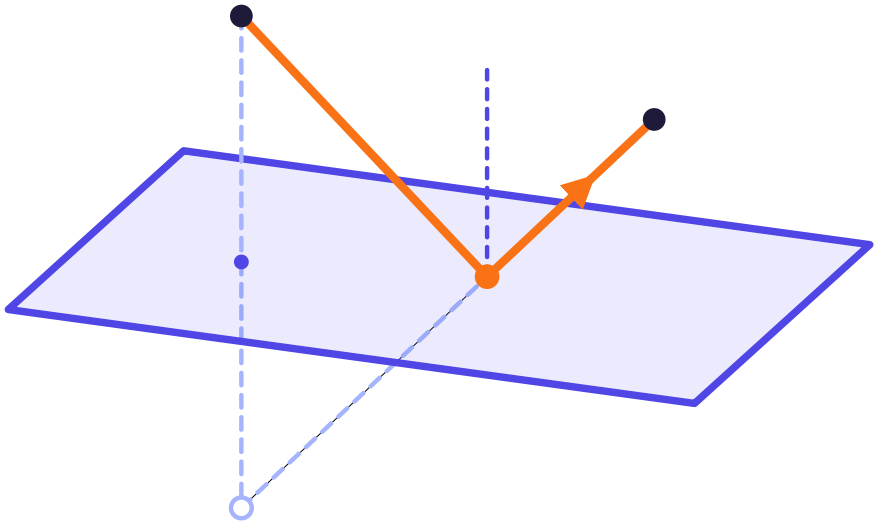
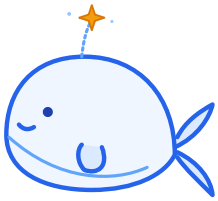
空間中的平面與直線

高二下・第二、三次段考範圍（數A）



示意圖：　平面與它的法線　光線經平面反射



光線經 A(1, 2, 3) 射向鏡面 $2x + y + z = 1$，反射後通過 C(3, 2, 2)，反射點在哪裡？

臺南二中 113 學年度　高二下第二次段考　→ 書中例題 7.3

各校段考原題精選　每一題都附圖或表

八個題型　四十道例題　四十道類題　書末：六則證明、四道綜合挑戰、三節課綱外補充

御藍教育　單元冊 12
主筆　群青老師（台大電機・一對一數學家教十年）
royalblue-education.com

完整單元冊

給家長的一頁

這是什麼

高二「空間中的平面與直線」這一章（平面方程式、空間直線、距離與夾角、對稱與反射、三元一次方程組），各校段考最常考的題型，一型一型整理成冊。**題目取自各校段考**，題目下方標明學校、學年度與考次；每一題的詳解都附圖或表。

孩子讀完能做到什麼

- 會由三個點或一點與法向量寫出平面方程式，判斷四點是否共平面，也會用截距式求四面體體積的最小值。
- 會用法向量求兩平面的夾角，判斷兩平面平行或垂直，並由垂直條件定出平面。
- 會求點到平面的距離、投影點與對稱點，把「平方和的最小值」看成距離。
- 會寫空間直線的參數式與比例式，判斷兩直線的關係，求直線與平面的交點與夾角。
- 會求點到直線、兩歪斜線的距離與公垂線段，處理光線反射與折線最短的問題。
- 會用消去法解三元一次方程組，判斷解的類型，並說出三個平面怎麼相交。

大概要花多少時間

每一型：觀念頁約 20 分鐘，例題與類題每題 20 到 30 分鐘（類題請孩子自己先寫；四顆星的題目常要更久），一型約 3.6 到 5.4 小時。全書八型、40 組例題與類題，合計約 29 到 43 小時（不含書末）。建議段考前三週開始，一週讀三到四型。（時間是估計，依孩子的程度會有差異。）

適合哪些學生

修數A、從中段到前段的高二學生都適用（數B 不教這一章）。每一題依難度標一到四顆星，每型的例題由易到難排列，類題跟著對應的例題、星等照題目本身標：一、二顆星是課本例題到段考基本題的程度，中段學生先把這兩級做穩；四顆星是段考實戰程度的題目，給想拿下最後幾題的學生。本冊常用到 11 冊《空間概念與空間向量》的內積、外積與三階行列式，沒有學穩的話建議先回頭複習。書末收了六則證明、四道綜合挑戰、三節課綱外補充。書末 C 的三節（投影面積、過兩平面交線的平面、三階克拉瑪公式與解的類型）在現行課綱之外，有些學校的段考會當延伸題考，孩子的學校考到、或孩子有興趣再讀即可。

家長可以怎麼陪

不需要會解題。孩子讀完一型後，請孩子挑一道類題講給您聽：用到哪一個性質、為什麼這樣做。講得出來，通常就是真的懂了。

題目怎麼挑的

題型照 108 課綱數A「平面方程式」「空間中的直線方程式」「三元一次聯立方程式」三個條目排。每一型裡的題目，主要從我們收錄的 35 份考到這一章的各校段考卷中挑：逐題分類，再從每一型最常出現的考法裡選。每型的例題由易到難排列，最後一題接近段考實戰。

