\left| -\frac{1}{2}x + 4 \right| \leq 3$ 。和 $|ax + 4| \leq b$ 對照得 $a = -\frac{1}{2}$ 、 $b = 3$ ， $a + b = \frac{5}{2}$ 。
 $\left| \frac{1}{2}x - 4 \right|$ 和 $\left| -\frac{1}{2}x + 4 \right|$ 相等，要配合題目的「+4」選後者， a 是負的。

- 10 由 log 的意義， $a = 10^{-4.321}$ 、 $b = 10^{-7.89}$ 、 $c = 10^{-13.711}$ 。 $\frac{ab}{c} = 10^{-4.321-7.89-(-13.711)} = 10^{1.5} = 10 \times 10^{0.5} = 10\sqrt{10}$ 。

指數的計算： $-4.321 - 7.89 = -12.211$ ，再加 13.711 得 1.5。

- 11 $3\overline{PA} = 2\overline{PB}$ 表示 $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$ ， P 在 $\overline{AB}$ 上，由分點公式 $P = \frac{3 \times 10^7 + 2 \times 10^9}{2+3}$ 。把 10^9 寫成 100×10^7 ：分子 = $(3 + 200) \times 10^7 = 203 \times 10^7$ ，除以 5 得 $40.6 \times 10^7 = 4.06 \times 10^8$ 。所以 $(k, n) = (4.06, 8)$ 。

科學記號的 k 要滿足 $1 \leq k < 10$ ， 40.6×10^7 還要再調成 4.06×10^8 。

- 12 $3a$ 、 $2b$ 都是正數，由算幾不等式 $\frac{3a+2b}{2} \geq \sqrt{3a \cdot 2b} = \sqrt{6 \times 50} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ ，所以 $3a + 2b \geq 20\sqrt{3}$ ，等號在 $3a = 2b$ 時成立。 $20\sqrt{3} = \sqrt{1200}$ ，而 $34^2 = 1156 < 1200 < 1225 = 35^2$ ，所以 $34 < 20\sqrt{3} < 35$ 。而 35 取得到： $a = 5$ 、 $b = 10$ 時 $ab = 50$ 且 $3a + 2b = 15 + 20 = 35$ 。所以最小的整數值是 35。

最小值 $20\sqrt{3} \approx 34.64$ 不是整數，題目問的是能取到的最小「整數」。

由解回推絕對值不等式的係數：先寫成「到中點的距離」的形式，再整個乘上一個數去配合題目指定的常數項。

填充 13~15：分段討論、指數方程式、雙重根號

- 13 絕對值裡面變號的位置是 $x = -1$ 和 $x = \frac{3}{2}$ ，分三段。① $x < -1$ ：左邊 = $-2(x+1) + (2x-3) = -5$ ，不等式變成 $-5 > x+2$ ， $x < -7$ ，和 $x < -1$ 取共同部分得 $x < -7$ 。② $-1 \leq x < \frac{3}{2}$ ：左邊 = $2(x+1) + (2x-3) = 4x-1$ ， $4x-1 > x+2$ 得 $x > 1$ ，共同部分 $1 < x < \frac{3}{2}$ 。③ $x \geq \frac{3}{2}$ ：左邊 = $2(x+1) - (2x-3) = 5$ ， $5 > x+2$ 得 $x < 3$ ，共同部分 $\frac{3}{2} \leq x < 3$ 。②③ 合起來是 $1 < x < 3$ ，所以解為 $x < -7$ 或 $1 < x < 3$ 。

每一段解出來的範圍都要和該段的前提取共同部分；最後 ② 和 ③ 在 $x = \frac{3}{2}$ 接起來。



- 14 令 $t = 3^x$ ($t > 0$)。分子 $t^3 - t^{-3} = (t - t^{-1})(t^2 + 1 + t^{-2})$ ，分母 $t - t^{-1}$ 不能是 0 (即 $x \neq 0$)，約分後得 $t^2 + 1 + t^{-2} = \frac{13}{3}$ ， $t^2 + t^{-2} = \frac{10}{3}$ 。令 $u = t^2 = 9^x$ ： $u + \frac{1}{u} = \frac{10}{3}$ ， $3u^2 - 10u + 3 = 0$ ， $(3u - 1)(u - 3) = 0$ ， $u = 3$ 或 $\frac{1}{3}$ 。 $9^x = 3$ 得 $x = \frac{1}{2}$ ； $9^x = \frac{1}{3}$ 得 $x = -\frac{1}{2}$ 。兩個都不是 0，都合。
立方差 $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ ，這裡 $AB = t \cdot t^{-1} = 1$ 。