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION

試閱版（封面、目錄、第一型與詳解）｜完整版請見 royalblue-education.com/booklets

這本冊子怎麼用

這本冊子不收題海。每個題型挑五道例題，各配一道類題，取自各校段考（少數改寫的題目會註明；選項一律用 (1)～(5) 標號，刪去的選項保留原號）。類題換了包裝，要你自己認出「這其實是同一招」。認得出來，才算真的會了。

1　觀念
這一型靠哪一個性質，先用圖或表講清楚。

2　例題
由易到難，★ 到 ★★★★。每題附圖或表與「易錯」提醒。

3　類題
緊接在例題後，先自己寫。詳解統一放在書末，不會翻頁就看到。

4　書末
常用公式的證明、跨題型的綜合挑戰、課綱外補充與類題詳解。

題型	35 份卷中出現在幾份	卷面上常見的包裝
第一型　平面方程式	10 份	三點定平面、四點共平面、長方體裡的平面、截距式求體積最小
第二型　兩平面的夾角、平行與垂直	13 份	兩平面的夾角（兩個互補）、由夾角求參數、垂直已知平面定法向量
第三型　點到平面的距離	16 份	點到平面與兩平行平面的距離、投影點與對稱點、平方和最小、角平分面
第四型　空間直線	14 份	兩面式化成比例式、兩直線相交求參數、角平分線的方向
第五型　直線與平面	18 份	線面交點與分點比、含直線的平面、平面截正立方體
第六型　點到直線與兩線的距離	16 份	點到直線的垂足、歪斜線的距離與公垂線段、立體的對稜
第七型　對稱與反射	14 份	點對直線的對稱點、光線經平面反射、折線最短、正射影長
第八型　三元一次方程組	19 份	含參數判斷解的類型、三平面的相交情形、無限多組解上的最小值

份數依各卷題目的標籤與題幹歸類，一份卷裡同一型出好幾題只算一份；一題同時用到好幾型時，算在它用到的最後一型。各校排這一章的考次不同：35 份卷是高二下第一次段考 7 份、第二次 13 份、第三次 15 份。

關於課綱

正文只用 108 課綱數A 與現行課本內的觀念，以及高一、高二學過的內容（平面向量、11 冊的空間坐標、內積、正射影、外積、三階行列式、三垂線定理與兩面角）。前三型講平面，不用直線的參數式；第四型起才有直線。三元一次方程組用消去法與列運算，不用矩陣乘法與反方陣。

書末 C 的三節（投影面積、過兩平面交線的平面、三階克拉瑪公式與解的類型）超出現行課綱，是常見於延伸教材的公式，有些學校的段考會當延伸題考。頁首標了「課綱外」：學校段考會考時再讀，不讀也不影響正文。

目錄

第一型　平面方程式：法向量定方向，一個點定位置 5
例題 1.1　缺一個變數，在空間中仍是平面 6
例題 1.2　三點決定平面：外積求法向量 6
例題 1.3　長方體放坐標，求頂點所在的平面 7
例題 1.4　截距式配算幾：四面體體積最小 8
例題 1.5　截距式配柯西：配對要讓變數消掉 9
第二型　兩平面的夾角、平行與垂直：都看法向量 11
例題 2.1　平面與坐標平面的夾角：正弦只有一個值 12
例題 2.2　兩平面的夾角有兩個，互補 12
例題 2.3　垂直已知平面：法向量用外積 13
例題 2.4　由夾角求參數：絕對值的兩種情形都要做 14
例題 2.5　由夾角定出未知平面：法向量帶未知數 15
第三型　點到平面的距離：沿法向量走到平面 17
例題 3.1　兩平行平面的距離：係數先化成相同 18
例題 3.2　投影點：PH 平行法向量，H 在平面上 19
例題 3.3　平方和的最小值：看成點到平面的距離 19
例題 3.4　兩兩垂直的三稜當坐標軸，再求距離 20
例題 3.5　角平分面有兩個：分出銳角與鈍角 21
第四型　空間直線：一點和一個方向，兩線關係先看方向 23
例題 4.1　由一點和一個方向寫直線 24
例題 4.2　兩平面的交線：方向用外積 25
例題 4.3　兩直線的關係：先看方向，再找交點 26
例題 4.4　兩直線有交點：參數式聯立 27
例題 4.5　兩直線的夾角與角平分線：化成等長再加減 28
第五型　直線與平面：方向和法向量的內積決定關係 29
例題 5.1　線與面的三種關係 30
例題 5.2　線面交點：參數式代入平面 31
例題 5.3　含兩直線的平面：找兩個方向 32
例題 5.4　含直線且垂直已知平面 32
例題 5.5　平面截立體：頂點代入看正負 34
第六型　點到直線與兩線的距離：找垂足與公垂線 36
例題 6.1　直線上最近的點：垂足 37
例題 6.2　兩平面的交線：先化成參數式 38
例題 6.3　歪斜線的距離：轉成點到平面 39
例題 6.4　公垂線段：兩個垂直條件聯立 40
例題 6.5　立體的對稜：歪斜線距離定稜長 41
第七型　對稱與反射：取對稱點，把折線拉直 43
例題 7.1　線段的正射影長：扣掉法向分量 44
例題 7.2　正射影長等於原長：與平面平行 45
例題 7.3　光線反射：對稱點和另一點連線 46
例題 7.4　折線最短：同側取對稱點再拉直 47
例題 7.5　投影與直線重合：兩平面垂直 48
第八型　三元一次方程組：消去法與三平面 50
例題 8.1　高斯消去法：化成階梯再回代 51
例題 8.2　應用題：把條件翻成一次式 52
例題 8.3　含參數：消成一個一次式再分類 53

試閱版（封面、目錄、第一型與詳解）｜完整版請見 royalblue-education.com/booklets

例題 8.4　三平面：第三式是不是前兩式的組合 55
例題 8.5　交於一直線：化簡後寫成參數式 56

書末 57

A　公式從哪裡來（六則證明） 57
B　跨題型的綜合挑戰 59
C　課綱外補充（各附一道挑戰題） 61
C-1　投影面積：乘上夾角的餘弦 61
C-2　過兩平面交線的平面：平面族 63
C-3　三階克拉瑪公式與解的類型 65
類題詳解 68

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION

試閱版（封面、目錄、第一型與詳解）｜完整版請見 royalblue-education.com/booklets

搭配數學青於藍一起用

這本冊子本身是完整的：每題都有詳解，不上網也能讀完。數學青於藍是御藍教育的線上練習平台，適合讀完一型之後，用更多同類題確認自己真的會了。

royalblue-education.com

1. **開帳號**
   用手機掃左邊的條碼，或在瀏覽器輸入 royalblue-education.com，註冊學生帳號。新帳號有免費試用題數，可以先試再決定。
2. **找到要練的知識點**
   每一型重點整理頁最後的「想多練同類題」框，列出了平台上對應的知識點名稱。在練習區選這些知識點就能開始練。
3. **作答，看詳解**
   每題交出後都可以看詳解。寫錯的題先自己再算一次，再對照詳解找出錯在哪一步。
4. **卡住時問 AI 助教**
   部分較難的題目有 AI 助教，會一步一步提示，不會直接給答案。

建議的用法

讀完冊子的一型（觀念、例題、類題）之後，到平台練那一型的知識點。冊子裡的類題寫錯的，隔幾天再到平台練同一個知識點，看看是不是真的會了。段考前一週，把各型錯過的知識點各練一輪。

給家長

家長可以註冊家長帳號並綁定孩子的帳號，每週會收到一封 Email 學習報告，列出孩子這一週練了哪些知識點、答對多少。

有問題找我們

LINE 官方帳號：@royalblue_edu　　Email：service@royalblue-education.com

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION

平面方程式：法向量定方向，一個點定位置

重點整理（課綱 G-11A-9）

① **法向量**　和平面上每一個向量都垂直的非零向量。平面 $ax+by+cz=d$ 的法向量是 (a,b,c)。

② **點法式**　過 $P_0(x_0,y_0,z_0)$、法向量 (a,b,c)：$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$。

③ **三點決定平面**　$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$，再代一點。三點共線時平面不只一個。

④ **截距式**　x、y、z 截距為 a、b、c（都不為 0）：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$。和三坐標平面圍成的四面體體積 $\dfrac{1}{6}|abc|$。

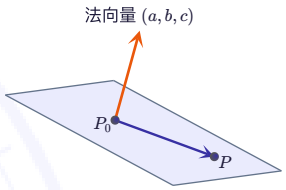
⑤ **缺變數**　空間中一個一次方程式都是平面：$2x-y=5$ 平行 z 軸，$z=0$ 是 xy 平面。

⑥ **四點共平面**　前三點求出平面，第四點代入要成立。

為什麼係數就是法向量

平面由「一個點」和「一個方向」決定：過 P_0、和 $\vec{n}$ 垂直的所有點 P 排成一個平面。條件寫成 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$，展開就是點法式 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$，整理成 $ax+by+cz=d$。反過來看，平面 $ax+by+cz=d$ 上任取兩點代入相減，得到 (a,b,c) 和兩點的連線垂直，所以係數就是法向量（類題 1.1）。

求平面因此只要兩件事：法向量和一個點。給三點時，法向量要和 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 都垂直，用外積 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 一次得到（例題 1.2）；算完用內積驗一次。

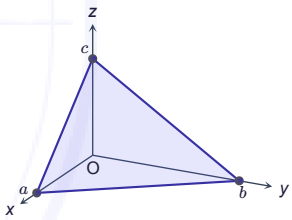


法向量 $\vec{n}$ 和平面上每一個向量都垂直。P 在平面上 $\Leftrightarrow\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$。

截距式：和三個坐標平面圍成四面體

平面交三軸於 $(a,0,0)$、$(0,b,0)$、$(0,0,c)$ 時，寫成 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，三點代入馬上看出成立。長方體、立方體放進坐標後，常有頂點的坐標「兩格滿、一格空」，用這個形狀猜平面很快（例題 1.3）。