- 15 先化簡兩個雙重根號。 $17 - 12\sqrt{2} = 17 - 2\sqrt{72}$ ，和 17、積 72 的兩數是 9 和 8，所以 $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$ 。 $3\sqrt{128} = 24\sqrt{2} = 2\sqrt{288}$ ，和 34、積 288 的兩數是 18 和 16，所以 $\sqrt{34 + 3\sqrt{128}} = \sqrt{18} + \sqrt{16} = 3\sqrt{2} + 4$ 。原式變成 $x + y(3 - 2\sqrt{2}) = x(4 + 3\sqrt{2}) + 15$ 。 x 、 y 是有理數，比較有理數部分和 $\sqrt{2}$ 的係數： $x + 3y = 4x + 15$ ， $-2y = 3x$ 。由第一式 $y = x + 5$ ，代入第二式 $-2x - 10 = 3x$ ， $x = -2$ ， $y = 3$ 。 $x^2 + y^2 = 4 + 9 = 13$ 。
驗算：左邊 $-2 + 3(3 - 2\sqrt{2}) = 7 - 6\sqrt{2}$ ，右邊 $-2(4 + 3\sqrt{2}) + 15 = 7 - 6\sqrt{2}$ 。

雙重根號 $\sqrt{m \pm 2\sqrt{n}}$ ：找兩個數和為 m 、積為 n ，結果是兩數的根號相加或大減小。根號前的係數不是 2 時先把它調成 2。

填充 16~17 與計算 18：指數模型、位數、算幾不等式的應用

- 16 $t = 0$ ： $\frac{1}{1+a} = 2\% = \frac{1}{50}$ ，所以 $a = 49$ 。 $t = 3$ ： $\frac{1}{1+49 \times 7^{-3b}} = 12.5\% = \frac{1}{8}$ ， $49 \times 7^{-3b} = 7$ ，即 $7^{2-3b} = 7^1$ ， $b = \frac{1}{3}$ 。要達到 $87.5\% = \frac{7}{8}$ ： $1 + 49 \times 7^{-\frac{t}{3}} = \frac{8}{7}$ ， $49 \times 7^{-\frac{t}{3}} = \frac{1}{7}$ ，即 $7^{2-\frac{t}{3}} = 7^{-1}$ ， $2 - \frac{t}{3} = -1$ ， $t = 9$ 。
把 49 寫成 7^2 、 $\frac{1}{7}$ 寫成 7^{-1} ，兩邊同底數就能直接比較指數。
- 17 $\log(\log A) = 4$ 表示 $\log A = 10^4 = 10000$ ，再一次得 $A = 10^{10000}$ 。 10^{10000} 是 1 後面接 10000 個 0，共 10001 位數。
 10^n 是 $n+1$ 位數 (例如 $10^2 = 100$ 是 3 位數)。
- 18 公布欄的木板寬 x 、高 y ，面積 $xy = 700$ ($x > 0$ ， $y > 0$)。依圖，四片鋁片都是長條：上緣一片長 x 、寬 2，下緣一片長 x 、寬 5，左、右各一片長 y 、寬 2。鋁片面積合計 $2x + 5x + 2y + 2y = 7x + 4y$ 。由算幾不等式 $\frac{7x+4y}{2} \geq \sqrt{7x \cdot 4y} = \sqrt{28 \times 700} = \sqrt{19600} = 140$ ，所以 $7x + 4y \geq 280$ 。等號在 $7x = 4y = 140$ 時成立，即 $x = 20$ 、 $y = 35$ ，這時 $xy = 700$ 符合。答：寬 20 吋、高 35 吋時鋁片面積最小，最小面積 280 平方吋。
算幾不等式要寫出等號成立的條件，並確認那組 x 、 y 滿足 $xy = 700$ 。這裡鋁片依附圖看成四片各自貼在木板四邊的長條 (長度等於所貼的邊長)；若把四個角落也補上鋁片，面積會多出 $2 \times 2 \times 2 + 2 \times 5 \times 2 = 28$ 平方吋，寬與高的設計不變。

兩個正數的乘積固定時，它們的和在兩數相等時最小；用算幾不等式求極值，要把式子拆成乘積為定值的兩項。



孩子寫完這份卷，錯的題有人陪他看嗎？

有請家教的孩子，錯題可以問老師。沒有的話，多半是自己對完答案就算了，同一型下次換個數字還是會錯。

數學青於藍是一個國高中數學的練習網站，做的事情就是補上這一段：

- 照孩子這次段考的範圍出題，每一題都有詳解，選錯的選項會寫明錯在哪一步。
- 答錯的題自動收進錯題本，助教會陪他一步一步檢討，不直接給答案。
- 家長每週收到一份學習報告，看得到孩子練了哪些章節、卡在哪裡。

費用

- 先免費試用，不用信用卡。學校信箱註冊 100 題，一般信箱 15 題。
- 需要再由家長訂閱，每月 690 元起（創始會員價）。
- 不綁卡、不自動扣款，每月由家長確認後才付款，不想續就什麼都不用做。



掃 QR code 看怎麼開始

網站：royalblue-education.com

LINE 客服：@royalblue_edu

本卷題目取自政大附中 114 學年度上學期高一第一次段考；排版與詳解由御藍教育撰寫。



勾你錯的題號，看錯在哪幾章，註冊後直接從那幾章開始練

網頁版：royalblue-education.com/school-exams/ahsnccu-114a-g10-1