平面過定點 (x_0,y_0,z_0)，截距式就變成 $\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}+\dfrac{z_0}{c}=1$：三個倒數項的和固定。所求是體積 $\dfrac{1}{6}abc$（乘積）時用算幾不等式；所求是 $a+b+c$ 這類一次式時用柯西不等式，配對要讓每一對相乘把變數消掉（例題 1.4、例題 1.5）。



三軸上的截點是 $(a,0,0)$、$(0,b,0)$、$(0,0,c)$，代入 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 都成立。四面體體積 $\dfrac{1}{6}|abc|$。

常見問法

問法	怎麼做	注意
方程式在空間中是什麼圖形	一次方程式就是平面，缺的變數任意	不要和平面坐標的直線搞混
過三點的平面	外積求法向量，代一點	外積算完用內積驗
四點共平面求參數	前三點求平面，第四點代入	先確認前三點不共線
長方體、立方體中的平面	一個頂點當原點，三稜當三軸	右邊常數不一定是 1
平面上一點的線性組合	放坐標代入；或寫成平面上三點的組合，係數和為 1	點可能在立體外面
截距式求體積最小	過定點得倒數和為定值，算幾	體積要乘 $\frac{1}{6}$，檢查等號
截距的一次式求最小	柯西，配對讓變數消掉	等號條件求出截距，要都是正數

想多練同類題

本冊題目與詳解都是完整的。若還想多做幾題，用手機掃左邊的條碼，到數學青於藍（royalblue-education.com）的練習區，選下列知識點：

法向量與平面方程式　空間向量外積　柯西不等式

試閱版（封面、目錄、第一型與詳解）｜完整版請見 royalblue-education.com/booklets

例題 1.1　缺一個變數，在空間中仍是平面　★☆☆☆　基礎

↑ 目錄

判斷對錯：在空間坐標中，方程式 $2x - y = 5$ 代表的圖形為一直線。

出處：中山女高 113 學年度 高二下第二次段考（是非題）　整份卷與詳解 ↗

這題在考：空間中一個一次方程式 $ax + by + cz = d$（a, b, c 不全為 0）的圖形是平面，缺變數也一樣：缺哪個變數，那個變數就任意。

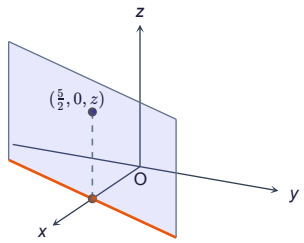
詳解

① 在空間中，點 (x, y, z) 只要滿足 $2x - y = 5$ 就在圖形上，方程式對 z 沒有任何限制。

② 在 xy 平面上，$2x - y = 5$ 是一條直線。這條線上的每一點沿 z 方向上下移動，x、y 不變，仍滿足方程式。整條線上下平移，掃出一個鉛直的平面。

③ 也可以寫成 $2x - y + 0z = 5$，是法向量 $(2, -1, 0)$ 的平面。法向量沒有 z 分量，所以平面和 z 軸平行。

答：錯（圖形是平面）



橘線是 xy 平面上的直線 $2x - y = 5$。z 任意，整條線上下平移掃出淡色的平面。

易錯　同一個方程式，在坐標平面上和在坐標空間中代表的圖形不同。空間中一個一次方程式不管缺幾個變數都是平面（例如 $z = 0$ 是 xy 平面）；直線要兩個一次方程式聯立才得到，到第四型再學。

類題 1.1　缺一個變數，在空間中仍是平面　★☆☆☆　基礎

看詳解 →

判斷對錯：在空間坐標中，$\vec{n} = (2, -1, 3)$ 為平面 $2x - y + 3z = 7$ 的一個法向量。

出處：中山女高 113 學年度 高二下第二次段考（是非題）　整份卷與詳解 ↗

想一想：在平面上任取兩點，兩個方程式相減，看到什麼內積？

作答區（詳解在書末）

例題 1.2　三點決定平面：外積求法向量　★★☆☆　標準

↑ 目錄

通過 $(-1, 3, 1)$、$(1, 1, 2)$、$(3, 2, 1)$ 三點的平面方程式為 $x + by + cz = d$，則 $b + c + d =$ ____。

出處：臺南女中 113 學年度 高二下第一次段考　整份卷與詳解 ↗

這題在考：法向量要和平面上兩個不平行的向量都垂直，用外積一次求出；再代一個點定出常數。

詳解

① 記三點為 A、B、C，平面上的兩個向量：

$$\overrightarrow{AB} = (2, -2, 1), \quad \overrightarrow{AC} = (4, -1, 0)$$

② 法向量取外積：

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \big((-2)\cdot 0 - 1\cdot(-1),\ 1\cdot 4 - 2\cdot 0,\ 2\cdot(-1) - (-2)\cdot 4\big) = (1, 4, 6)$$

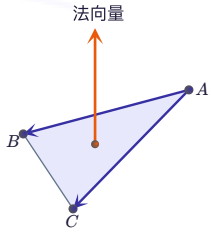
驗算：$(1, 4, 6)\cdot(2, -2, 1) = 0$，$(1, 4, 6)\cdot(4, -1, 0) = 0$。

③ x 係數恰好是 1，所以 $b = 4$、$c = 6$。代入 $A(-1, 3, 1)$：

$$d = -1 + 12 + 6 = 17$$

④ $b + c + d = 4 + 6 + 17 = 27$。

答：27



法向量 $\vec{n}$ 要同時垂直 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$，用外積求。

易錯　外積中間那一項最容易算錯號，算完一定用內積和兩個向量各驗一次。題目指定 x 係數為 1，若算出的法向量 x 分量不是 1，要先整個除過去（或乘負號）再讀 b、c。

試閱版（封面、目錄、第一型與詳解）｜完整版請見 royalblue-education.com/booklets

類題 1.2　三點決定平面：外積求法向量　★★☆☆　標準

看詳解 →

空間中，平面 E 上四點 $A(1,2,-1)$、$B(2,-1,2)$、$C(3,2,1)$、$D(4,2-a,a+3)$，則 $a=$ ＿＿＿＿。

出處：師大附中 113 學年度 高二下第一次段考（刪去答案格式說明）　整份卷與詳解 ↗

想一想：先用 A、B、C 求出平面（或法向量），再要求 D 也在上面。

作答區（詳解在書末）

例題 1.3　長方體放坐標，求頂點所在的平面　★★★☆　進階

↑ 目錄

空間中有一長方體 $ABCD-EFGH$，已知 $\overline{AB}=2$，$\overline{AD}=3$，$\overline{AE}=5$，今有一平面 S 通過 C、F、H 三點，此平面 S 與直線 $\overleftrightarrow{AG}$ 交於點 P，若 $\overline{AP}=k\,\overline{AG}$，則 $k=$ ＿＿＿＿。

出處：中山女高 113 學年度 高二下第二次段考　整份卷與詳解 ↗

這題在考：長方體的三條稜互相垂直，正好當三個坐標軸。頂點坐標寫出來，平面方程式就能求，再把直線上的點代進平面。

詳解

① 以 A 為原點，$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AE}$ 的方向為 x、y、z 軸：

$$C(2,3,0),\ F(2,0,5),\ H(0,3,5),\ G(2,3,5)$$

② $\overrightarrow{CF}=(0,-3,5)$，$\overrightarrow{CH}=(-2,0,5)$，外積：

$$\overrightarrow{CF}\times\overrightarrow{CH}=(-15,-10,-6)$$

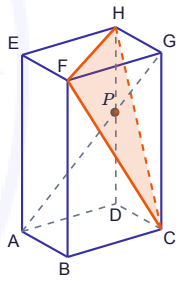
法向量取 $(15,10,6)$，代入 C：$15x+10y+6z=60$，同除以 30：

$$S:\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=2$$

（三點的坐標裡各有兩個「滿格」，代入都是 $1+1=2$，也可以直接看出來。）

③ $\overrightarrow{AP}=k\,\overrightarrow{AG}$，$P$ 在 $\overrightarrow{AG}$ 上，$P=(2k,3k,5k)$。代入 S：

$$k+k+k=2,\quad k=\frac{2}{3}$$



以 A 為原點放坐標。平面 CFH（橘）和對角線 AG（虛線）交於 P。

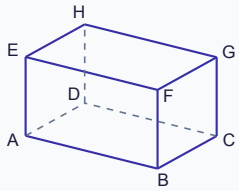
答： $\frac{2}{3}$

易錯　右邊是 2 不是 1：平面不一定剛好寫成截距式等於 1，代點算出來是多少就是多少。若誤寫成 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1$，會得到 $k=\frac{1}{3}$。

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION

類題 1.3 **長方體放坐標，求頂點所在的平面** ★★★☆ 進階 看詳解 →

如下圖所示，$ABCD-EFGH$ 為一長方體。若平面 BDG 上一點 P 滿足 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AE}$，則實數 $a=$ ____。



出處：高雄女中 113 學年度 高二下第二次段考　整份卷與詳解 ↗

想一想：長寬高沒給，就設成 l、w、h。A 當原點，寫出 B、D、G、P 的坐標，平面 BDG 能看出來嗎？

作答區（詳解在書末）

例題 1.4 **截距式配算幾：四面體體積最小** ★★★☆ 進階 ↑ 目錄

已知空間中一平面 E 通過點 $A(2,3,4)$，且平面 E 在第一卦限與三個坐標平面（xy 平面、yz 平面、xz 平面）圍成一個四面體，則此四面體的最小體積為 ____。（平面 E 不通過原點）

出處：南山高中 111 學年度 高三上第二次段考　整份卷與詳解 ↗

這題在考：截距式 $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$ 過定點，得到「三個倒數項的和為 1」；體積是 $\frac{1}{6}pqr$，和固定求積的範圍，用算幾不等式。

詳解

① 平面在第一卦限圍出四面體，三個截距 p、q、r 都是正數：

$$E:\ \frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$$

② 過 $A(2,3,4)$：

$$\frac{2}{p}+\frac{3}{q}+\frac{4}{r}=1$$

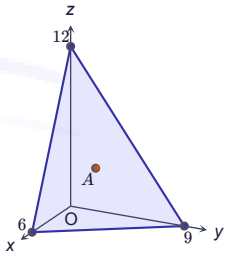
體積 $V=\frac{1}{6}pqr$。

③ 三個正數 $\frac{2}{p}$、$\frac{3}{q}$、$\frac{4}{r}$ 用算幾不等式：

$$1=\frac{2}{p}+\frac{3}{q}+\frac{4}{r}\geq 3\sqrt[3]{\frac{24}{pqr}}$$

④ 兩邊立方：$\frac{1}{27}\geq\frac{24}{pqr}$，$pqr\geq 648$，$V\geq 108$。

⑤ 等號在 $\frac{2}{p}=\frac{3}{q}=\frac{4}{r}=\frac{1}{3}$，即 $p=6$、$q=9$、$r=12$，取得到。



體積最小時三截距是 6、9、12，A 在斜面上。

答： 108

易錯　三個常見漏洞：體積忘了乘 $\frac{1}{6}$（會答 648）；算幾的三項要選「和為定值」的 $\frac{2}{p},\frac{3}{q},\frac{4}{r}$，不是 p,q,r；最後要寫出等號成立的截距，確認最小值取得到。

試閱版（封面、目錄、第一型與詳解）｜完整版請見 royalblue-education.com/booklets

類題 1.4　截距式配算幾：四面體體積最小　★★★☆　進階

看詳解 →

空間坐標中，已知平面 E 過點 $P(1,2,3)$。若平面 E 與 xy、yz、xz 平面圍出一四面體，求其體積之最小值。

出處：高雄中學 112 學年度 高二下第一次段考　整份卷與詳解 ↗

想一想：四面體圍在第一卦限時，三個截距都是正數。過 P 得到什麼條件？體積是三個截距的什麼式子？

作答區（詳解在書末）

例題 1.5　截距式配柯西：配對要讓變數消掉　★★★★　段考實戰

↑ 目錄

設平面 E 通過點 $P(2,3,1)$ 且與 x 軸、y 軸、z 軸的正向交於 A、B、C 三點，又 O 為原點，則 $2\overline{OA}+3\overline{OB}+4\overline{OC}$ 的最小值為 ＿＿＿。

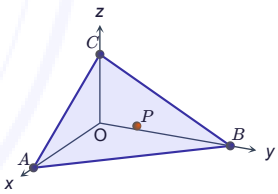
出處：臺中女中 113 學年度 高二下第二次段考　整份卷與詳解 ↗

這題在考：條件是倒數的一次式 $\frac{2}{p}+\frac{3}{q}+\frac{1}{r}=1$，所求是 $2p+3q+4r$。兩式相乘用柯西不等式，配對時讓每一對相乘把 p、q、r 消掉，右邊才是常數。

詳解

① 設 $A(p,0,0)$、$B(0,q,0)$、$C(0,0,r)$，$p,q,r>0$。E：$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$ 過 P：

$$\frac{2}{p}+\frac{3}{q}+\frac{1}{r}=1$$



最小值發生在 $\overline{OA}=\overline{OB}=7$、$\overline{OC}=\frac{7}{2}$。

② 所求 $2p+3q+4r$。取兩組向量

$$\left(\sqrt{2p},\sqrt{3q},\sqrt{4r}\right),\quad \left(\sqrt{\tfrac{2}{p}},\sqrt{\tfrac{3}{q}},\sqrt{\tfrac{1}{r}}\right)$$

對應分量相乘是 2、3、2，p、q、r 都消掉了。

③ 柯西不等式：

$$(2p+3q+4r)\left(\frac{2}{p}+\frac{3}{q}+\frac{1}{r}\right)\geq(2+3+2)^2=49$$

第二個括號是 1，所以 $2p+3q+4r\geq 49$。

④ 等號在兩組向量平行時成立：$\frac{\sqrt{2p}}{\sqrt{2/p}}=\frac{\sqrt{3q}}{\sqrt{3/q}}=\frac{\sqrt{4r}}{\sqrt{1/r}}$，即 $p=q=2r$。代回條件 $\frac{2}{p}+\frac{3}{p}+\frac{2}{p}=1$，$p=7$，$q=7$，$r=\frac{7}{2}$，都是正數，取得到。

答：49

> **易錯**　第三項 $4r$ 配的是 $\frac{1}{r}$，乘起來開根號是 2，不是 4；若照「係數對係數」寫成 $(2+3+4)^2=81$ 就錯了。另外，等號條件是 $p=q=2r$，不是 $p=q=r$；求出 p,q,r 代回條件確認取得到。

試閱版（封面、目錄、第一型與詳解）｜完整版請見 royalblue-education.com/booklets

類題 1.5 **截距式配柯西：配對要讓變數消掉** ★★★☆ 進階

看詳解 →

關於空間中的直線與平面，下列哪些敘述正確？

(2) 平面 E_B 通過 $G(-1,2,3)$ 且 G 恰為平面 E_B 在 x、y、z 軸上截點所形成三角形之重心，則平面 E_B 之方程式為 $6x-3y-2z+18=0$

(3) 過點 $A(1,4,9)$ 之平面 E_C 與三坐標平面在第一卦限所圍成之正四面體體積之最小值為 972

(4) 過點 $A(1,4,9)$ 之平面 E_D 與三坐標軸交點均在正向上，則三截距之和的最小值為 36

出處：高雄中學 113 學年度 高二下第一次段考（多選題，本書刪去原選項 (1)(5)，其餘保留原號；原卷 (3) 寫「正四面體」，這裡圍成的是一般的四面體） 整份卷與詳解 ↗

想一想：三個選項都先把平面寫成截距式。(3) 是乘積的最小值，(4) 是和的最小值，各用哪一個不等式？

作答區（詳解在書末）

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION

書末　類題詳解

第一型

類題 1.1　缺一個變數，在空間中仍是平面

← 回題目

在平面 $2x-y+3z=7$ 上任取兩點 $P(x_1,y_1,z_1)$、$Q(x_2,y_2,z_2)$：

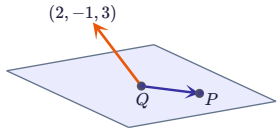
$$\begin{cases}2x_1-y_1+3z_1=7\\2x_2-y_2+3z_2=7\end{cases}$$

兩式相減：

$$2(x_1-x_2)-(y_1-y_2)+3(z_1-z_2)=0$$

也就是 $(2,-1,3)\cdot\overrightarrow{QP}=0$。平面上任兩點連成的向量都和 $(2,-1,3)$ 垂直，所以它是法向量，敘述對。

和例題 1.1 同一招：一次方程式 $ax+by+cz=d$ 的圖形是平面，係數 (a,b,c) 就是法向量。



平面 $2x-y+3z=7$ 上任兩點 P、Q，$\overrightarrow{QP}$ 都和 $(2,-1,3)$ 垂直。

答：對

類題 1.2　三點決定平面：外積求法向量

← 回題目

$\overrightarrow{AB}=(1,-3,3)$，$\overrightarrow{AC}=(2,0,2)$，外積：

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-6,4,6)$$

法向量取 $(-3,2,3)$，代入 A：$-3+4-3=-2$，平面 E：$-3x+2y+3z=-2$。

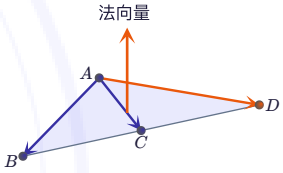
$D(4,2-a,a+3)$ 也在 E 上：

$$-12+2(2-a)+3(a+3)=-2$$

$$a+1=-2,\quad a=-3$$

此時 $D(4,5,0)$，代入 E：$-12+10+0=-2$，確實在平面上。

和例題 1.2 同一招：三點用外積求法向量，代點定平面；第四點共平面就是代入要成立。



先用 A、B、C 求平面，$\overrightarrow{AD}$ 也要和法向量 $\vec{n}$ 垂直。

答：-3

類題 1.3　長方體放坐標，求頂點所在的平面

← 回題目

設 $\overline{AB}=l$，$\overline{AD}=w$，$\overline{AE}=h$。以 A 為原點、三條稜為三軸：

$$B(l,0,0),\ D(0,w,0),\ G(l,w,h)$$

平面 BDG：$\dfrac{x}{l}+\dfrac{y}{w}-\dfrac{z}{h}=1$。$B$、$D$ 代入是 1，G 代入是 $1+1-1=1$，三點都在上面。

$P\left(\dfrac{3}{4}l,\ aw,\ 2h\right)$ 代入：

$$\frac{3}{4}+a-2=1,\quad a=\frac{9}{4}$$

長寬高都消掉了，答案和長方體的大小無關。

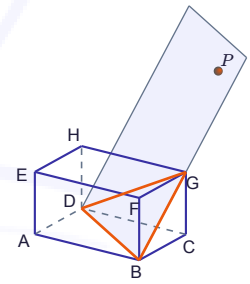
另一種看法：$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$，代入得

$$\overrightarrow{AP}=-\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}+(a-2)\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AG}$$

P 在平面 BDG 上，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{BD}+t\overrightarrow{BG}=(1-s-t)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AG}$，三個係數和為 1：

$-\dfrac{5}{4}+a-2+2=1$，同樣 $a=\dfrac{9}{4}$。

和例題 1.3 同一招：長方體放坐標，求出頂點所在的平面，再把點代進去。



平面 BDG 往外延伸（淡色），P 在長方體外，但仍在這個平面上。

答：$\dfrac{9}{4}$

試閱版（封面、目錄、第一型與詳解）｜完整版請見 royalblue-education.com/booklets

← 回題目

類題 1.4　截距式配算幾：四面體體積最小

設三個截距 a、b、c。四面體圍在第一卦限，三個截距都是正數（原卷的答案就是這個情形）：

$$E:\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

過 $P(1,2,3)$：

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$$

體積 $V=\dfrac{1}{6}abc$。三個正數用算幾不等式：

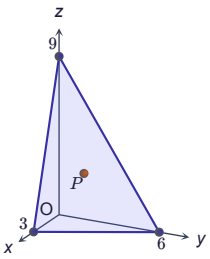
$$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}$$

兩邊立方：$\dfrac{1}{27}\geq\dfrac{6}{abc}$，$abc\geq 162$，$V\geq 27$。

等號在 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{3}{c}=\dfrac{1}{3}$，即 $a=3$、$b=6$、$c=9$，取得到。最小值 27。

題目沒寫截距要是正的。若允許負截距，例如 $a=-1$、$b=\dfrac{1}{5}$、$c=-\dfrac{3}{8}$（代入 P：$-1+10-8=1$，平面仍過 P），體積只有 $\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3}{40}=\dfrac{1}{80}$，可以任意小，沒有最小值。所以這題照第一卦限算。

和例題 1.4 同一招：過定點得到倒數項的和為定值，用算幾不等式求乘積的最小值。



體積最小時三截距是 3、6、9，$P(1,2,3)$ 在斜面上。

答：27

類題 1.5　截距式配柯西：配對要讓變數消掉

← 回題目

(2) 對。設截距 a、b、c，三截點 $(a,0,0)$、$(0,b,0)$、$(0,0,c)$ 的重心是 $\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{b}{3},\dfrac{c}{3}\right)=(-1,2,3)$，截距 -3、6、9：

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1$$

乘 18：$-6x+3y+2z=18$，就是 $6x-3y-2z+18=0$。

(3) 錯。截距 $a,b,c>0$，過 $A:\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{9}{c}=1$。算幾：

$$1\geq 3\sqrt[3]{\frac{36}{abc}},\quad abc\geq 972$$

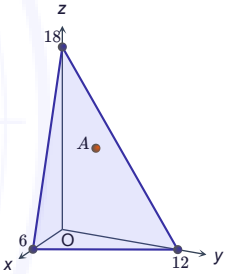
體積 $\dfrac{abc}{6}\geq 162$，最小值是 162（$a=3$、$b=12$、$c=27$）。972 是 abc 的最小值，忘了除以 6。

(4) 對。柯西不等式：

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)\geq(1+2+3)^2=36$$

等號在 $a:b:c=1:2:3$，代回條件得 $a=6$、$b=12$、$c=18$，取得到。

和例題 1.5 同一招：截距式過定點得到倒數條件，所求是截距的一次式，用柯西不等式讓變數相乘消掉。



選項 (4)：截距和最小時三截距是 6、12、18。

答：(2)(4)

這一型做完了

想知道自己是不是真的會了？到數學青於藍（royalblue-education.com）↗選這一型的知識點再做幾題，網站會記錄你的作答，做錯的題之後可以回頭再練。各校段考卷的整份詳解也在網站上。

第二型

類題 2.1　平面與坐標平面的夾角：正弦只有一個值

← 回題目

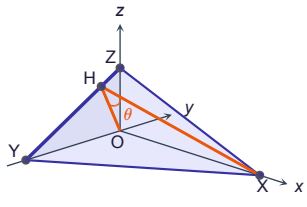
yz 平面是 $x=0$，法向量 $(1,0,0)$。平面 $2x-3y+6z=12$ 的法向量 $(2,-3,6)$，長 $\sqrt{4+9+36}=7$。

兩面角是法向量的夾角或它的補角：$\cos\theta=\pm\dfrac{2}{7}$。

$$\sin\theta=\sqrt{1-\frac{4}{49}}=\frac{\sqrt{45}}{7}=\frac{3\sqrt{5}}{7}$$

算到 $\cos\theta=\frac{2}{7}$ 就選 (1) 是最常見的錯。

和例題 2.1 同一招：坐標平面的法向量直接寫，兩個夾角的正弦相同。



X、Y、Z 是三個截距點。$\overline{OX}\perp yz$ 平面，$\overline{OH}\perp\overline{YZ}$，$\angle OHX$ 是兩面角：$\overline{OX}=6$，$\overline{OH}=\frac{4}{\sqrt{5}}$，$\overline{HX}=\frac{14}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\frac{3\sqrt{5}}{7}$。

答：(4)

試閱版（封面、目錄、第一型與詳解）｜完整版請見 royalblue-education.com/booklets

第一型讀完了

看得懂的話，後面還有 7 型。

第二型　兩平面的夾角、平行與垂直

第三型　點到平面的距離

第四型　空間直線

第五型　直線與平面

第六型　點到直線與兩線的距離

第七型　對稱與反射

第八型　三元一次方程組

- 完整版 84 頁：40 道例題、40 道類題，每一題都有詳解
- 書末還有六則證明、四道綜合挑戰、三節課綱外補充
- 題目和詳解點一下就互跳，跟你剛剛用的一樣
- 可以在平板上直接寫，也可以自己印成紙本

到官網看完整版 →

或在瀏覽器打 royalblue-education.com/booklets

手機掃這裡



第二型見。

御藍教育
ROYAL BLUE · EDUCATION